

5

JUNIO  
2015

ISSN: 2027-923X

# ELEMENTOS

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO  
ELEMENTOS VOLUMEN 5 NÚMERO 1 - JUNIO DE 2015  
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS BÁSICAS  
BOGOTÁ, COLOMBIA



VOL.5 No.1 ELEMENTOS

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA  
**POLITÉCNICO  
GRANCOLOMBIANO**



# E L E M E N T O S



VOLUMEN 5. NÚMERO 1. JUNIO DE 2015. E ISSN: 2248-5252

ELEMENTOS recibirá artículos escritos principalmente por docentes, investigadores, empresarios, investigadores externos (nacionales y extranjeros) y semilleros de investigación, quienes aportarán a los campos de conocimiento de la Ingeniería y Ciencias Básicas.

# REVISTA ELEMENTOS

## Elementos

E ISSN: 2248-5252

Revista Académica

## Volumen 5. Número 1

Junio de 2015

### Incluida en:

Chemical Abstracts Service (CAS)

PUBLINDEX: Índice Bibliográfico Nacional del Sistema Nacional de Indexación de Publicaciones Científicas Colombianas. (Categoría C).

LATINDEX: Sistema de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal. UNAM (México).

ULRICH WEB Global Serials Directory.

SHERPA/ROMEO University of Nottingham.

EBSCO: Academic Source.

DIALNET: Portal de Difusión de la Producción Científica Hispana. Universidad de La Rioja.

Centro de Información Tecnológica (CIT). Chile. e-Libro / e-brary.

## Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano.

### Presidente

Fernando Dávila Ladrón de Guevara

### Rector

Jurgen Chiari Escobar

### Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Rafael Armando García Gómez

### Director Revista Elementos

Rafael Armando García Gómez

### Editor científico

César Augusto Quiñones Segura

### Editor asociado

Jaime Andrés Posada Restrepo

### Editorial Politécnico Grancolombiano

#### Editor

Eduardo Norman Acevedo

#### Coordinador de producción

David Ricciulli Duarte

## Diseño y armada electrónica

Jaime Andrés Posada Restrepo

## Corrección de estilo

Nydia Patricia Gutiérrez Domínguez

npg.comunicaciones@gmail.com

## Ilustraciones y carátula

Santiago Arciniegas

## Impresión

Xpress estudio gráfico y digital

## Comité Científico y Editorial

Mauricio Ayala

*Universidade de Brasília*. Brasil

ayala@unb.br

Gabriela Barrantes

*Universidad de Costa Rica*. Costa Rica

gabriela.barrantes@ecci.ucr.ac.cr

Walter Bender

*Sugarlabs*. Estados Unidos

walter@sugarlabs.org

Luis Cáceres

*Universidad Tarapacá de Arica*. Chile

lcaceres@uta.cl

Jonice de Oliveira Sampaio

*Universidade Federal do Rio de Janeiro*. Brasil

jonice@dcc.ufrj.br

Fabio González

*Universidad Nacional de Colombia*. Colombia

fgonzalezo@unal.edu.co

Alexis Irlande

*Université Blaise Pascal*. Francia

airlande@unal.edu.co

Hermann Mena

*University of Innsbruck*. Austria

Hermann.Mena@uibk.ac.at

César Muñoz

*National Aeronautics and Space*

*Administration, NASA*. Estados Unidos

cesar.a.munoz@nasa.gov

Carlos Paternina

*Fundación Universidad del Norte*. Colombia

cpaterni@uninorte.edu.co

César Quiñones

*Politécnico Grancolombiano*. Colombia

caquinones@poli.edu.co

Jairo Rocha

*Universitat de les Illes Balears*. España

jairo@uib.es

Las opiniones expresadas en cada uno de los artículos son de exclusiva responsabilidad de los autores.

Versión electrónica: [www.poligran.edu.co/elementos](http://www.poligran.edu.co/elementos)



Elementos por Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Atribución – NoComercial – SinDerivadas 3.0 Unported.

# Índice general

|                                                                                                                                                                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Editorial</b> .....                                                                                                                                                                                           | 5   |
| Metabolitos aislados de <i>raputia heptaphylla</i> y <i>esenbeckia alata</i> (rutaceae)<br>y síntesis de precursores de análogos de alcaloides quinolínicos .....                                                | 7   |
| <i>Carlos A. Coy Barrera, Luis E. Cuca Suárez</i>                                                                                                                                                                |     |
| Planteamiento de una ecuación diferencial lineal de primer orden que<br>modela un problema de mezclas: Una dificultad en la movilización entre<br>registros de representación, lengua natural y algebraico ..... | 23  |
| <i>Luis Alberto Jaimes Contreras, Rafael Felipe Cháves Escobar, César<br/>Augusto Hernández Suárez</i>                                                                                                           |     |
| Fabricación de películas delgadas de $\text{TiO}_2$ utilizando el método <i>Doctor<br/>Blade</i> y <i>SpinCoating</i> .....                                                                                      | 33  |
| <i>Carlos E. Díaz-Uribe, William A. Vallejo, Karen Navarro</i>                                                                                                                                                   |     |
| El problema de Cauchy asociado a la ecuación no lineal de Schrödinger<br>forzada paramétricamente .....                                                                                                          | 41  |
| <i>Luisa Fernanda Martínez Rojas</i>                                                                                                                                                                             |     |
| Diseño de herramientas que fomenten el aprendizaje de matemáticas con<br>ayuda de <i>Mathematica 10</i> .....                                                                                                    | 65  |
| <i>Camilo Andrés Ramírez</i>                                                                                                                                                                                     |     |
| Método para calcular la eficiencia cuántica y la respuesta espectral de<br>celdas solares usando LabVIEW .....                                                                                                   | 81  |
| <i>Andrés Julián Aristizábal Cardona</i>                                                                                                                                                                         |     |
| Producción de hidrógeno a partir de energía solar. Panorama en Colombia                                                                                                                                          | 95  |
| <i>Andrea Lache Muñoz</i>                                                                                                                                                                                        |     |
| Análisis de la distribución del <i>tamaño de partícula de agregados de<br/>porfirinas</i> por dispersión dinámica de luz .....                                                                                   | 113 |
| <i>Carlos E. Díaz-Uribe, William A. Vallejo</i>                                                                                                                                                                  |     |
| <b>Reseñas</b> .....                                                                                                                                                                                             | 119 |
| Ingeniería del mantenimiento industrial y gestión del conocimiento.<br>Mejora en la eficiencia de las empresas .....                                                                                             | 121 |
| <i>Francisco Javier Cárcel-Carrasco</i>                                                                                                                                                                          |     |

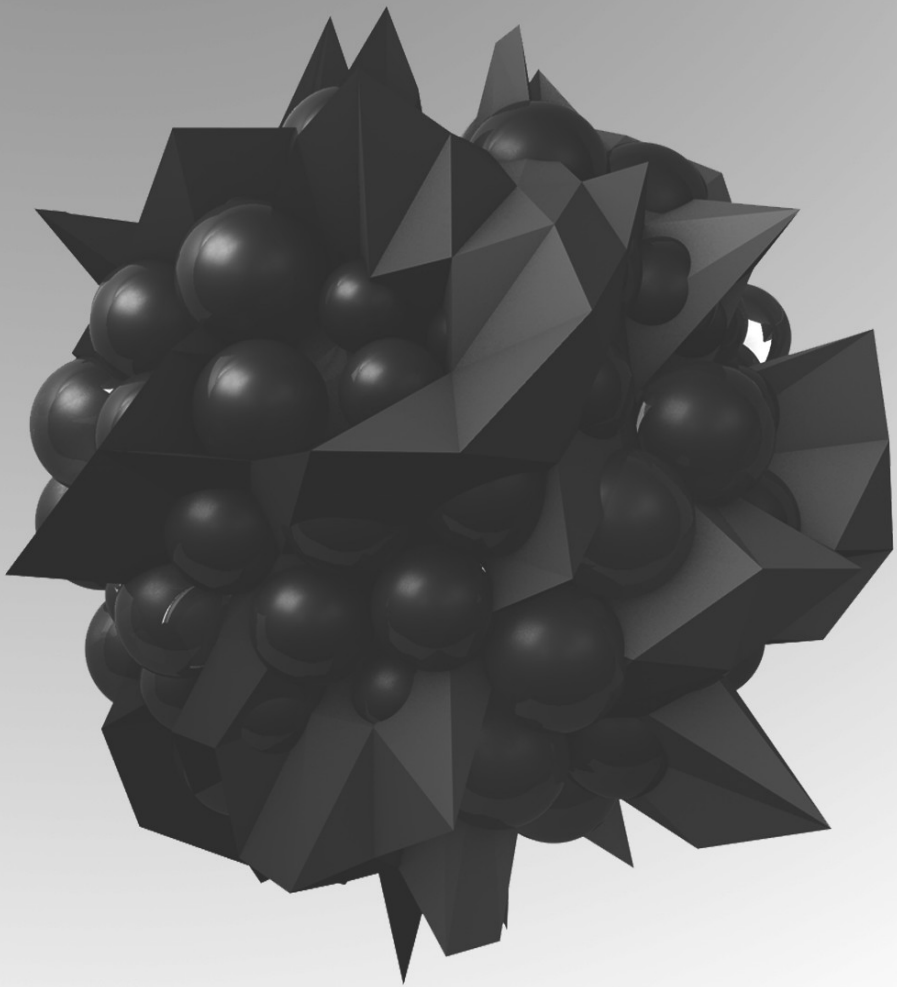


# Editorial

Unas palabras cálidas...

Junio de 2015

César Augusto Quiñones Segura  
*Editor*  
Politécnico Grancolombiano  
[caquinones@poligran.edu.co](mailto:caquinones@poligran.edu.co)



# Metabolitos aislados de *raputia heptaphylla* y *esenbeckia alata* (rutaceae) y síntesis de precursores de análogos de alcaloides quinolínicos

## Isolated Metabolites of *Raputia Heptaphylla* and *Esenbeckia Alata* (Rutaceae) and Synthesis of Quinolinic Alkaloid Analog Precursors

Carlos A. Coy Barrera<sup>1\*</sup>, Luis E. Cuca Suárez<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidad Militar Nueva Granada, Facultad de Ciencias Básicas y Aplicadas, Departamento de Química. Bogotá Colombia.

<sup>2</sup> Laboratorio de Investigación en Productos Naturales Vegetales, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Química, Bogotá, Colombia.

FECHA DE ENTREGA: 9 DE JUNIO DE 2014

FECHA DE EVALUACIÓN: 17 DE SEPTIEMBRE DE 2014

FECHA DE APROBACIÓN: 23 DE SEPTIEMBRE DE 2014

**Abstract.** Previous studies on the *Esenbeckia alata* and *Raputia heptaphylla*, both species belonging to the Rutaceae family, have shown important results with respect to their chemistry. These species have secondary metabolites (coumarins and alkaloids mainly), which act as chemotaxonomic markers. This paper presents, for the first time, the phytochemical work and isolated metabolites in these species: four coumarins: bergapten, xanthyletin, xanthotoxin, 3-isoprenyl-4-methoxy-coumarin; four alkaloids: skinmianine, kokusaginine, dictamnine, and 1-methyl-2-methoxy-4-quinolone; two lignans: sesamin and mesodihydroguaiaretic acid; two sterols:  $\beta$ -sitosterol, stigmasterol; and a pentacyclic triterpene: lupeol that have been isolated from leaves of *E. alata*. Five alkaloids 7-methoxy-2,2-dimethyl-2,6-dihidro-piran[3,2,c] quinolin-5-one, flindersiamine, skinmianine, kokusaginine and dictamnine that have been isolated from leaves of *R. heptaphylla*. Moreover, it presents a new method by obtaining quinolone alkaloid analogue precursors through the condensations of Mannich adduct vinylogous and aldehydes followed by radical cyclization to obtain products with high regio- and stereoselectivity.

**Keywords:** *Raputia*, Rutaceae, *Esenbeckia*, quinolinic alkaloids

---

\* carlos.coy@unimilitar.edu.co

## 1. Introducción

La familia Rutaceae está constituida por cerca de 150 géneros y 1600 especies, muchas de las cuales han sido reportadas por su amplio uso en medicina folklórica como analgésico, antipirético, ansiolítico y antiinflamatorio, entre otras aplicaciones y para el tratamiento de algunas enfermedades y afecciones tales como malaria, reumatismo, úlceras digestivas, gastritis, resfriado, fiebre y diarrea [1].

En Colombia la especie *Esenbeckia alata* se encuentra en los departamentos del Valle y Sucre, *Esenbeckia amazonia* koastra en Boyacá, *Esenbeckia panamensis* en el Chocó, *Esenbeckia litoralis* en Bolívar y *Esenbeckia pentaphylla* en el Magdalena. En el país el uso que se le da principalmente es como fuente maderable. En América especies como *Esenbeckia yaxhoob* y *Esenbeckia leiocarpa* tienen una etnobotánica interesante y son usadas para curar dolencias estomacales, diarreas y disentería [2]. Del género *Esenbeckia* se han aislado algunos alcaloides, cumarinas y quinolonas característicos de este género [2].

El género *Raputia* no ha sido muy estudiado, pues existen reportes de investigaciones hechas en Indonesia y Brasil donde se han aislado flavonoides glicosidados [3] y alcaloides indólicos [4] respectivamente. Muchas especies de esta familia, se han estudiado con el fin de confirmar la actividad biológica que sustenta su uso en la medicina tradicional, y así determinar el tipo de metabolito que presenta la acción farmacológica observada, y establecer cómo actúa el producto activo dentro del organismo.

Las investigaciones sobre la actividad biológica *in vitro*, se han centrado principalmente en los alcaloides y las cumarinas, debido a su gran importancia en el campo farmacológico [5].

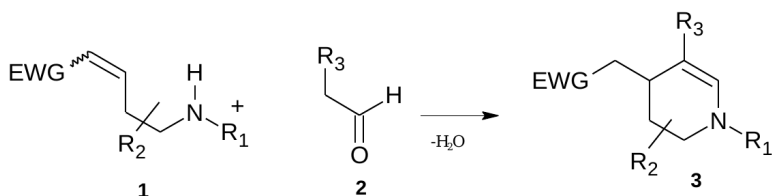
Estos metabolitos secundarios presentan un amplio rango de actividades biológicas como son, antitumoral [6], astringente [6], analgésica [7], de antiagregación plaquetaria [8], antimicrobiana [9], leishmanicida [10], citotóxica [11], anticoagulante [12] y antimalárica [13].

Los alcaloides furoquinolínicos comunes en el género *Esenbeckia*, han sido estudiados en otras especies durante los últimos años, arrojando resultados interesantes; un ejemplo es el estudio realizado al extracto de la corteza de *Melicope semicarpifolia* (Rutaceae), el cual posee actividad de antiagregación plaquetaria debido a la cantidad de alcaloides furoquinolínicos que posee (kokusaginina, skinmianina, evolitrina, haplopina). En el año 2006 se pudo observar la marcada actividad antifúngica de alcaloides como kokusaginina, maculina, dictamnina contra *Leucoagaricus gonylophorus* [14].

La haplopina, skinmianina,  $\gamma$ -fagarina y otros alcaloides furoquinolínicos que están en el género *Haplophyllum* y *Esenbeckia*, se caracterizan por poseer actividad estrogénica, comparada con derivados de dihidrofuroquinolinas y alcaloides quinolínicos [14].

La síntesis orgánica en la actualidad juega también un papel importante en la producción de nuevos compuestos que puedan presentar aplicaciones terapéuticas basadas en su gran mayoría en los metabolitos provenientes de fuentes vegetales, principalmente con núcleos nitrogenados. Por consiguiente, además del trabajo

fitoquímico, se presenta la síntesis de los precursores y análogos de alcaloides quinolínicos, por medio de la condensación de aductos de Mannich vinílicos **1** y aldehídos **2** para formar enaminas cíclicas **3**. (Figura 1). Esta reacción ha sido útil en la preparación de piperidinas polisustituidas vía reacciones de hidrogenación, adición nucleofílica y acoplamientos de tipo reductivo [15].



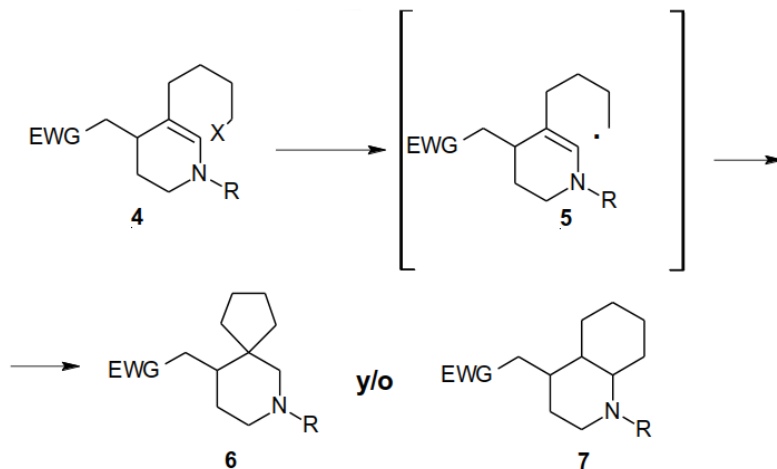
**Figura 1.** Formación de tetrahidropiridinas a partir de aminas y aldehídos.

Estas enaminas sustituidas **4**, comúnmente llamadas tetrahidropiridinas, pueden ser, en principio, precursores en la formación de sistemas policíclicos **6** y **7**, vía ciclación radicalaria [16] a través del intermediario **5**. Los compuestos cíclicos **6** y **7** (Figura 2), resultan interesantes porque este tipo de esqueletos presentan un gran número de compuestos biológicamente activos [17]. La ciclación radicalaria intramolecular en enaminas con sustituyentes de tipo alquilo y enamidadas es bien conocida [18], sin embargo para el caso de enaminas cíclicas como **4** solo existen reportes empleando sulfonilaminas [19] y derivados benzocarbazólicos e indólicos [20] [21] que se han caracterizado por ser poco regioselectivas y además, en cada caso se obtienen mezclas de los productos de ciclación 5-exo-trig y 6-exo-trig, formando anillos de cinco y seis miembros, respectivamente. Por lo tanto, vale la pena mencionar que este trabajo es el primer ejemplo de ciclaciones radicalarias para la formación de compuestos de tipo **6** que no envuelven derivados indólicos.

## 2. Parte experimental

### 2.1. Material vegetal

La muestra de *E. alata* (hojas, corteza y madera), fue recolectada en Colosó, Sucre por el biólogo Olimpo García y el doctor Luis Enrique Cuca Suárez profesor titular de la Universidad Nacional. Un ejemplar reposa en el Herbario Nacional de Colombia, Instituto de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Colombia bajo el COL. 481090. La muestra de *R. heptaphylla* hojas, corteza y madera fue recolectada en Albán, municipio de Cundinamarca, por el biólogo Zaleth Cordero, el doctor Luis Enrique Cuca Suárez profesor titular de la Universidad Nacional, Carlos Andrés Coy Barrera y Oscar Javier Patiño, estudiantes de Doctorado en Ciencias - Química. Un ejemplar reposa en el Herbario Nacional de Colombia,



**Figura 2.** Síntesis de **6** y **7**.

Instituto de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Colombia bajo el COL. 511102.

## 2.2. Aislamiento, purificación de metabolitos aislados de las especies *E. alata* y *R. heptaphylla*

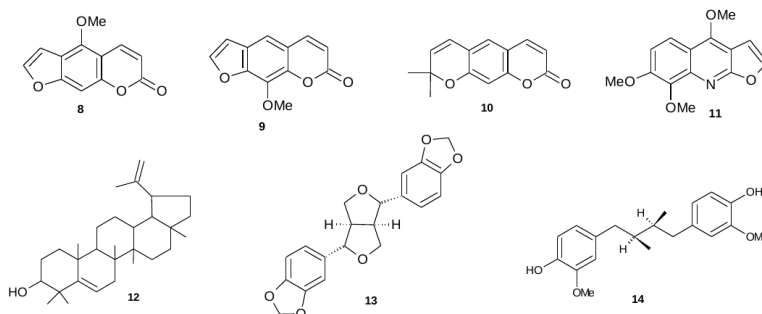
El material vegetal de hojas de *E. alata* (750 g), fue sometido a extracción por percolación con EtOH al 96 %. A este extracto se le realizó partición por Soxhlet con EdP (22 g), CHCl<sub>3</sub> (42 g) y AcOEt (35 g). El extracto de EdP fue fraccionado por CC usando como mezclas de elución Tol: AcOEt en polaridad creciente (9:1-1:1). Las fracciones obtenidas fueron purificadas usando CC repetitiva, y CCDP utilizando como eluyentes mezclas de CHCl<sub>3</sub>: MeOH y n-hexano: AcOEt con gradiente de elución. De este extracto se obtuvieron bergapteno **8** (17 mg), xantotoxina **9** (20 mg), xantiletina **10** (15 mg), skinmianina **11** (16 mg), lupeol **12** (1 4mg), sesamina **13** (14 mg). El extracto de AcOEt fue fraccionado por CC utilizando Tolueno: AcOEt como mezcla de elución. La purificación de las sustancias fue realizada por CC repetitiva y CCDP, eluyendo con CHCl<sub>3</sub>: MeOH y n-hexano: AcOEt en polaridad creciente (9:1-1:1), obteniéndose, kokusaginina **15** (10 mg), dictamnina **16** (19 mg), 1-metil-2-metoxi-4-quinolona **17** (8mg), 3-isoprenil-4-metoxi-cumarina **18** (11 mg). El material vegetal de hojas de *R. heptaphylla*, seco y molido (1700 g), fue sometido a percolación con etanol al 96 %, y se obtuvieron 80 g de extracto; 1 g se tomó para el análisis fitoquímico preliminar y el resto para el fraccionamiento y purificación. Según pruebas de coloración (Draggendorf), se determinó la presencia de alcaloides en la muestra; por ello se realizó una extracción típica ácido-base para este tipo de sustancias a 40 g del extracto etanólico original, de lo cual se obtuvo 1.7 g de extracto

clorofórmico de alcaloide que fue fraccionado por CC utilizando mezclas de elución  $\text{CHCl}_3$ : ACN y  $\text{CHCl}_3$ : AcOEt en polaridad creciente. Los metabolitos aislados se purificaron por CC repetitiva y CCDP, para obtener los compuestos skinmianina **11** (25 mg), kokusaginina **15** (44 mg), **16** dictamnina (29 mg), el alcaloide piranoquinolínico 7-metoxi-2,2-dimetil-2,6-dihidro-pirano[3,2,c] quinolin-5-ona **19** (6,5 mg) y flindersiamina (14,5 mg) **20**.

### 3. Resultados y discusión

#### 3.1. Aislamiento, purificación y elucidación estructural de metabolitos aislados de las especies *E. alata* y *R. heptaphylla*

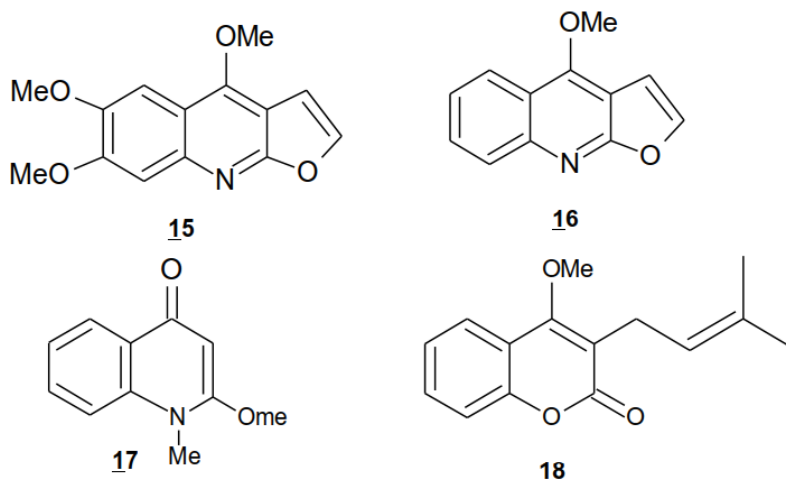
Del extracto de EdP de hojas de *E. alata* se obtuvieron dos furocumarinas bergapteno [22] **8**, xantotoxina [22] **9**, una piranocumarina, xantiletina [22] **10** un alcaloide furoquinolínico skinmianina [22] **11**, un triterpeno, lupeol [22] **12**, y dos lignanos (–)-sesamina [22] **13** y ácido meso-dihidroguaiarético [23] **14**.



**Figura 3.** Metabolitos aislados del extracto EdP hojas de *E. alata*.

Del extracto de AcOEt de hojas de *E. alata* se aislaron dos alcaloides furoquinolínicos, kokusaginina [24] **15** y dictamnina [24] **16**, un alcaloide quinolónico, 1-metil-2-metoxi-4-quinolona **17**, una cumarina prenilada, 3-isoprenil-4-metoxi-cumarina [22] **18**. Además  $\beta$ -sitosterol [25] y estigmasterol [25].

Al extracto etanólico de hojas de la especie *R. heptaphylla*, obtenido por percolación, se le realizó extracción de alcaloides utilizando el método ácido-base [26], ya que según el análisis fitoquímico preliminar [27] se encontró gran porcentaje de este tipo de metabolitos. De dicha extracción se obtuvieron 1,7 g de extracto clorofórmico de alcaloides, el cual fue fraccionado por CC utilizando como mezclas de elución  $\text{CHCl}_3$ : ACN y  $\text{CHCl}_3$ : AcOEt en polaridad creciente, los metabolitos aislados se purificaron por CC repetitiva, y CCDP, para obtener los compuestos **11**, **15**, **16** que ya habían sido aislados de la especie *E. alata*. El



**Figura 4.** Metabolitos aislados del extracto AcOEt hojas de *E. alata*.

alcaloide piranoquinolinico 7-metoxi-2,2-dimetil-2,6-dihidro-pirano[3,2,c] quinolin-5-ona **19**, aislado anteriormente de especies de la familia *Rutaceae*, específicamente del género *Haplophyllum* [28], y la flindersiamina **20**, aislada anteriormente de *Raullinoa echinata* [29] (*Rutaceae*), sin embargo resultan interesantes porque no existen reportes de este tipo de alcaloides en el género *Raputia*.

El compuesto **19** es un aceite amarillo, el espectro IR (NaCl), muestra en  $2980\text{ cm}^{-1}$  estiramiento C–H alifático, en  $1720\text{ cm}^{-1}$  estiramiento C=O de carbonilo característico de lactona, confirmado por el estiramiento C–O de lactona en  $1160\text{ cm}^{-1}$ , el espectro de RMN  $^1\text{H}$  muestra señales aromáticas en  $\delta$  7.60 (dd,  $J = 7.9, 1.47\text{ Hz}$ , 1H), 7.13 (dd,  $J = 7.9\text{ Hz}$ , 1H), 7.05 (dd,  $J = 7.9, 1.4\text{ Hz}$ , 1H), que corresponde a un sistema de tres protones aromáticos ABC, en un anillo trisustituido, 6.75 (dd,  $J = 9.8\text{ Hz}$ , 1H), 5.52 (dd,  $J = 9.8\text{ Hz}$ , 1H), protones vinílicos, 3.92 (s, 3H, O–Me), 3.88 (s, 3H, N–Me), 1.50 (s, 6H), metilos geminales. La comparación entre el espectro RMN  $^{13}\text{C}$  y DEPT 135, permite establecer la presencia de 7 carbonos cuaternarios en  $\delta$  78.7 (C unido a oxígeno), 106.0 (C), 118.3 (C), 131.1 (C), 148.6 (C), 154.9 (C), 162.1 (C=O), 5 metinos en  $\delta$  114.3 (CH), 115.6 (CH), 118.0 (CH), 122.2 (CH), 126.6 (CH) 2 metilos equivalentes en  $\delta$  28.2 (2CH<sub>3</sub>), y en  $\delta$  35.1 (CH<sub>3</sub>–N), 56.7 (CH<sub>3</sub>–O). La estructura de la molécula fue determinada de acuerdo a los datos espectroscópicos y confirmados por espectros bidimensionales HMQC y HMBC. También se determinó por el método de la comparación con los datos reportados en la literatura [28], y finalmente se aplicó el mismo método con los demás compuestos puros aislados de *E. alata* y *R. heptaphylla*.

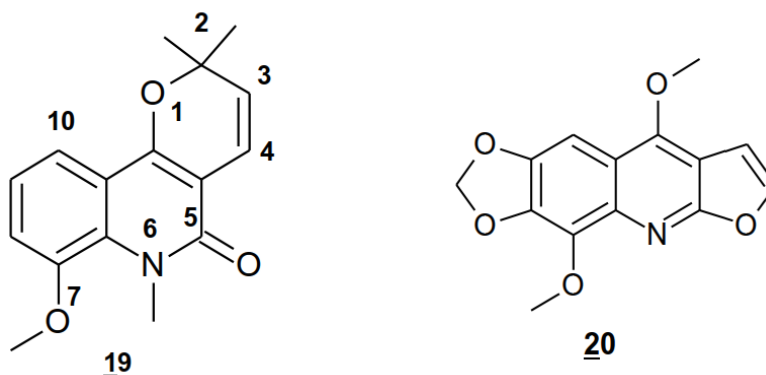


Figura 5. Metabolitos aislados de *R. heptaphylla*

### 3.2. Síntesis de precursores y análogos quinolínicos

Se llevó a cabo inicialmente la protección del grupo amino de la bencilamina **21** con incorporación de un grupo *tert*-butoxicarbonilo, obteniéndose el correspondiente derivado Boc protegido **22** con un 90 % de rendimiento. A continuación, se efectuó la alquilación del *N* amídico por desprotonación con *n*-BuLi, a baja temperatura y posterior adición de clorometil metil eter; así se obtuvo el correspondiente *N*-metoximetilderivado **23** con un rendimiento del 88 %. (Figura 6).

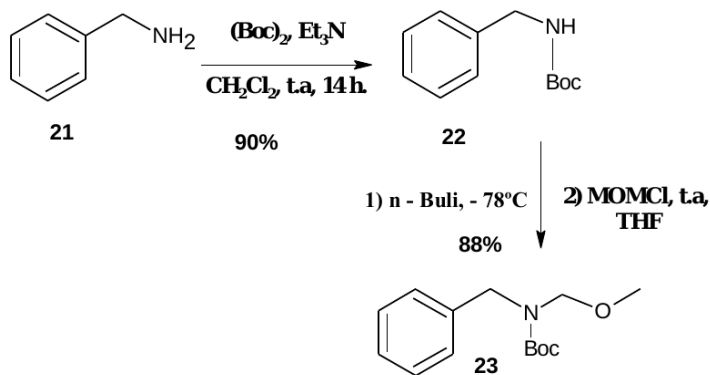
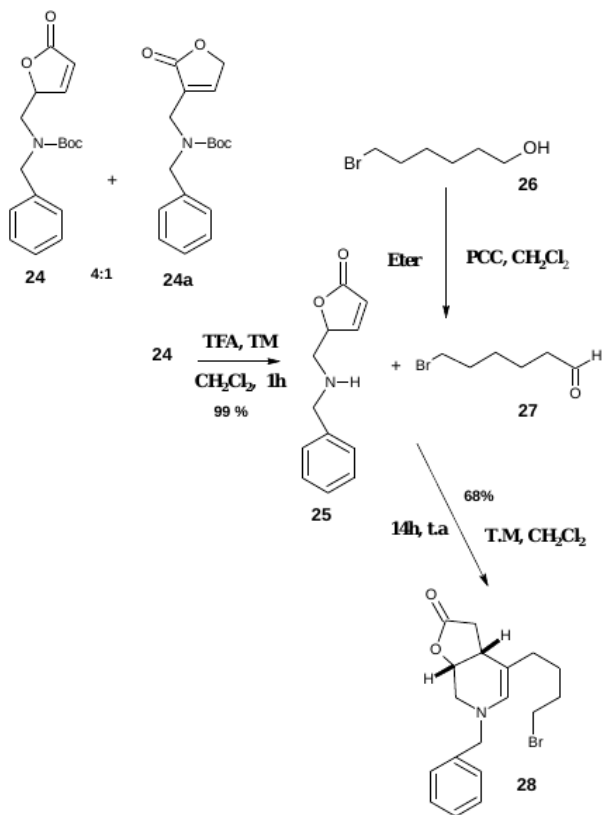


Figura 6. Síntesis de *N*-Metoximetil-derivado **23**.

El *N*-metoximetilcarbamato **23** se usó como sustrato para una reacción de Mannich viníloga a  $-78^{\circ}\text{C}$ , con 2-sililoxifurano, usando TMSOTf como agente

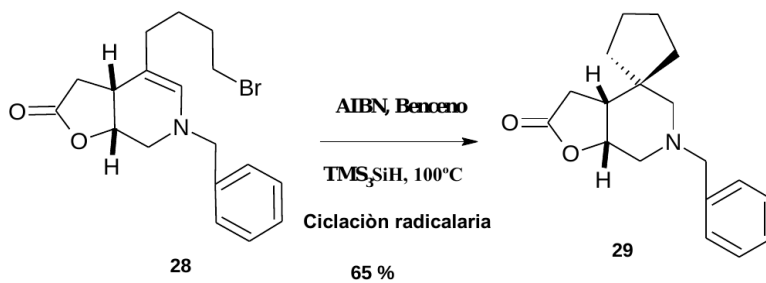
activante en las condiciones descritas por Aurrecoechea et al. [15]. De este modo, se obtuvo una mezcla de la amina **24** junto con su regioisómero **24a** con un 95 % de rendimiento global y una relación 4:1. Para completar la síntesis de la amina **25**, el carbamato **24** [15] que se purificó mediante sucesivas precipitaciones con hexano: Eter etílico 4:1 a 0 °C, se sometió a hidrólisis ácida con ácido trifluoroacético (TFA), dando lugar a la amina deseada. Esta amina se hizo reaccionar con el aldehído **27** formado a partir de la oxidación de 6-bromohexanol **26**, con PCC en CH<sub>2</sub>Cl<sub>2</sub>, y a 0 °C, siguiendo el procedimiento descrito por Hon et al. [30]. La reacción equimolar entre la amina **25** y el aldehído **27** en CH<sub>2</sub>Cl<sub>2</sub> y en presencia de tamiz molecular de 4 Å, induce a la formación de la tetrahidropiridina **28**. (Figura 7).



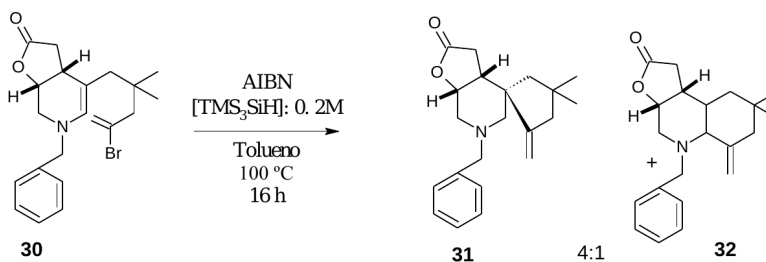
**Figura 7.** Síntesis de (1R\*, 5R\*)-8-Bencil-6-(4-bromobutil)-2-oxa-8-azabicyclo [3.4.0]-non-6-en-3-ona, Tetrahidropiridina **28**.

A partir de la tetrahidropiridina **28** se hizo la ciclación radicalaria. Esta reacción se realizó utilizando AIBN como iniciador en la formación de radicales libres, a una temperatura de 100 °C benceno y  $\text{TMS}_3\text{SiH}$ , teniendo en cuenta las condiciones descritas en la bibliografía para otro tipo de sustratos [31], en donde se observó que la formación del producto espiránico **29**, es de 45 % (Figura 8).

A partir de la amina **25** y del 6-bromo-4,4'-dimetilhept-6-enal [32], se obtuvo la tetrahidropiridina **30** con un porcentaje de rendimiento del 69 %, la posterior ciclación radicalaria bajo las mismas condiciones anteriores produjo la formación de dos isómeros **31** y **32** en relación 4:1, mediante CC flash, se logró purificar el compuesto **31**, que sirvió para la determinación de la proporción de la mezcla y posterior elucidación del compuesto **32** [33] (Figura 9). La stereoquímica del compuesto **31** se estableció a partir del análisis de los experimentos NOE.



**Figura 8.** (1R\*, 5R\*)-8-bencil-2-oxa-8-azabicyclo-[3.4.0]-non-6-en-3-ona-6-espirociclopentano **29**.



**Figura 9.** (1R\*, 5R\*, 6S\*)-8-bencil-2-oxa-8-azabicyclo[3.4.0]nonan-3-ona-6-espiro,4'-(1',1'-dimetil-3'-metilenciclopentano)] **31** y (3aR\*, 9aR\*)-5-bencil-8,8-dimetil-6-metiléndecahidrofuro [2,3-c]quinolin-2-ona **32**.

### 3.3. Síntesis de (1R\*,5R\*)-8-Bencil-6-(4'-bromobutil)-2-oxa-8-azabicyclo [3.4.0]-non-6-en-3-ona **28**

Sobre una disolución de la amina **25** (340 mg, 1,67 mmol) y el aldehído **27** (299 mg, 1,66 mmol) en diclorometano (21 mL), se adicionó tamiz molecular de 4 Å (3,44 g) y la suspensión resultante se agitó a temperatura ambiente durante 14 horas. Se filtró el residuo sólido sobre Celita y se lavó con diclorometano (3 × 15 mL). El aceite de color marrón oscuro resultante de la evaporación de los disolventes se purificó por cromatografía flash (gel de sílice, saturada con Et<sub>3</sub>N, hexano:AcOEt:Et<sub>3</sub>N = 85:13:2, obteniéndose **28** (413 mg, 68 %) como un aceite amarillo claro, que se descompone con rapidez a temperatura ambiente: RMN-<sup>1</sup>H (300 MHz, CDCl<sub>3</sub>) δ 1.42-2.01 (m, 6H), 2.36 (dd, *J* = 17.4, 5.9 Hz, 1H), 2.75 (dd, *J* = 17.4, 8.6, Hz, 1H), 2.91-3.01 (m, 3H), 3.42 (td, *J* = 6.7, 0.9 Hz, 2H), 3.98 y 4.03 (c AB, *J* = 14,7 Hz, 2H, Ph-CH<sub>2</sub>), 4.75 (ddd, *J* = 6.9, 5.4, 4.5 Hz 1H, H-1), 5.95 (s, 1H, H-7), 7.24-7.37 (m, 5H, Ar); RMN-<sup>13</sup>C (75 MHz, CDCl<sub>3</sub>) δ 26.6 (CH<sub>2</sub>), 31.6 (CH<sub>2</sub>), 32.1 (CH<sub>2</sub>), 33.7 (CH<sub>2</sub>), 34.3 (CH, C5), 34.8 (CH<sub>2</sub>), 47.9 (CH<sub>2</sub>), 59.2 (CH<sub>2</sub>) 77.5 (CH, C1), 107.0 (C, C6), 127.5 (CH), 128.1 (CH), 128.1 (CH), 128.6 (CH), 133.4 (CH), 137.4 (C), 176.5 (C=O); IR (Neto) 2932 (m, =CH) 1772 (f, C=O), 1660 (m, C=C), 1161 (m, C-O) cm<sup>-1</sup>; EM (IE) m/z (%) (365) (4), (364) (1), (242) (95), (238) (13), (91) (base), EMAR calculado para C<sub>18</sub>H<sub>22</sub>O<sub>2</sub>Br<sup>79</sup>N 363.0830, encontrado 363.0834. Calculado para C<sub>18</sub>H<sub>22</sub>O<sub>2</sub>Br<sup>81</sup>N: 365.0804, encontrado: 365.0813.

### 3.4. Síntesis de (1R\*,5R\*)-8-bencil-2-oxa-8-azabicyclo[3.4.0]non-6-en-3-ona-6-espirociclopentano **29**

Se calentó una disolución de **28** (349 mg, 0.964 mmol), AIBN (158 mg, 0.2892 mmol) y TMS<sub>3</sub>SiH (548 mg, 1.928 mmol) en tolueno (9.64 mL) a 100°C (temperatura del baño de aceite) durante 16 horas bajo Argón, tras enfriar, la mezcla se diluyó con AcOEt (15 mL) seguido por la adición de HCl 1M (20 mL). Se separó la fase orgánica de la fase acuosa y ésta se extrajo con HCl (3 x 20 mL), los extractos ácidos se basificaron con NaHCO<sub>3</sub> (2 M) hasta pH 8 (aproximadamente 120 mL), se extrajeron con CH<sub>2</sub>Cl<sub>2</sub> (3 × 25 mL) y los extractos orgánicos se lavaron con salmuera y se secaron con Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> anhidro. Tras la evaporación, el residuo (aceite marrón oscuro, 277,7 mg) se purificó por CC flash (gel de sílice saturada con Et<sub>3</sub>N, Hex:AcOEt:Et<sub>3</sub>N, 90:7:3), obteniéndose **29** como un sólido blanco (179 mg, 65 %): p.f: 76-78 °C; RMN-<sup>1</sup>H (300 MHz, CDCl<sub>3</sub>) δ 1.28-1.57 (m, 7H), 1.78-1.86 (m, 1H), 2.05 (dt, *J* = 11.5, 8.9 Hz, 1H), 2.21-2.50 (m, 4H), 3.01 (ddd, *J* = 11.3, 5.7, 1.5 Hz, 1H), 3.43 y 3.51 (c AB, *J* = 13.3 Hz, 2H, Ph-CH<sub>2</sub>), 4.60 (dt, *J* = 9.3, 6.3 Hz, 1H), 7.19-7.30 (m, 5H, Ar); RMN-<sup>13</sup>C (75 MHz, CDCl<sub>3</sub>) δ 23.9 (CH<sub>2</sub>), 24.2 (CH<sub>2</sub>), 29.8 (CH<sub>2</sub>), 35.4 (CH<sub>2</sub>), 37.9 (CH<sub>2</sub>), 43.7 (CH), 44.2 (C), 54.8 (CH<sub>2</sub>), 57.8 (CH<sub>2</sub>), 62.5 (CH<sub>2</sub>), 76.4 (CH), 127.2 (CH), 128.3 (CH), 128.7 (CH), 138.0 (C), 176.7 (C=O); IR (Neto) 1772 (f, C=O), 1155 (m, C-O) cm<sup>-1</sup>; EM (IE) m/z (%) (285) (17), (194) (39) (69) (base). EMAR: calculado para C<sub>18</sub>H<sub>23</sub>NO<sub>2</sub> 285.1729, encontrado: 285.1721.

### 3.5. Síntesis de (1R\*,5R\*)-8-Bencil-6-(2,2-dimetil-4-bromopent-4-enil)-2-oxa-8-azabicyclo [3.4.0] non-6-en-3-ona **30**

Sobre una disolución de la amina **24** (190 mg, 0.94 mmol) y el aldehído 6-bromo-4,4'-dimetilhept-6-enal [32] (205 mg, 0.94 mmol) en diclorometano (13 mL), se adicionó tamiz molecular pulverizado de 4 Å (2,00 g) y la suspensión resultante se agitó a temperatura ambiente durante 17 horas. Se filtró el residuo sólido sobre Celita y se lavó con diclorometano (3 × 15 mL). El aceite resultante de la evaporación de los disolventes se purificó por cromatografía flash (gel de sílice saturada con Et<sub>3</sub>N, hexano:AcOEt:Et<sub>3</sub>N = 90:7:3, obteniéndose **30** como un sólido blanco (185 mg, 49 %): p.f = 46 - 48 °C; RMN-<sup>1</sup>H (300 MHz, CDCl<sub>3</sub>) δ 0.98 y 0.99 (2s, 6H), 1.91 y 1.86 (c AB, *J* = 14,7 Hz, 2H), 2.36-2.48 (m, 3H), 2.76 (dd, *J* = 17.1, 8.4 Hz, 1H), 2.88 (dd, *J* = 12.3, 2.5 Hz, 1H), 3.07 (dd, *J* = 12.2, 5.1 Hz, solapado con señales de otro H, total 2H), 4.01 y 4.08 (c AB, *J* = 14,7 Hz, 2H, Ph-CH<sub>2</sub>), 4.73-4.77 (m, 1H, H-1), 5.51 (s, 1H), 5.56 (d, *J* = 1.1 Hz, 1H), 5.97 (s, 1H), 7.25-7.37 (m, 5H, Ar); RMN-<sup>13</sup>C (75 MHz, CDCl<sub>3</sub>) δ 26.9 (CH<sub>3</sub>), 27.5 (CH<sub>3</sub>), 35.1 (CH<sub>2</sub>), 35.9 (C) 36.2 (CH), 44.9 (CH<sub>2</sub>), 47.6 (CH<sub>2</sub>), 53.3 (CH<sub>2</sub>), 59.2 (CH<sub>2</sub>) 77.9 (CH), 103.7 (C), 120.5 (CH<sub>2</sub>), 127.5 (CH), 128.0 (CH), 128.6 (CH), 130.3 (C), 136.8 (CH), 137.4 (C), 176.7 (C=O). IR (Neat) 1772 (s, C=O), 1649 (m, C=C) cm<sup>-1</sup>; EM (IE) *m/z*, 405 (M, 0.44), 403 (M, 0.38), 324 (9), 242 (99), 91 (base). EMAR: calculado para C<sub>21</sub>H<sub>26</sub><sup>79</sup>BrNO<sub>2</sub> 403.1147, encontrado: 403.1141, calculado para C<sub>21</sub>H<sub>26</sub><sup>81</sup>BrNO<sub>2</sub> 405.1126, encontrado: 405.1136.

### 3.6. Síntesis (1R\*, 5R\*, 6S\*)-8-bencil-2-oxa-8-azabicyclo[3.4.0]nonan-3-ona-6-espiro ,4'-(1',1'-dimetil-3'-metilenciclopentano)] **31** y (3aR\*, 9aR\*)-5-bencil-8,8-dimetil-6-metiléndecahidrofuro [2,3-c]quinolin-2-ona **32**

El compuesto **30** (159 mg, 0.394 mmol) fue mezclado con AIBN (194 mg, 0.118 mmol) y TMS<sub>3</sub>SiH (196 mg, 0.690 mmol), bajo atmósfera de Argón y repetidas purgas vacío-argón, se adicionó tolueno (3.94 mL) y la solución resultante fue introducida en un baño de aceite con agitación constante a 100°C por 16 horas, se elaboró la reacción al solubilizar el crudo en AcOEt (10 mL) seguido por la adición de HCl 1M (10 mL), se separó la fase orgánica ácida de la fase acuosa y a esta última se le realizaron extracciones con HCl 1M (3 x 10 mL). Luego se reunieron las fases ácidas y se neutralizaron con NaHCO<sub>3</sub> (80 mL) hasta pH 8, se hizo extracción con CH<sub>2</sub>Cl<sub>2</sub> (3 × 15 mL), lavado con salmuera y adición de Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> anhidro, el residuo obtenido fue filtrado y concentrado en el rotavapor para dar un aceite marrón oscuro (120 mg). La purificación se hizo por CC flash (gel de sílice, saturada con Et<sub>3</sub>N, Hex: AcOEt: Et<sub>3</sub>N, 80:17:3) y se obtuvo la mezcla de diastereoisómeros 4:1, **31** y **32**, siendo el compuesto **31** el isómero mayoritario, el cual fue purificado por CC flash (gel de sílice, saturada con Et<sub>3</sub>N, Hexano: AcOEt: Et<sub>3</sub>N, 90:7:3) y del cual se obtuvo (51.3 mg, 40.1 %) como un aceite incoloro.

**Datos del isómero mayoritario 31:** RMN-<sup>1</sup>H (300 MHz, CDCl<sub>3</sub>) δ 0.86 (s, 3H), 1.00 (s, 3H), 1.46 y 1.52 (c AB, *J* = 13.8 Hz, 2H), 2.10-2.45 (m, 7H), 2.65

(td,  $J = 8.6, 5, 7.0$  Hz, 1H), 2.91 (dd,  $J = 12.0, 5.7$  Hz, 1H), 3.42 (d,  $J = 13.2$  Hz, 1H), 3.59 (d,  $J = 13.2$  Hz, 1H), 4.70 (td,  $J = 7.6, 6.2$  Hz, 1H), 4.97 (s, 1H), 5.30 (s, 1H), 7.23-7.34 (m, 5H, Ar); RMN- $^{13}\text{C}$  (75 MHz,  $\text{CDCl}_3$ ),  $\delta$  29.3 ( $\text{CH}_3$ ), 29.9 ( $\text{CH}_3$ ), 31.4 ( $\text{CH}_2$ ), 36.2 (C), 42.9 (CH), 46.7 (C), 49.8 ( $\text{CH}_2$ ), 50.1 ( $\text{CH}_2$ ), 53.9 ( $\text{CH}_2$ ), 60.3 ( $\text{CH}_2$ ), 62.4 ( $\text{CH}_2$ ), 76.7 (CH), 107.8 ( $=\text{CH}_2$ ), 127.3 (CH), 128.3 (CH), 128.9 (CH), 137.7 (C), 157.9, 176.3 (C=O). IR (Neto) 1778 (s, C=O), 1649 (m, C=C), 1167 (m, C-O)  $\text{cm}^{-1}$ ; EM (IE)  $m/z$  (%) 325 (M, 8), 241 (25), 134 (31), 91 (base); EMAR calculado para:  $\text{C}_{21}\text{H}_{27}\text{NO}_2$ ; 325.2042, observado: 325.2044.

De la mezcla de **31/32**, se logró determinar los **datos del isómero minoritario (32)**: RMN- $^1\text{H}$  (300 MHz,  $\text{CDCl}_3$ ),  $\delta$  0.88 (s, 3H), 1.06 (s, 3H), 1.73-1.84 (m, 2H), 2.04-2.48 (m, 6H), 2.58-2.69 (m, 1H), 2.75 (d,  $J = 13.7$  Hz, 1H), 3.08 (dd,  $J = 11.7, 6.4$  Hz, 1H), 3.95 (d,  $J = 13.6$  Hz, 1H), 4.57-4.65 (m, 1H), 4.88 (br s, 1H), 5.06 (br s, 1H), 7.23-7.34 (m, 5H), RMN- $^{13}\text{C}$  (75 MHz,  $\text{CDCl}_3$ )  $\delta$  24.7 ( $\text{CH}_3$ ), 30.5 ( $\text{CH}_2$ ), 32.2 ( $\text{CH}_3$ ), 32.6 (C), 35.9 (CH), 39.7 (CH), 41.6 ( $\text{CH}_2$ ), 44.0 ( $\text{CH}_2$ ), 53.3 ( $\text{CH}_2$ ), 57.7 ( $\text{CH}_2$ ), 64.7 (CH), 74.6 (CH), 114.4 ( $\text{CH}_2$ ), 127.1 (CH), 128.4 (CH), 128.5 (CH), 139.1 (C), 146.3 (C), 176.3 (C); CG/EM  $t_R$  (**13b**) = 20.6 min,  $t_R$  (**14b**) = 21.1 min; EM (EI)  $m/z$  (%) 325 (M, 17), 242 (36), 91 (base). EMAR calculado para  $\text{C}_{21}\text{H}_{27}\text{NO}_2$  325.2042, observado: 325.2044.

## 4. Conclusiones

Se pudo determinar la caracterización de 15 compuestos aislados en las especies *E. alata* y *R. heptaphylla*; de estos, cabe resaltar la identificación de alcaloides furoquinolínicos, piranoquinolínicos y cumarinas, característicos de estas especies y lo que está de acuerdo a la quimiotaxonomía de los géneros objeto de este estudio y de la familia *Rutaceae*.

De la especie *R. heptaphylla* se han encontrado pocos reportes, y los alcaloides que se han aislado en este trabajo se reportan por primera vez para esta especie, ya que anteriormente se han aislado alcaloides indólicos [4]. Para *E. alata*, a excepción de  $\beta$ -sitosterol y estigmasterol, los demás compuestos aislados se reportan por primera vez. Este es el primer reporte de lignanos en el género *Esenbeckia*, a pesar de la gran distribución de estos metabolitos en la familia *Rutaceae*.

Se desarrolló una posible ruta de síntesis para precursores de análogos de alcaloides quinolínicos, como es el caso de las tetrahidropiridinas formadas, las cuales presentan la tendencia en reacciones radicalarias a la formación de derivados Espiro prevaleciendo el camino 5-exo-trig, con un alto porcentaje de rendimiento, regio y estereoselectividad en los productos formados, siendo este el primer reporte de ciclaciones radicalarias partiendo de enaminas del tipo tetrahidropiridina, y no de derivados indólicos. Esta ruta de síntesis planteada permite la posibilidad de obtener una gran variedad de productos, usando diferentes sustratos de acuerdo al aldehído utilizado inicialmente.

## Agradecimientos

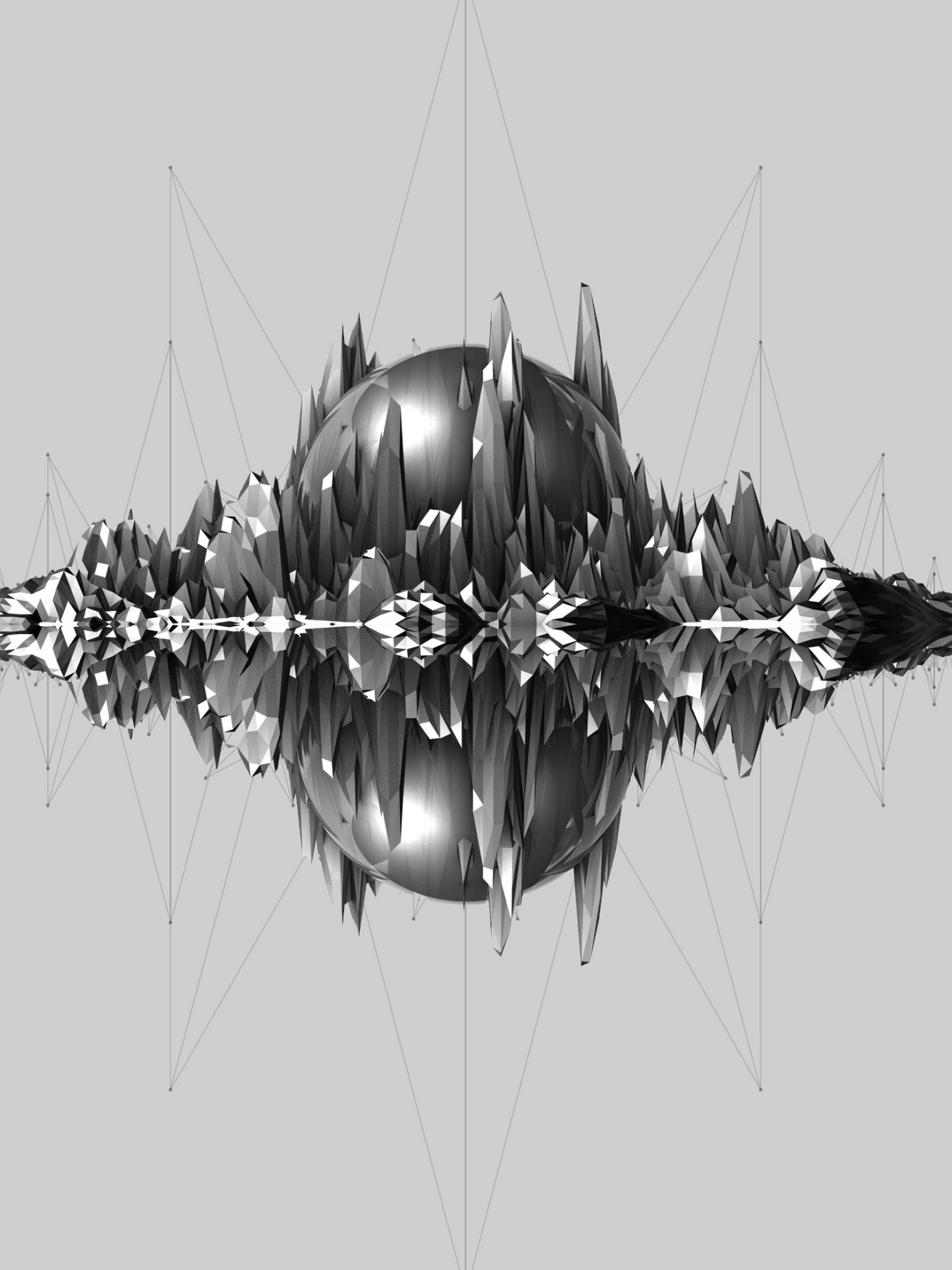
Agradecemos a Colciencias, al grupo de Productos Naturales Vegetales de la Universidad Nacional de Colombia por la financiación del trabajo. Al profesor Jose Miguel Aurrecoechea de la Universidad del País Vasco por la asesoría y financiación en la parte de síntesis, y al Laboratorio de Resonancia Magnética Nuclear de la Universidad Nacional de Colombia por la toma de espectros, así como también a la Universidad Militar Nueva Granada por permitir validar las extracciones de los metabolitos de *R. heptaphylla*, a través de la financiación del proyecto CIAS1173.

## Referencias

1. (a) Pollio, A.; De Natale, A.; Appetiti, E.; Aliotta, G.; Touwaide, A. *Journal of Ethnopharmacology*. 2008. 116. 469-482. (b) Cuca L.E. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Colombia. Sede Bogotá 1999. 1-5.
2. (a) Rios, M.; Aguilar-Guadarrama, B. *Biochemical Systematics and Ecology*. 2002. 30. 977-979. (b) Rios, M.; Rosa-Alonso, E.; Aguilar-Guadarrama, B. *Biochemical Systematics and Ecology*. 2002. 32. 817-821. (c) Rios, M.; Delgado, G. *Journal of Natural Products*. 1992. 55. 1307-1309. (d) Torres, A. Tesis de magíster, Departamento de Química, Universidad Nacional de Colombia. 2001. 10-15.
3. Bakhtiar, A.; Gleye, J.; Moulios, C.; Foraste, I. *Phytochemistry*. 1991. 30. 3840-3841.
4. Rosas, L.; André, T.; Das G.F.; Fernandes, J.; Vieira, P.; Oliva, G.; Thiemann, O. XXVI Reunião Anual Sobre Evolução. Sistemática e Ecologia Micromoleculares Instituto de Química. Universidade Federal Fluminense, 1 a 3 de dezembro de 2004.
5. Alvarez, B.; Ramon-Laca, L. *Journal of Ethnopharmacology*. 2005. 97. 89-95.
6. Ito, C.; Itoigawa, M.; Onoda, S.; Hosokawa, A.; Ruangrungsi, N.; Okuda, T.; Tokuda, H.; Nishino, H.; Furukawa, H. *Phytochemistry*. 2005. 66. 567-572.
7. Chen, K.-S.; Chang, Y.-L.; Teng, C.-M.; Chen, C.; F.; and Wu, Y.-C. *Planta Médica*. 2000. 66. 80-81.
8. Hanawa, F.; Fokialakis, N.; Skaltsounis, A. *Planta Medica*. 2004. 70. 531-535.
9. Rahman, M.; Gray, A... *Phytochemistry*. 2005. 13. 1601-1606.
10. Maximin K.; Ioset, J.; Ransijn, A.; Maue, J.; Mavi, S.; Hostettmann, K. *Phytochemistry*. 2004. 65. 963-968.
11. Collet, I.; Benoit-Vical, F.; Mustofa, A.; Stanislas, E.; Mallie, M.; Fouraste, I. *Planta Médica*. 2001. 68. 68-69.
12. Anaya, A.; Macias-Rubacava, M.; Cruz-Ortega, R.; García-Santana, C.; Sánchez-Monterrubio, P.; Hernández-Bautista, B.; Mata, R. *Phytochemistry*. 2005. 66. 487-494.
13. (a) Bertani, S. ; Bourdy, G. ; Landau, I. ; Robinson, J. ; Esterre, P. ; Deharo, E. *Journal of Ethnopharmacology*. 2005. 98. 45-54. (b) Dolabela, M.; Oliveira, S.; Nascimento, J.; Peres, J.M.; Wagner, H.; Pova, M.; de Oliveira, A. *Phytomedicine*. 2008. 15. 367-372.
14. Michael, J.; *Natural Products Reports*. 2008. 25. 166-167.
15. (a) Aurrecoechea, J. M.; Gorgojo, J. M.; Saornil, C. *Journal Organic Chemistry*. 2005. 70. 9640-9643. (b) Aurrecoechea, J. M., Suero, R., De Torre, E.. *Journal Organic Chemistry*. 2006. 71. 8767-8777.
16. Reviews: (a) Parsons, A. F.C.R. *Academic Sciences*. II. 2001, 391-400. (b) Clark, A.J. *Journal Chemical Society. Reviews*. 2002. 31. 1-12.

17. (a) Khan, F. A.; Dash, J. *Journal Organic Chemistry*. 2003. 68. 4556-4559. (b) Abe, H.; Aoyagi, S.; Kibayashi, S. *Journal of the American Chemical Society*. 2000. 122. 4583-4592.
18. (a) Parsons; Penckett, C.S.; Cramp, M.C.; West, R.I.; Warrington, J.; Saraiva, M.C. *Tetrahedron*. 1996. 52.647-660.
19. Ahman, J.; Somfai, P.; *Journal Chemical Society Perkin Trans I*. 1994. 1072-1082.
20. (a) Yang, C. C.; Chang, H. T.; Fang, J.M. *Journal Organic Chemistry*. 1998. 58. 3100-3105. (b) Flanagan, S.; Harrowven, D.C.; Bradley, M. *Tetrahedron Letters*. 2003. 44.1795-1798.
21. Joucla, L.; Putey, A.; Joseph, B. *Tetrahedron Letters*. 2005. 46, 8177-8179.
22. (a) Coy, C.A and Cuca, L.E. *Scientia et Technica*. 2007. 33. 337-338. (b) Cuca, L.E and Coy, C.A. *Biochemical Systematics and Ecology*. 2007. 35. 386-388.
23. Hwu, J.; Tseng, W.; Gnabre, J.; Giza, P.; Huang, R. *Journal of Medical Chemistry*. 1998. 41. 2994-3000.
24. Pusset, J.; Lopez, J.; Neirabeyeh, M.; Veillon, J. *Planta Medica*. 1991. 57. 153-155.
25. Forgo, P.; Kuver, K. *Steroids*. 2004. 69.43-50.
26. Djilani, A., Legseir, B., Soulimani, R., Dicko, A., Younos, C. *Journal of the Brazilian Chemical Society*, 2006. 17. 518-520.
27. Merck. *Reactivos de Coloración para Cromatografía en Capa Fina y en Papel*. E. Merck, Darmstadt (R.F. de Alemania). 1965. 27-332.
28. Campbell, W.; Davidowitz, B.; Jackson, G. *Phytochemistry*. 1990. 4. 1304-1306.
29. Biavatti, M.; Vieira, P.; Da Silva, M.; Fernandes, J.; Victor, S.; Pagnocca, F.; Albuquerque, S.; Caracelli, I.; Sceptor, J. *Journal of the Brazilian Chemical Society*. 2002.13. 66-70
30. Hon, Y., Chang, F., Lu, L., Lin, W. *Tetrahedron*. 1998. 5233-5246.
31. Ripa, L.; Hallberg, A. *Journal of Organic Chemistry*. 1998. 63.84- 91.
32. Brevion, F., Vitale, M., Fensterbank, L., Malacria, M. *Tetrahedron Asymmetry*. 2003. 14. 2889-2896.
33. Aurrecoechea, J. M.; Coy, C.A., Patiño, O. *Journal of Organic Chemistry*. 2008. 73, 5194-5197.





# Planteamiento de una ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas: Una dificultad en la movilización entre registros de representación, lengua natural y algebraico

## Proposal of a Linear Differential Equation of First Order that Shapes A Mixture Problem: Mobilization Difficulty among Representation Records and Natural and Algebraic Language

Luis Alberto Jaimes Contreras<sup>1\*</sup>, Rafael Felipe Cháves Escobar<sup>1\*\*</sup>,  
César Augusto Hernández Suárez<sup>2\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

<sup>2</sup> Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta, Colombia

FECHA DE ENTREGA: 7 DE NOVIEMBRE DE 2014

FECHA DE EVALUACIÓN: 16 DE FEBRERO DE 2015

FECHA DE APROBACIÓN: 26 DE FEBRERO DE 2015

**Resumen** Aunque la noción de ecuación diferencial está presente en campos como las matemáticas e ingeniería, su comprensión por parte de estudiantes y algunos profesores ha sido limitada, debido al enfoque algebraico en el que se ha centrado la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, dejando de lado la construcción de la ecuación diferencial (ED), la cual es el fundamento al modelar algunos fenómenos físicos. En este artículo presentamos algunas dificultades identificadas al construir la ecuación diferencial que permite modelar un problema de mezclas en un grupo de 21 estudiantes de una universidad pública inscritos en la asignatura de ecuaciones diferenciales.

**Abstract** Although the notion of differential equation is present in fields such as mathematics and engineering, understanding by students and some teachers has been limited due to the algebraic approach that has focused teaching differential equations, neglecting the construction of

---

\* Magister en Educación Matemática – Universidad Pedagógica Nacional.  
lajaimesc@udistrital.edu.co

\*\* Magister en Educación Matemática – Universidad Pedagógica Nacional.  
rafach\_25@hotmail.com

\*\*\* Magister en Enseñanza de las Ciencias Básicas – Universidad Nacional Experimental del Táchira (Venezuela). cesaraugusto@ufps.edu.co

the differential equation (DE), which is the foundation to model some physical phenomena. In this paper, we present some difficulties identified to build the differential equation that models a problem mixing in a group of 21 students enrolled in a public university the subject of differential equations.

**Palabras Clave:** problema de mezclas, registros de representación semiótica, movilización entre registros, ecuación diferencial.

**Keywords:** mixing problem, registers of semiotic representation, mobilization between registries, differential equation.

## 1. Introducción

En el plan curricular de los programas académicos de ingeniería el fundamento matemático se encuentra ubicado en la línea del análisis matemático. Un estudiante en su formación como ingeniero en los primeros semestres se enfrenta a asignaturas como cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales. Esta última se encuentra ubicada en semestres avanzados debido a que exige al estudiante una formación sólida y más elaborada en matemáticas. Sin embargo también es el causante de que muchos estudiantes tengan retraso en la asignatura normal de su programa académico.

Desde la experiencia docente en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, se ha observado que los índices de repitencia en la asignatura son elevados, incluso hay periodos en que aumenta pero nunca disminuyen. Una de las razones de que esto suceda se debe a que los estudiantes requieren del manejo adecuado de conceptos fundamentales del cálculo. Las dificultades con las que llegan los estudiantes a esta asignatura son varias, por ejemplo, cuando se les presenta un problema matemático, no reconocen ni diferencian: constantes, parámetros, variables, cambio de una variable respecto a otra; y tampoco son capaces de plantear una ecuación que las relacione.

Según lo señalan [4], en el estudio de las ED, actualmente “predomina el enfoque algebraico como reflejo de la primera forma que se tuvo de resolver problemas que involucran ED” y que algunos docentes hoy en día emplean como estrategia didáctica. Al igual que [5], en la enseñanza de las ED, algunos conceptos relacionados con límite, derivación e integración son evadidos y ocultos con fórmulas o algoritmos, lo cual impide la comprensión precisa del concepto llevando al estudiante, y en ocasiones a los docentes, a concebir la fórmula como un concepto en sí mismo. Incluso en libros de ED, como por ejemplo [6], cuando se abordan los modelos lineales de primer orden por lo general se le da al estudiante la ED que permite modelar este tipo de situaciones, pero no se explica el concepto para que los estudiantes la comprendan; al contrario solo se ofrece la fórmula [5].

El presente escrito tiene como propósito exponer que una de las dificultades de los estudiantes al abordar un modelo lineal de primer orden, como lo son los problemas de mezclas, radica en la movilización del registro de representación de la lengua natural al algebraico o al formal. Para dar cuenta de esto, se presenta una actividad propuesta a estudiantes de ingeniería civil de una Universidad

Pública que permitió recoger la información que condujo a realizar un análisis de las causales de esta dificultad. Se espera entonces responder la siguiente pregunta orientadora: ¿Cómo cobra sentido la movilización entre el registro de representación lenguaje natural al algebraico en el estudiante, cuando plantea una ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas?

## 2. Marco teórico

El estudio que se expone en este artículo considera como referencia el enfoque cognitivo desarrollado por Raymond Duval [2] basado en los registros de representación semiótica y el impacto que causan estos en el aprendizaje de nociones matemáticas. Un registro está constituido por signos como: trazos, símbolos, ícono, etc., los cuales se asocian de dos maneras, interna relacionada a las imágenes mentales que un individuo puede tener de un objeto; y externa, referentes a lo que éste puede percibir con los sentidos. Por consiguiente los registros son medios de expresión y de representación tales como notaciones algebraicas, gráficas o menciones verbales caracterizados por sus respectivos sistemas semióticos.

Las representaciones semióticas “son aquellas en las cuales la producción no puede hacerse sin el cambio o movilización de un sistema semiótico: así las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas (en lenguaje natural, en lenguaje formal) o no discursivas (figuras, gráficos, esquemas...)” [3]. Para tener mayor claridad sobre la producción de las representaciones semióticas Duval plantea tres aspectos en los cuales se enmarcan las intenciones, posibilidades e intereses que se persiguen a la hora de hacer uso de los símbolos. En primer lugar se encuentra la determinación de la importancia que tienen los signos y lo que estos pueden llegar a representar, en segundo lugar la fenomenología, referente a la aprehensión de los signos y el tercero está relacionado a la utilidad que prestan estos signos.

Es importante establecer diferencias entre un registro de representación y otro, al igual que establecer una coordinación entre registros de tal manera que se pueda extraer información de un mismo objeto matemático con diferentes registros de representación, esto se logra mediante la movilización de un registro a otro. Sin embargo se considera que no debe confundirse el objeto matemático con las representaciones del mismo, ya que si esto sucede un estudiante solo podría acceder a una parte del objeto matemático y no a su totalidad. Así como se menciona en [3], “la diferenciación funcional de registros de representación y la coordinación entre ellos constituyen los dos puntos clave para el aprendizaje”.

Después de establecer algunas generalidades de esta teoría cognitiva y de adquisición, en el sentido en el que el sujeto es considerado como un sujeto cognitivo que accede al conocimiento matemático y aprende a través de una mediación semiótica, es preciso para este escrito profundizar en dos registros de representación, la lengua natural y el algebraico.

La actividad matemática necesita modos de funcionamiento cognitivo que requieren movilización de sistemas de representación semiótica, por ejemplo un problema de mezclas en su mayoría siempre es presentado en el registro lengua

natural y se espera que el estudiante pueda resolverlo a partir de la información dada en el enunciado del problema; sin embargo si el estudiante no se sabe de memoria la ED lineal de primer orden que modela un problema de mezclas o si no se le proporciona, lo más probable es que no pueda resolverlo. Y es que el empleo del registro lengua natural en algunos dominios de la actividad matemática es fundamental, según [2] aunque se le conciba solo para enunciados de las definiciones o teoremas, estos obligan a considerar el empleo de otras expresiones simbólicas pertenecientes a sistemas semióticos desarrollados para tratamientos algebraicos, analíticos o formales.

### 3. Materiales y métodos

Esta propuesta se implementó a un grupo de 21 estudiantes de ingeniería civil de una universidad pública de Colombia inscritos en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales en el segundo semestre del año 2012. El lugar donde se implementó la propuesta fue en una sala de informática, la cual cuenta con 25 computadores, todos con conexión a internet, y el *software Java* instalado y adecuado para la reproducción del material de apoyo virtual (*software matemático*). El tiempo que duró la implementación de la propuesta fue de dos días de clase. Es importante aclarar que en cada día de clase, el trabajo se desarrolló de forma individual y en un tiempo de dos horas. A cada estudiante se le entregó de manera impresa el material (para más detalles observar el anexo) y posteriormente se realizó la lectura del contenido de ese material, el cual está compuesto por tres actividades cada una acompañada de unas preguntas elaboradas, con el fin de guiar poco a poco al estudiante a plantear la ED lineal de primer orden que modela un problema de mezclas.

### 4. Desarrollo de la propuesta y resultados

En la solución de problemas de mezclas que son modelados por una ED se requiere que el estudiante tenga claridad en el manejo de la derivada como una razón de cambio, de tal manera que le permitiera identificar constantes, parámetros, y variables que dependen entre sí. Por tal razón, en la propuesta se contemplan tres actividades que el estudiante debe desarrollar con el fin de que logre plantear la ED que se ajusta al problema de mezclas dado, de tal forma que ésta no represente solo una expresión algebraica, sino que por el contrario, que esta expresión represente la visualización del suceso expresado en el registro lengua natural.

#### 4.1. Actividad 1

Esta actividad tuvo como finalidad que los estudiantes identificaran razones de cambio, para ello se les recordó previamente que “La derivada expresa el cambio instantáneo que experimenta una variable con respecto a otra, para una función

$y = f(x)$ , se podría obtener la derivada o razón de cambio de las variables “ $y$ ” y “ $x$ ” con respecto al tiempo “ $t$ ”, es decir:  $\frac{dy}{dt}$  y  $\frac{dx}{dt}$ . En las cinco situaciones que se les planteaba, los estudiantes debían establecer la relación entre dos variables, por ejemplo cuando en la situación: “Cuando llenas un vaso con gaseosa, ¿qué tan rápido cambia el nivel de líquido al llenar el vaso?” Los estudiantes debían relacionar el enunciado con una expresión de la forma  $\frac{dh}{dt}$  donde  $h$  representa el nivel y  $t$  el tiempo.

El 70 % de los estudiantes obtuvieron un resultado aceptable al realizar la movilización del registro lengua natural al algebraico en al menos 3 de las 5 situaciones, el 30 % restante solo tuvo éxito a lo más en 2 situaciones. También se observó que los índices más altos de fracaso al realizar la movilización de un registro a otro, se presentaron en las situaciones 4 y 5 con 81 % y 76 %, respectivamente. Esto significa que los estudiantes identificaron razones de cambio en situaciones donde solo se aprecia una variable que depende del tiempo, sin embargo presentaron dificultad en situaciones donde se presenta más de una variable dependiente no necesariamente del tiempo.

## 4.2. Actividad 2

Esta actividad se dividió en dos partes, en la primera parte se continua haciendo énfasis en la identificación en el enunciado de la situación de la razón de cambio. La situación que se les plantea es: ¿Qué expresión algebraica describe la rapidez con la que sube el nivel  $n$  de líquido en un tanque cilíndrico vertical de radio  $r$ , si llenamos aquel a una razón de  $3 \text{ m}^3/\text{min}$ ? Con el apoyo de un *software* matemático el estudiante podía visualizar que a medida que el tiempo cambiaba, el nivel y el volumen del líquido en el cilindro también lo hacían. Además debían fijarse detalladamente en las características del registro en que fue formulado el problema, pues el mismo enunciado ya define la expresión en el registro algebraico para el nivel del líquido y para el radio del cilindro.

Luego de que los estudiantes exploraban con el *software*, se les formularon seis preguntas y se observó que el 34 % fracasó en la movilización del registro lengua natural al algebraico. En la segunda pregunta el 52 % respondió de forma incorrecta, esto se debe a que muchos cometieron errores relacionados a: identificar la dependencia e independencia de variables; considerar el volumen o nivel como variables; expresar constantes o parámetros como variables; y expresar una variable como un diferencial. Respecto a la pregunta 3, el 48 % de los estudiantes no expresaron correctamente la función que relacionaba las variables, es decir,  $V = \pi r^2 h$ , donde  $V$  representa el volumen del recipiente,  $r$  el radio y  $h$  la altura. Esto se debe a errores asociados a la multiplicación, porque los estudiantes multiplicaron la variable tiempo por  $\pi r^2 h$  e incluso expresaron el volumen como una derivada. En la pregunta 4 el 71 % fracasó en la solución debido a que algunos estudiantes no manejan la derivación implícita, no derivan la expresión  $V = \pi r^2 h$  con respecto al tiempo, ya que la variable no se encuentra en la expresión. Finalmente en las preguntas 5 y 6 los porcentajes de fracaso

fueron de 57 % y 81 % respectivamente pero no fue posible realizar una lectura de los errores frecuentes, pues la gran mayoría dejó en blanco.

En la segunda parte de la actividad 2 se buscó acercar al estudiante a un tipo de razonamiento que debía desarrollar al resolver problemas de mezclas. Así que debía observar cómo se comporta la cantidad de líquido en un recipiente, cuando se tienen sus velocidades de entrada y salida. Para ello, se le presentó la situación en registro lengua natural: “Un tanque con forma de cono es llenado con agua a razón de 7 pies<sup>3</sup>/min, si la altura del tanque es de 12 pies, el radio de la base es de 6 pies, y el tanque posee un orificio en su parte inferior por el cual sale agua a una razón de 1 pies<sup>3</sup>/min, entonces responda:” y se le formularon seis preguntas. Antes de que los estudiantes respondieran estos seis interrogantes, ellos tenían tiempo para apoyarse en el *software*, el cual les permitía visualizar qué ocurría con la cantidad de líquido en el cono a medida que pasaba el tiempo. Se esperaba entonces que el estudiante lograra, con el desarrollo de esta actividad, realizar la movilización del registro en lengua natural al algebraico deduciendo que la cantidad de líquido en el tiempo  $t$  se puede expresar como  $C_l = (V_E - V_S)t$ .

En las preguntas 1 y 6, el porcentaje de fracaso fue del 67 % y 71 % debido a errores relacionados a la identificación de dependencia de las variables volumen o nivel, dependencia de las velocidades de entrada y salida con respecto al tiempo, y deficiencias en el proceso de derivación implícita. En las preguntas 2, 3 y 5, el porcentaje de fracaso es de 48 %, 39 % y 43 %, respectivamente, debido a errores comunes como expresar la cantidad de agua como una razón de cambio, tener o no tener en cuenta la pertinencia de algunas variables, por ejemplo algunos no tuvieron en cuenta el tiempo como variable.

#### 4.3. Actividad 3

Esta actividad se dividió en tres situaciones referentes a problemas de mezclas, pues se esperaba, de acuerdo al trabajo realizado en las actividades 1 y 2, que el estudiante estuviera en condición de plantear la ED lineal de primer orden que permite modelarlos. Cada situación tiene apoyo de un *software* para que el estudiante pudiera visualizar el comportamiento de cada problema.

- **Problema 1.** A un tanque que contiene 300 galones de salmuera (es decir, agua en la que se ha disuelto cierta cantidad de libras de sal). Se vierte otra solución con una concentración de sal de 2 libras por galón, a una velocidad de 3 galones por minuto. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae al mismo ritmo que la solución de entrada. Encuentre la ecuación diferencial que modela este problema. Para llevar al estudiante a plantear la ED se formularon las siguientes preguntas:
  1. ¿Cuáles son las variables de este modelo? Clasifícalas como dependientes e independientes. Se considera necesario que el estudiante identifique cuáles son las variables y en función de quién deben estar.
  2. ¿Qué sucede con el nivel y el volumen del líquido, en cualquier instante de tiempo? Con esta pregunta se espera, que el estudiante centre su atención en la variable cantidad de sustancia; ya que en problemas donde

las velocidades de entrada y salida del líquido son iguales, la cantidad de líquido en el recipiente y el nivel permanecen constantes.

3. ¿Cómo cambia la variable dependiente en función de la variable independiente? Pregunta que orienta al estudiante a representar en el registro algebraico que el cambio de la variable dependiente en función de la variable independiente viene dada por la expresión  $C_l = (V_E - V_S)t$ .
4. ¿Qué cantidad de sal entra en cualquier tiempo? Debido a que no se dan de forma explícita las velocidades de entrada y salida de sustancia, se espera que realicen este proceso de conversión.
5. ¿Qué proceso debes realizar para responder: qué cantidad de sal sale del tanque en cualquier instante de tiempo? Con esta pregunta el estudiante debe darse cuenta que cuando en un recipiente se tiene disuelta una cantidad de —sustancia la cual se desconoce y que además se le agrega más sustancia para mezclarla de forma uniforme y sacarla del recipiente—, se debe dividir la cantidad de sustancia que se encuentra en el recipiente entre el volumen para determinar la cantidad de SAL que sale del tanque en cualquier instante de tiempo.
6. ¿Con qué velocidad cambia la cantidad de sal en cualquier instante de tiempo? Desde la primera actividad se está trabajando el proceso de movilizarse del registro lengua natural al algebraico, con el propósito de que al abordar este tipo de problemas los estudiantes tengan herramientas para realizar la movilización de registro.

En este problema se pudo observar que la implementación muestra un desempeño aceptable por parte de los estudiantes, ya que después del trabajo realizado en las actividades anteriores y las retroalimentaciones correspondientes, se encontró que en la pregunta 1 solo el 17 % no tuvo éxito. Ahora bien, respecto a la pregunta 2 y 4 se encontró un porcentaje de éxito del 100 % y en las preguntas 5 y 6 del 72 %. Respecto a la pregunta 3 en la que debían realizar una movilización de registros, el 67 % aunque acertaron en la respuesta, no realizaron la movilización entre registros y la formularon en el mismo registro, lengua natural.

- **Problema 2.** Se considera un tanque que contiene azúcar y agua con los que se prepararán refrescos embotellados. Suponga que el tanque contiene 100 galones de líquido, la cantidad que fluye hacia adentro es la misma que fluye hacia afuera, pero siempre hay 100 galones en el tanque. El tanque se mantiene bien mezclado, por lo que la concentración de azúcar es uniforme en todo el tanque. El agua azucarada que contiene 5 cucharadas de azúcar por galón, entra al tanque a través del tubo *A*, a razón de 2 galones por minuto. El agua azucarada que contiene 10 cucharadas de azúcar por galón, entra al tanque a través del tubo *B*, a razón de 1 galón por minuto. El agua azucarada sale del tanque a través del tubo *C* a razón de 3 galones por minuto.

Este problema aunque pareciera diferente al primero difiere en el registro de lengua natural, son enunciados diferentes, sin embargo es un problema de mezclas en el que la velocidad de entrada y salida de líquido son iguales, por lo que el volumen permanece constante y por consiguiente cuando los

estudiantes realizan la movilización al registro algebraico llegaron a la misma ED que modela el problema 1. Aunque las preguntas que se les formulan a los estudiantes son iguales a las del problema anterior, se les realiza una más y es la siguiente: ¿Qué cantidad de azúcar entra en total al tanque en cualquier momento  $t$ ? Esta pregunta tiene como objetivo facilitar que el estudiante visualice que la cantidad de agua, y por ende de sustancia que entra al tanque, es el resultado de la suma de las velocidades de entrada de sustancia por cada tubo.

En este problema los estudiantes realizaron correctamente la conversión de unidades de media y a pesar de cambiar las condiciones de llenado del tanque, interpretaron la velocidad de entrada de líquido como la suma de las velocidades de entrada en cada tubo. De la misma forma que en el problema anterior en la pregunta 3, el porcentaje más alto de fracaso fue en la pregunta 2 con un 67%, ya que a pesar de que dieron la respuesta correcta no la formularon en el registro algebraico.

- **Problema 3.** Un tanque grande de mezcla inicialmente contiene 200 galones de agua disuelta con 50 Lb de sal (salmuera). Otra solución de salmuera se inyecta en el tanque a una velocidad de 3 galones por minuto; en este flujo de entrada, la concentración de sal es de 2 libras por galón. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae a una velocidad de 2 galones por minuto. Si el tanque tiene tapa abierta y una capacidad total de 300 galones, responde: ¿En qué tiempo se derramara el líquido?, ¿Cuántas libras de sal habrá en el tanque al instante del derrame?. Grafique la solución en un *software* y comente acerca de cuántas libras de sal hay en el tanque cuando  $t \rightarrow \infty$ . ¿Coincide con lo que usted creería sin haber hecho ningún proceso?

Este problema es mucho más complejo con respecto a los dos problemas anteriores y se espera que para su solución el estudiante haga uso de todos los procesos trabajados a lo largo de estas tres actividades, resaltando entre estos, el proceso de la interpretación de la variación presente en un problema de mezclas y la movilización del registro lengua natural al algebraico.

En este problema se observó que el 67% de los estudiantes plantearon la ED lineal de primer orden, obteniendo así éxito en la movilización del registro lengua natural al algebraico y aunque las preguntas de este problema diferían con las de los 2 problemas anteriores se esperaba que sirvieran al estudiante como herramienta para plantear la ED que modelaba el problema dado.

## 5. Discusión

Se encontraron deficiencias en el manejo de los diferenciales y de la derivación implícita. No tener claro estas fórmulas matemáticas impiden que el estudiante realice correctamente la movilización del registro lengua natural al algebraico.

De acuerdo a lo analizado en los problemas 1 y 2 de la actividad 3, los estudiantes tienen una fuerte tendencia a expresar la respuesta en el registro de

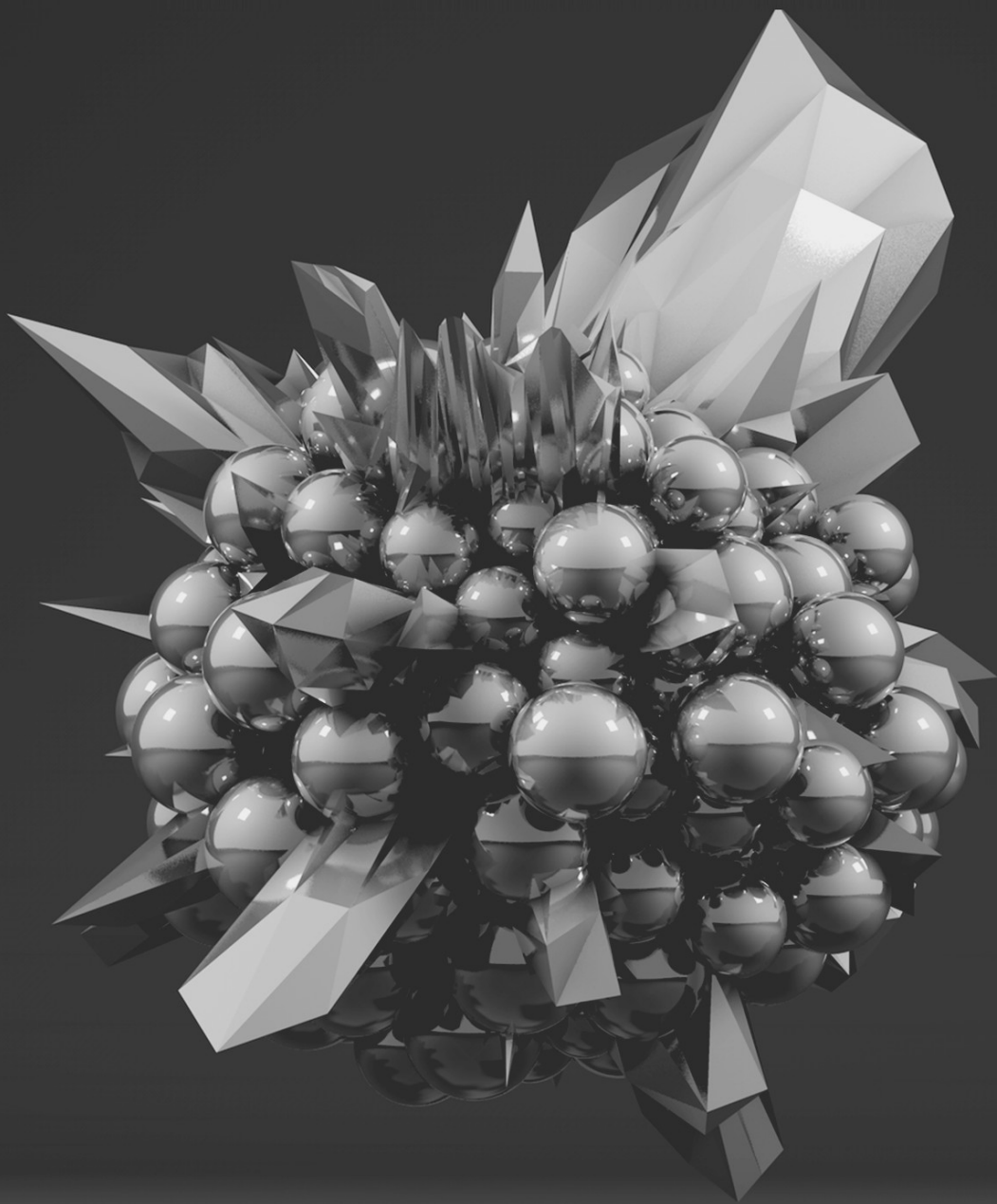
representación en que se le es formulada la pregunta, en este caso la respuesta que dieron fue en lengua natural cuando se esperaba que dieran la respuesta en el registro algebraico. Esto coincide con [3] donde se menciona que “las respuestas se quedan en el registro en el cual está planteada la pregunta”.

El apoyo de un *software* es importante ya que se convierte en un puente para la movilización de un registro a otro, permitiéndole al estudiante identificar algunas características que posiblemente no se visualicen en un registro.

El planteamiento de una ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas, depende entonces de las mediaciones semióticas que se utilicen para realizar la movilización del registro lengua natural al algebraico como bien se pudo observar en cada pregunta formulada.

## Referencias

1. De las Fuentes Maximiliano, Arcos L. José, Navarro R. Carlos.: Impacto en las Competencias Matemáticas de los Estudiantes de Ecuaciones Diferenciales a Partir de una Estrategia Didáctica que Incorpora la Calculadora. Formación Universitaria, Vol. 3(3), 33-44. (2010).
2. Duval, Raymond.: Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, Vol. 9.1, 143-168. (2006).
3. Guzmán, Ismenia.: Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. Relime, Vol. 1, Núm. 1, 5-21. (1998).
4. Morales L. Yuri, Salas H. Oscar.: Incorporación de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las ED ordinarias. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 6, 155-172. (2010).
5. Nápoles Valdés, J. E., González Thomas, A., Brundo, J. M., Genes, F., Basabilbaso, F.: El enfoque histórico problémico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Acta Scientiae, 6, 41-59. (2004).
6. Zill Dennis, Cullen Michael.: Matemáticas avanzadas para ingeniería, Vol 1. Ecuaciones diferenciales Tercera Edición, Editorial McGraw-Hill. (2008).



# Fabricación de películas delgadas de $\text{TiO}_2$ utilizando el método *Doctor Blade* y *Spin Coating*

## $\text{TiO}_2$ Thin Films Prepared by Doctor Blade and Spin Coating Methods

Carlos E. Díaz-Uribe, William A. Vallejo\*, Karen Navarro

Grupo de Investigación en Fotoquímica y Fotobiología. Programa de Química. Facultad  
de Ciencias Básicas. Universidad del Atlántico. Barranquilla, Colombia.

FECHA DE ENTREGA: 19 DE FEBRERO DE 2015

FECHA DE EVALUACIÓN: 12 DE MARZO DE 2015

FECHA DE APROBACIÓN: 15 DE MARZO DE 2015

**Resumen** Los recubrimientos de  $\text{TiO}_2$  son uno de los materiales más investigados a nivel mundial debido a sus diversas aplicaciones. En este trabajo se fabricaron y caracterizaron películas de  $\text{TiO}_2$  utilizando el método de *Doctor Blade* y el método *Spin Coating*. Los recubrimientos fueron caracterizados por Difracción de Rayos X (XRD) y Microscopia de Fuerza Atómica. La caracterización estructural mostró que la fase cristalina de crecimiento fue la misma para los dos métodos; sin embargo la las muestras obtenidas por *Doctor Blade* presentaron mayor cristalinidad que las obtenidas por el método *Spin Coating*, adicionalmente las películas obtenidas por *Spin Coating* presentaron mayor rugosidad que las películas obtenidas por *Doctor Blade*.

**Abstract**  $\text{TiO}_2$  coatings are materials that are highly investigated worldwide due to their various applications. This research prepared and characterized  $\text{TiO}_2$  films by using Doctor Blade and Spin Coating methods. The coatings were characterized by X-ray Powder Diffraction (XRD) and Atomic Force Microscopy. The structural characterization showed that the crystal growth phase was the same one for both methods. However, the samples obtained through Doctor Blade presented more crystallinity than those of the Spin Coated method. In addition, the films this method produced showed more rugosity than the ones produced by Doctor Blade.

**Palabras Clave:**  $\text{TiO}_2$ , película delgada, *Doctor Blade*, *Spin Coating*.

**Keywords:**  $\text{TiO}_2$ , thin film, Doctor Blade, Spin Coating.

---

\* [williamvallejo@mail.uniatlantico.edu.co](mailto:williamvallejo@mail.uniatlantico.edu.co)

## 1. Introducción

La síntesis y caracterización de superficies con el fin de mejorar y/o desarrollar nuevas propiedades en los semiconductores es una rama investigativa de gran desarrollo, son de especial interés los semiconductores con propiedades optoelectrónicas por las ventajas que estos ofrecen para desarrollar diferentes aplicaciones como son los procesos de oxidación avanzada de un gran número de partículas orgánicas, celdas solares, superficies auto-limpiables, detectores etc. [1,2,3]. Dentro de los semiconductores más utilizados para estos estudios, se encuentra el dióxido de titanio ( $\text{TiO}_2$ ) que es considerado uno de los más representativos porque no es tóxico, pues es inocuo, presenta elevada resistencia a la fotocorrosión, es estable en soluciones acuosas, no es costoso y presenta elevada actividad fotocatalítica [4]. Una de las desventajas que tiene el  $\text{TiO}_2$  es su elevado valor de brecha prohibida (3,2 eV); esto hace que por sí mismo el  $\text{TiO}_2$  solo sea capaz de aprovechar un 4% del espectro de luz solar para desarrollar procesos fotocatalíticos, haciendo necesario el uso de lámparas UV para su uso como fotocatalizador, esto incrementa significativamente el costo de implementación de este tipo de sistemas [5]. Otra limitante que presenta el uso de este tipo de materiales en procesos fotocatalíticos está relacionada con la forma física en la que se encuentra el  $\text{TiO}_2$ . Cuando el dióxido de titanio es usado en suspensión durante procesos de fotoderadación, su recuperación del medio de reacción no es sencilla y se debe adicionar una etapa de recuperación del catalizador al proceso de purificación que por lo general es costosa y poco efectiva [6,8]. La posibilidad de fijar de forma segura el  $\text{TiO}_2$  a superficies sólidas que permitan su continuo uso sin la necesidad de etapas de recuperación del material ni desperdicios del mismo, ha motivado el desarrollo de este estudio. En este trabajo se fabricaron y caracterizaron películas delgadas de  $\text{TiO}_2$  utilizando el método de *Doctor Blade* (DB) y el método *Spin Coating* (SC).

## 2. Metodología

### 2.1. Fabricación de las películas de $\text{TiO}_2$ por DB

Los electrodos de  $\text{TiO}_2$  fueron depositados sobre un sustrato de vidrio utilizando la técnica *Doctor Blade* [9,10]. La película se pre-calentó durante 30 minutos a 90 °C, con el fin de evaporar el disolvente, luego se sometió a un proceso de calentamiento constante durante una hora a 500 °C [10].

### 2.2. Fabricación de las películas de $\text{TiO}_2$ por SC

Los electrodos de  $\text{TiO}_2$  fueron depositados sobre un sustrato de vidrio utilizando la técnica SC a temperatura y presión atmosférica (25 °C, 1 atm). Este proceso SC tuvo una duración de 3 minutos, utilizando una rampa de velocidad de 500 rpm durante el primer minuto y de 2500 rpm durante los últimos 2 minutos. La suspensión utilizada, se preparó mezclando alcohol isopropílico,  $\text{TiO}_2$  Degussa

P25 y polietilenglicol 10000 (PEG) como surfactante. El recubrimiento obtenido se pre-calentó durante 30 minutos a  $90\text{ }^\circ\text{C}$ , con el fin de evaporar el disolvente, luego se sometió a un proceso de calentamiento constante durante una hora a  $500\text{ }^\circ\text{C}$ .

### 2.3. Caracterización de los recubrimientos

Para determinar las propiedades estructurales y morfológicas de las películas de  $\text{TiO}_2$ , se realizó análisis de difracción de rayos X utilizando un difractómetro de Shimadzu 6000 utilizando radiación  $\text{Cu K}\alpha$  ( $\lambda = 0.15406\text{ nm}$ ) como fuente de rayos-X (operado a 40 KV y 30 mA); y medidas de microscopía de fuerza atómica utilizando un microscopio PSI AFM operado en modo de no contacto con un área de escaneo ( $2\text{ }\mu\text{m} \times 4\text{ }\mu\text{m}$ ). El espesor de las películas fue determinado utilizando un perfilómetro Veeco Dektak.

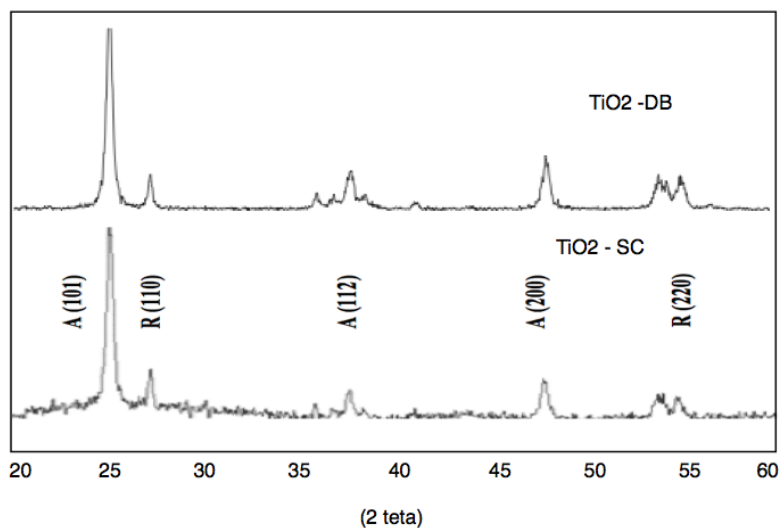
## 3. Resultados y discusión

### 3.1. Caracterización de XRD

En la figura 1 se muestran los difractogramas de rayos-X correspondientes a las películas de  $\text{TiO}_2$  depositadas sobre sustratos de vidrio soda lime (VSL). El difractograma correspondiente de los dos recubrimientos obtenidos muestra cuatro señales, dos señales en  $2\theta = 27,9$  y  $2\theta = 56,9$ ; correspondientes a los planos cristalográficos (110) y (221) de la fase rutilo con estructura tetragonal; y dos señales en  $2\theta = 25,5$  y en  $2\theta = 48,3$ ; estas señales corresponden a los planos cristalográficos (101) y (200) de la fase anatasa con estructura ortorrómbica [11]. Estos resultados corresponden con lo esperado para el material utilizado (Degusta P25). La figura 1 también muestra que las películas de  $\text{TiO}_2$  no sufren ninguna alteración cristalográfica durante el proceso de obtención del recubrimiento; esto indica que en el proceso de fabricación de las películas del  $\text{TiO}_2$  es un método sencillo y económico para la obtención de recubrimientos, conservando sus propiedades estructurales.

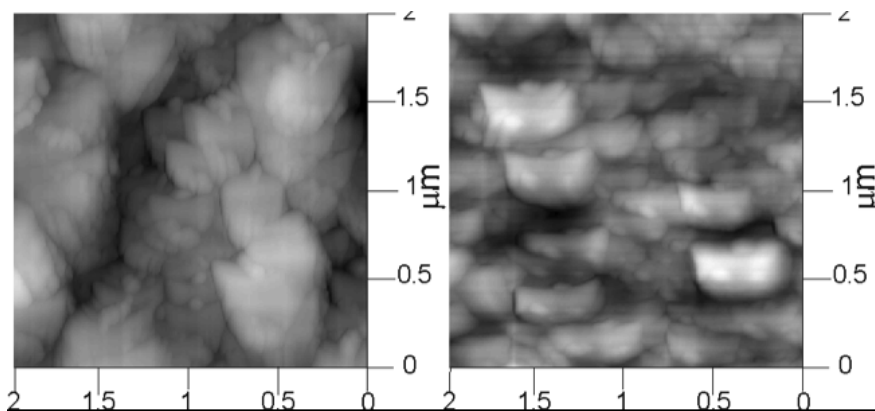
### 3.2. Caracterización por AFM

La figura 2, muestra imágenes de AFM obtenidas de películas delgadas de  $\text{TiO}_2$  correspondientes a la figura 1; adicionalmente en el cuadro 1, se listan los parámetros de rugosidad y tamaño de grano obtenidos. Las imágenes muestran pequeñas diferencias en la rugosidad y el tamaño de grano de las películas obtenidas para los dos métodos utilizados, sin embargo el tamaño de grano aumenta significativamente para las películas obtenidas por DB (230 nm) comparado con el obtenido para las películas de  $\text{TiO}_2$  obtenidas por SC (210 nm). Esto indica que el proceso de sintetizado que se utilizó como etapa final del proceso de fabricación de las películas fue mas efectivo con el método DB. Las diferencias en el tamaño de grano y la rugosidad de las películas pudo ser debido a la elevada velocidad



**Figura 1.** Patrón de RXD de las películas de TiO<sub>2</sub> sintetizadas por DB y SC.

de giro de la ultima etapa del proceso de SC. Finalmente, los resultados indican que el proceso utilizado en la fabricación de las películas sí afecta la morfología de las películas obtenidas.



**Figura 2.** Imagen de AFM de las películas de TiO<sub>2</sub> sintetizadas por DB y SC.

| Película            | Rugosidad Rms (nm) | Tamaño de grano (nm) |
|---------------------|--------------------|----------------------|
| $\text{TiO}_2$ - DB | 12.1               | 230                  |
| $\text{TiO}_2$ - SC | 14                 | 210                  |

**Cuadro 1.** Reporte de los valores de rugosidad y tamaño de grano obtenidos para las películas de  $\text{TiO}_2$ , obtenidas por DB y SC.

## 4. Conclusiones

En este trabajo se sintetizaron y caracterizaron películas de  $\text{TiO}_2$  por medio de dos métodos de fijación diferentes. Los resultados estructurales indicaron que la fase cristalina mas abundante fue la fase  $\text{TiO}_2$ -Anatasa, esto fue resultado del tipo material utilizado como fuente de  $\text{TiO}_2$ . Además, se estableció que bajo las condiciones de fabricación utilizada, el método de DB permitió obtener recubrimientos con menor rugosidad y mayor tamaño de grano. Finalmente los dos métodos probaron ser efectivos para la fabricación de recubrimientos de  $\text{TiO}_2$ .

## Agradecimientos

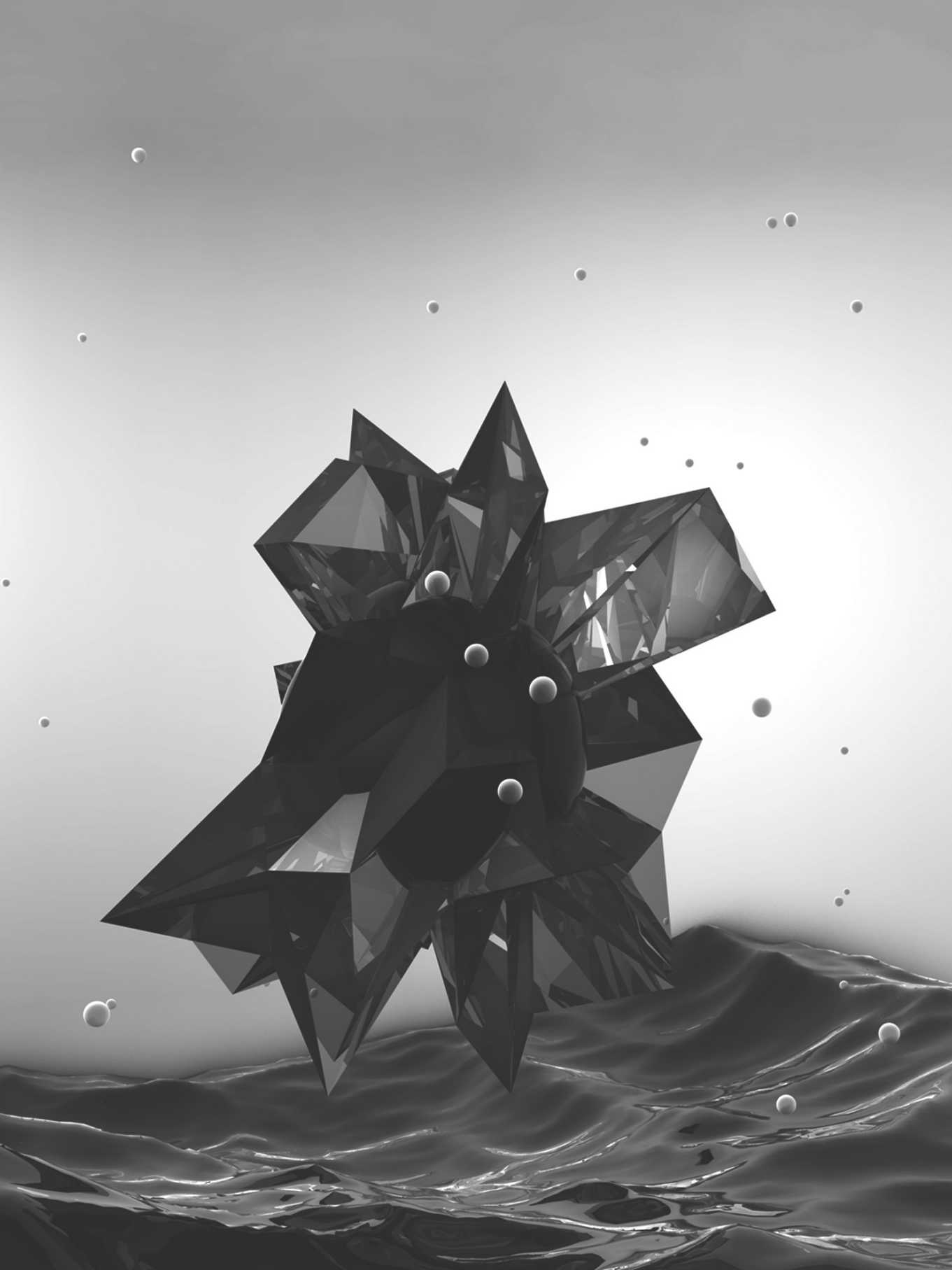
Los autores agradecen el apoyo de la Universidad del Atlántico en la ejecución de este trabajo, los resultados corresponden al proyecto presentado en la Convocatoria IMPACTO CARIBE 2014, convocado por la Universidad del Atlántico.

## Referencias

1. Horng-Huey Ko, Chi-Shiung Hsi, Moo-Chin Wang, Xiujuan Zhao.: Crystallite growth kinetics of  $\text{TiO}_2$  surface modification with 9 mol% ZnO prepared by a coprecipitation process. Journal of Alloys and Compounds, Volume 588, 5 March 2014, Pages 428-439
2. Yong Gao, Meng Hu, Baoxia Mi.: Membrane Surface Modification with  $\text{TiO}_2$ -Graphene Oxide for Enhanced Photocatalytic Performance. Journal of Membrane Science, In Press, Accepted Manuscript, Available online 11 January 2014.
3. M. Grujić-Brojčin, S. Armaković, N. Tomić, B. Abramović, A. Golubović, B. Stojadinović, A. Kremenović, B. Babić, Z. Dohčević-Mitrović, M. Šćepanović.: Surface modification of sol-gel synthesized  $\text{TiO}_2$  nanoparticles induced by La-doping. Materials Characterization, Volume 88, February 2014, Pages 30-41
4. A. Fujishima, T.N.R., D. A. Tryk, Titanium dioxide photocatalysis. Journal of Photochemistry and Photobiology. 1. 1-21. , 2000.
5. J. Leguizamón, C.Q., H. Espinosa, V. Sarria.: Fotesensibilización de  $\text{TiO}_2$  con un colorante comercial para Fotodegradación de Contaminantes Orgánicos en Agua. Rev. U.D.CA Act. & Div. Cient. 13 (2): 185-190. 2012.

6. D. Pjevič, M. Obradović, T. Marinković, A. Grce, M. Milosavljevič, R. Grieseler, T. Kups, M. Wilke, P. Schaaf. Properties of sputtered TiO<sub>2</sub> thin films as a function of deposition and annealing parameters. *Physica B: Condensed Matter*, Volume 463, 15 April 2015, Pages 20-25
7. T. Georgakopoulos, N. Todorova, K. Pomoni, C. Trapalis. On the transient photoconductivity behavior of sol-gel TiO<sub>2</sub>/ZnO composite thin films. *Journal of Non-Crystalline Solids*, Volume 410, 15 February 2015, Pages 135-141
8. Charline M. Malengreaux, Adrien Timmermans, Sophie L. Pirard, Stéphanie D. Lambert, Jean-Paul Pirard, Dirk Poelman, Benoît Heinrichs. Optimized deposition of TiO<sub>2</sub> thin films produced by a non-aqueous sol-gel method and quantification of their photocatalytic activity. *Chemical Engineering Journal*, Volumes 195-196, 1 July 2012, Pages 347-358.
9. S. Sahrul, R., Prasetyowati, M. I. Hidayat, P. Arifin, Khairurrijal, and M. Abdullah, Efficiency improvement in TiO<sub>2</sub>-particle bases solar cells after deposition of metal in spaces between particles. *International Journal of Basic & Applied Sciences IJBAS-IJENS Vol: 11 No: 06 2011*.
10. A. I. Kontos, A.G., Kontosa, D. S. Tsouklerisa, M.-C. Bernard, N. Spyrellis, P. Falaras, Nanostructured TiO<sub>2</sub> films for DSSCs prepared by combining doctor-blade and sol-gel techniques. *Journal of materials processing technology* 196, 243-248, 2008.
11. X. Zhou, X. Huang, Photocatalytic Degradation of Methyl Orange over Metalloporphyrins Supported on TiO<sub>2</sub> Degussa P25. *Molecules* 2012, 17(2), 1149-1158





# El problema de Cauchy asociado a la ecuación no lineal de Schrödinger forzada paramétricamente

## Cauchy's Problem Linked to Schrödinger's Non-linear Equation and Parametrically Forced

Luisa Fernanda Martínez Rojas\*

Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas,  
Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano,  
Bogotá, Colombia.

FECHA DE ENTREGA: 9 DE MARZO DE 2015  
FECHA DE EVALUACIÓN: 19 DE MAYO DE 2015  
FECHA DE APROBACIÓN: 24 DE MAYO DE 2015

**Resumen** El propósito de este trabajo es abordar el *buen planteamiento* en los espacios de Sobolev  $H^1(\mathbb{R})$ ,  $H^2(\mathbb{R})$  del problema de Cauchy, asociado a la ecuación lineal de Schrödinger, forzada paramétricamente para modelar fenómenos físicos que se presentan en óptica.

**Abstract** In this work we deal the local and global wellposedness in the Sobolev spaces  $H^1(\mathbb{R})$ ,  $H^2(\mathbb{R})$  of the Cauchy problem associated to equation, which is a disturbance in the cubic Schrödinger equation and model phenomena that occur in optics.

**Palabras Clave:** Problema de Cauchy, espacios de Sobolev, ecuación lineal de Schrödinger, ecuación cúbica de Schrödinger, locamente bien planteado, globalmente bien planteado.

**Keywords:** Cauchy Problem, Sobolev spaces, lineal Schrödinger equation, Cubic Schrödinger equation, Locally wellposedness, Globally wellposedness.

---

\* lfmartinezr@poligran.edu.co

## 1. Introducción

En este artículo, trataremos el *buen planteamiento* local y global en los casos periódico y no periódico de la ecuación

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u + (i - a)u - \gamma\bar{u} = 0, \quad (1)$$

que es una perturbación de la ecuación de Schrödinger cúbica y modela fenómenos presentes en óptica, especialmente en el oscilador óptico paramétrico. Para mayor información a este respecto vea ([1], [5], [6]) y las referencias allí contenidas.

Específicamente se estudiará el problema de valor inicial

$$\begin{cases} iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u + (i - a)u - \gamma\bar{u} = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases} \quad (2)$$

donde  $a \in \mathbb{R}$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Con el fin de tratar el *buen planteamiento* de (2), se usará una ecuación integral equivalente y el teorema del punto fijo de Banach, lo cual permitirá obtener el buen planteamiento local en  $H^s(\mathbb{R})$ , para  $s > 1/2$ . Posteriormente se probará que dicho problema es globalmente bien planteado en  $H^1(\mathbb{R})$ .

Siguiendo las ideas de Kenig-Ponce-Vega ([4]) se probará que este problema es localmente bien planteado en  $L^2(\mathbb{R})$ , y a partir de una estimativa *a priori* se probará que este problema es globalmente bien planteado en  $L^2(\mathbb{R})$ .

## 2. La ecuación lineal en $H^s$ , $s \geq \frac{1}{2}$

En esta sección, se analizará el problema de Cauchy asociado a la parte lineal de la ecuación (1) tanto en el caso periódico como en el no periódico. Es decir, se considerará el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{i\partial_x^2 u}{2}, \\ u(0) &= \varphi \in H^s, \end{aligned} \quad (3)$$

dónde,  $x \in \mathbb{R}$  o  $x \in \mathbb{T}$ , cuya solución viene dada por

$$u(t) = \mathbb{V}(t)\varphi = \left(e^{\frac{-i}{2}t\xi^2} \widehat{\varphi}\right)^\vee = e^{\frac{i}{2}t\partial_x^2} \varphi. \quad (4)$$

En lo que resta de esta sección, el artículo se dedica a tratar con el caso no periódico pues el caso periódico es semejante, salvo por pequeñas modificaciones.

**Teorema 1** *La aplicación  $t \in [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{V}(t) \in B(H^s)$  es un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro.*

*Demostración.* Este resultado es consecuencia de:

1. Como,

$$\|\mathbb{V}(t)\phi\|_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2)^s \left| e^{\frac{-i}{2}t\xi^2} \hat{\phi} \right|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2)^s \left| \hat{\phi} \right|^2 d\xi = \|\phi\|_s^2$$

para toda  $\phi \in H^s$  y toda  $t \in \mathbb{R}$  y por tanto, se concluye que  $\mathbb{V}(t) \in B(H^s)$  y que  $\mathbb{V}$  es una isometría. Además,  $\mathbb{V}$  es sobreyectiva para todo  $t \in \mathbb{R}$ ; en efecto, si  $\varphi \in H^s$  se tiene que  $\phi = e^{\frac{-i}{2}\partial_x^2}\varphi \in H^s$  por tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\phi &= e^{\frac{i}{2}t\partial_x^2} \left( e^{\frac{-i}{2}t\partial_x^2} \varphi \right) \\ &= e^{\frac{i}{2}t\partial_x^2} \left[ \left( e^{\frac{-i}{2}t\xi^2} \hat{\varphi} \right)^\vee \right] \\ &= \left[ e^{\frac{-i}{2}t\xi^2} e^{\frac{i}{2}t\xi^2} \hat{\varphi} \right]^\vee \\ &= \varphi \end{aligned}$$

Lo anterior implica que  $\mathbb{V}(t)$  es unitario para cada  $t \in \mathbb{R}$

2. Es claro que  $\mathbb{V}(0) = \phi$  para todo  $\phi \in H^s$

3.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(t+w)\varphi &= \left[ e^{((t+w)(\frac{-i}{2}\xi^2))} \hat{\varphi} \right]^\vee \\ &= \left[ e^{-t\frac{i}{2}\xi^2} e^{-w\frac{i}{2}\xi^2} \hat{\varphi} \right]^\vee \\ &= \mathbb{V}(t)[\mathbb{V}(w)\varphi] \end{aligned}$$

para todo  $t, w \in \mathbb{R}$ , y toda  $\varphi \in H^s$

4. Como,

$$\begin{aligned} \left\| e^{\frac{ti}{2}\partial_x^2}\phi - e^{\frac{wi}{2}\partial_x^2}\phi \right\|_s^2 &= \left\| (e^{\frac{-it}{2}\xi^2} \hat{\phi})^\vee - (e^{\frac{-iw}{2}\xi^2} \hat{\phi})^\vee \right\|_s^2 \\ &= \left\| [e^{\frac{-it}{2}\xi^2} \hat{\phi} - e^{\frac{-iw}{2}\xi^2} \hat{\phi}]^\vee \right\|_s^2 \\ &= \left\| [ (e^{\frac{-it}{2}\xi^2} - e^{\frac{-iw}{2}\xi^2}) \hat{\phi} ]^\vee \right\|_s^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)^s \left| (e^{\frac{-it}{2}\xi^2} - e^{\frac{-iw}{2}\xi^2}) \hat{\phi} \right|^2 d\xi \\ &\leq 4\|\phi\|_s^2, \end{aligned}$$

para todo  $t, w \in \mathbb{R}$ , y toda  $\phi \in H^s$ , y que  $\lim_{t \rightarrow w} (e^{\frac{-it}{2}\xi^2} - e^{\frac{-iw}{2}\xi^2}) = 0$ , el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue permite concluir que  $\left\| e^{\frac{ti}{2}\partial_x^2}\phi - e^{\frac{wi}{2}\partial_x^2}\phi \right\|_s^2 \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow w$ .

Así que 1, 2, 3 y 4 implican que  $\mathbb{V}$  es un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro.

**Teorema 2** Sea  $u$  dada por (4) es la única solución de (3). Es decir,  $u \in C([0, T]; H^s)$  es la única que satisface:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \frac{i}{2} \partial_x^2 u(t) \right\|_{s-2} = 0. \quad (5)$$

*Demostración.* Sea  $t \geq 0$  y  $h > 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \frac{i}{2} \partial_x^2 u(t) \right\|_{s-2}^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)^{s-2} \left| \frac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2(t+h)} \widehat{\varphi} - e^{\frac{-i}{2}\xi^2 t} \widehat{\varphi}}{h} - \left( \frac{-i\xi^2}{2} e^{\frac{-i}{2}\xi^2 t} \widehat{\varphi} \right) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)^{s-2} |e^{\frac{-i}{2}\xi^2 t}|^2 \left| \frac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2 h} - 1}{h} + \frac{i\xi^2}{2} \right|^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (6)$$

Como,

$$\left| \frac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2 h} - 1}{h} \right| \leq \left| \frac{i\xi^2}{2} \right| = \frac{1}{2} \xi^2$$

tenemos que (6) es acotado por

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \frac{i}{2} \partial_x^2 u(t) \right\|_{s-2}^2 \leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)^{s-2} |\xi^2|^2 |\widehat{\varphi}|^2 d\xi$$

Como  $\frac{|\xi^2|}{(1 + \xi^2)^2} \leq N$ , para alguna  $N > 0$  y  $\forall \xi \in \mathbb{R}$  la desigualdad anterior se transforma en

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \frac{i}{2} \partial_x^2 u(t) \right\|_{s-2}^2 \leq 4N \|\phi\|_s^2 \quad (7)$$

La desigualdad (7) y  $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2 h} - 1}{h} + \frac{i}{2} \xi^2 \right| = 0$  permite obtener el límite por la derecha, gracias al Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, porque para el límite por la izquierda, se procede análogamente. La unicidad es consecuencia de observar que si  $u$  es solución de (3) entonces  $\|u\|_s = \|\phi\|_s$ , pues  $\partial_t \|u\|_s^2 = 2 \operatorname{Re} \langle i \partial_x^2 u, u \rangle_s = 0$

### 3. El problema local

En esta sección se tratará el buen planteamiento local para el problema de valor inicial (1), el cual se describirá en la siguiente forma por comodidad.

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{i}{2} \partial_x^2 u + F(u), \\ u(0) &= \varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $F(u) = i|u|^2u - (1 + ia)u - i\gamma\bar{u}$ . El siguiente teorema transforma (8) en la ecuación integral

$$u(t) = \mathbb{V}(t)\varphi + \int_0^t \mathbb{V}(t - \tau)F(u(\tau)) \, d\tau \quad (9)$$

en  $H^{s-2}(\mathbb{R})$ .

**Teorema 3** *Si  $s > 1/2$  entonces el problema (1) es equivalente a la ecuación integral (9). En el siguiente sentido: si  $u \in C([0, T]; H^s)$  es una solución de (1), entonces  $u$  satisface (9). Recíprocamente, si  $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  es una solución de (9) en  $H^{s-2}(\mathbb{R})$ , entonces  $u \in C^1([0, T]; H^{s-2})$  y satisface (1).*

*Demostración.*

1. Para este análisis se ha supuesto que  $u \in C([0, T] : H^s(\mathbb{R}))$  es una solución de (1) en  $H^{s-2}$ , entonces

$$\mathbb{V}(-t)u_t - \mathbb{V}(-t)\frac{i}{2}\partial_x^2 u = \mathbb{V}(-t)F(u),$$

en  $H^{s-2}(\mathbb{R})$ . Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{V}(-t)u) = \mathbb{V}(-t)F(u),$$

integrando de 0 a  $t$  y observando que  $\mathbb{V}(t)$  es un operador acotado en  $H^{s-2}(\mathbb{R})$  se tiene,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(-t)u - \mathbb{V}(0)u(0) &= \int_0^t \mathbb{V}(-\tau)F(u(\tau)) \, d\tau \\ \mathbb{V}(-t)u - \varphi &= \int_0^t \mathbb{V}(-\tau)F(u(\tau)) \, d\tau \\ \mathbb{V}(-t)u &= \varphi + \int_0^t \mathbb{V}(-\tau)F(u(\tau)) \, d\tau \end{aligned}$$

luego,

$$u(t) = \mathbb{V}(t)\varphi + \int_0^t \mathbb{V}(t - \tau)F(u(\tau)) \, d\tau \quad (10)$$

2. Se supondrá ahora que  $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  es solución de (8), entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \frac{i}{2}Au(t) - F(u(t)) \right\|_{s-2} = 0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
 & \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \frac{i}{2} Au(t) - F(u(\tau)) \right\|_{s-2} \\
 & \leq \left\| \mathbb{V}(t) \left( \frac{\mathbb{V}(h) - 1}{h} - \frac{i}{2} A \right) \varphi \right\|_{s-2} \\
 & + \int_0^t \left\| \mathbb{V}(t-\tau) \left( \frac{\mathbb{V}(h) - 1}{h} - \frac{i}{2} A \right) F(u(\tau)) \right\|_{s-2} d\tau \\
 & + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left\| \mathbb{V}(t+h-\tau) F(u(\tau)) - F(u(t)) \right\|_{s-2} d\tau
 \end{aligned}$$

Del teorema (2) se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \mathbb{V}(t) \left( \frac{\mathbb{V}(h) - 1}{h} - \frac{i}{2} A \right) \varphi \right\|_{s-2} = 0.$$

Falta ver que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t \left\| \mathbb{V}(t-\tau) \left( \frac{\mathbb{V}(h) - 1}{h} - \frac{i}{2} A \right) F(u(\tau)) \right\|_{s-2} d\tau = 0 \quad (11)$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left\| \mathbb{V}(t+h-\tau) F(u(\tau)) - F(u(t)) \right\|_{s-2} d\tau = 0 \quad (12)$$

Obsérvese lo siguiente (11)

$$\begin{aligned}
 & \left\| \mathbb{V}(t-\tau) \left( \frac{\mathbb{V}(h) - 1}{h} - \frac{i}{2} A \right) F(u(\tau)) \right\|_{s-2}^2 \\
 & = \left\| \left( \frac{\mathbb{V}(h) - 1}{h} - \frac{i}{2} A \right) F(u(\tau)) \right\|_{s-2}^2 \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2)^{s-2} \underbrace{\left| \frac{e^{\frac{-i}{2} h \xi^2} - 1}{h} + \frac{i}{2} \xi^2 \right|_i^2}_{i} |\widehat{F(u(\tau))}|^2 d\xi
 \end{aligned} \quad (13)$$

Analizando (i) se tiene:

$$\left| \frac{e^{\frac{-i}{2} h \xi^2} - 1}{h} + \frac{i}{2} \xi^2 \right| \leq \left| \frac{e^{\frac{-i}{2} h \xi^2} - 1}{h} \right| + \left| \frac{i \xi^2}{2} \right|$$

Por el Teorema del valor medio

$$\left| \frac{e^{\frac{-i}{2} h \xi^2} - 1}{h} \right| \leq \left| \frac{-i}{2} \xi^2 \right| = \frac{1}{2} \xi^2$$

Entonces

$$\left| \frac{e^{\frac{-i}{2}h\xi^2} - 1}{h} + \frac{i}{2}\xi^2 \right|^2 \leq \left( \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^2 \right)^2 \leq C(1 + \xi^2)^2$$

Luego, (13)

$$\begin{aligned} & \leq \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2)^{s-2} C(1 + \xi^2)^2 |\widehat{F(u(\tau))}|^2 d\xi \\ & = C \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2)^s |\widehat{F(u(\tau))}|^2 d\xi \\ & = C \|F(u(\tau))\|_s^2 \end{aligned}$$

y como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2 h} - 1}{h} + \frac{i}{2}\xi^2 \right| = 0$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue se tiene que:

$$\left\| \mathbb{V}(t - \tau) \left( \frac{\mathbb{V}(h) - 1}{h} - \frac{i}{2}A \right) F(u(\tau)) \right\|_{s-2} \rightarrow 0, \text{ si } h \rightarrow 0$$

Ahora se tiene que (12):

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathbb{V}(t + h - \tau) F(u(\tau)) - F(u(t)) d\tau \right\|_{s-2} \\ & \leq \frac{1}{|h|} \int_t^{t+h} \|\mathbb{V}(t + h - \tau) F(u(\tau)) - F(u(t))\|_{s-2} d\tau \end{aligned}$$

para algún  $\tau \in [t, t + h]$ , la continuidad y el teorema del valor medio para integrales aplicados a la función continua

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{|h|} \int_t^{t+h} \mathbb{V}(t + h - \tau) F(u(\tau)) d\tau - F(u(t)) \right\|_{s-2} = 0$$

A continuación se establece un resultado que es importante en la prueba del buen planteamiento local.

**Lema 4** Si  $u, v \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  con  $s > 1/2$  entonces

$$\|F(u) - F(v)\|_s \leq L(\|u\|_s, \|v\|_s) \|u - v\|_s$$

donde  $F$  es dado como en (8) y  $L$  es un polinomio homogéneo de grado 2.

*Demostración.* Como,

$$\begin{aligned} F(u) - F(v) &= i|u|^2u - (1 + ia)u - i\gamma\bar{u} - (i|v|^2v - (1 + ia)v - i\gamma\bar{v}) \\ &= i(|u|^2u - |v|^2v) - (1 + ia)(u - v) - i\gamma(\bar{u} - \bar{v}), \end{aligned}$$

la desigualdad triangular implica que

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_s &= \|i(|u|^2u - |v|^2v) - (1 + ia)(u - v) - i\gamma(\bar{u} - \bar{v})\|_s \\ &\leq \underbrace{\| |u|^2u - |v|^2v \|_s}_i + |1 + ia|\|u - v\|_s + |\gamma|\|\bar{u} - \bar{v}\|_s \end{aligned} \quad (14)$$

La identidad

$$|f|^2f - |g|^2g = |f|^2(f - g) + \bar{f}g(f - g) + g^2(\bar{f} - \bar{g})$$

y el hecho de ser  $H^s(\mathbb{R})$  un álgebra de Banach para  $s > \frac{1}{2}$  transforma (i) en:

$$\begin{aligned} \| |u|^2u - |v|^2v \|_s &\leq \| |u|^2(u - v) \|_s + \| \bar{u}v(u - v) \|_s + \| v^2(\bar{u} - \bar{v}) \|_s \\ &\leq \|u\|_s^2\|u - v\|_s + \|\bar{u}\|_s\|v\|_s\|u - v\|_s + \|v\|_s^2\|\bar{u} - \bar{v}\|_s \\ &\leq \|u\|_s^2\|u - v\|_s + \|u\|_s\|v\|_s\|u - v\|_s + \|v\|_s^2\|u - v\|_s \\ &\leq \|u - v\|_s(\|u\|_s^2 + \underbrace{\|u\|_s\|v\|_s}_{ii} + \|v\|_s^2) \end{aligned} \quad (15)$$

Por lo tanto (14) y (15) implican el resultado con

$$\left( \frac{3}{2}(\|u\|_s^2 + \|v\|_s^2) + |1 + ia| + |\gamma| \right) = L(\|u\|_s, \|v\|_s)$$

y se tiene entonces que

$$\|F(u) - F(v)\|_s \leq L(\|u\|_s, \|v\|_s)\|u - v\|_s$$

**Teorema 5** Sean  $\varphi \in H^s$ , donde  $s > 1/2$ . Entonces, existen  $T_s = T(\|\varphi\|_s) > 0$  y  $u \in C([0, T_s]; H^s(\mathbb{R}))$  satisfaciendo la ecuación integral (10).

*Demostración.* Sean  $M, T > 0$ . Consideremos el espacio métrico completo definido por

$$\mathfrak{X}_s(T) = \{u \in C([0, T]; H^s) : \|u(t) - e^{\frac{it}{2}\partial_x^2}\varphi\|_s \leq M, \forall t \in [0, T]\}, \quad (16)$$

dotado de la métrica  $d(u, v) = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - v(t)\|_s = \|u - v\|_{\infty, s}$  y la aplicación

$$\Psi(u(t)) = \mathbb{V}(t)\varphi + \int_0^t \mathbb{V}(t - \tau)F(u(\tau))d\tau \quad (17)$$

Una parte esencial de la prueba es probar que existe  $T > 0$  tal que  $\Psi$  aplica  $\mathfrak{X}_s(T)$  en sí mismo y es una contracción. Por tal razón se ha dividido la prueba en varias etapas, a saber:

i.  $\Psi u \in C([0, T]; H^s)$  si  $u \in \mathfrak{X}_s(T)$ . En efecto, esto es consecuencia de aplicar la norma de  $H^s$  a  $\Psi(u(t+h)) - \Psi(u(t))$ , usar (17), posteriormente aplicar la desigualdad triangular, teniendo en cuenta que  $\mathbb{V}$  es un grupo unitario y que  $F$  aplica  $H^s$  en sí mismo. Finalmente, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue prueba este hecho. En efecto,

$$\begin{aligned}
 & \|\Psi u(t+h) - \Psi u(t)\|_s \\
 &= \left\| \mathbb{V}(t+h)\varphi + \int_0^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau)) \, d\tau \right. \\
 & \quad \left. - \mathbb{V}(t)\varphi - \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)F(u(\tau)) \, d\tau \right\|_s \\
 &= \left\| (\mathbb{V}(t+h) - \mathbb{V}(t))\varphi + \int_0^t (\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau))F(u(\tau)) \, d\tau \right. \\
 & \quad \left. + \int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau)) \, d\tau \right\|_s \\
 &\leq \|\mathbb{V}(t+h)\varphi - \mathbb{V}(t)\varphi\|_s + \left\| \int_0^t [\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau)]F(u(\tau)) \, d\tau \right. \\
 & \quad \left. + \int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau)) \, d\tau \right\|_s
 \end{aligned}$$

El primer término de la desigualdad va a cero cuando  $h$  va a 0 porque  $\mathbb{V}(t)$  es un grupo. Analizando el segundo termino de la desigualdad:

$$\left\| \underbrace{\int_0^t [\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau)] F(u(\tau)) \, d\tau}_A + \underbrace{\int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau)) \, d\tau}_B \right\|_s$$

Tomando la parte A:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau)] F(u(\tau))\|_s &\leq \|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))\|_s \\
 &\quad + \|\mathbb{V}(t-\tau)F(u(\tau))\|_s \\
 &\leq 2 \|F(u(\tau))\|_s, \quad s > 1/2
 \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau)] F(u(\tau))\|_s = 0$$

se concluye que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t \|\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau)] F(u(\tau)) \, d\tau\|_s = 0$$

Para la parte B, como  $\mathbb{V}$  es un grupo unitario se tiene:

$$\|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))\|_s \leq \|F(u(\tau))\|_s$$

como  $u \in \mathfrak{X}_s(T)$  entonces

$$\begin{aligned} \|u(\tau)\|_s &= \|u(\tau) - \mathbb{V}(t)\varphi + \mathbb{V}(t)\varphi\|_s \leq \|u(\tau) - \mathbb{V}(t)\varphi\|_s + \|\mathbb{V}(t)\varphi\|_s \\ &\leq M + \|\varphi\|_s, \end{aligned} \quad (18)$$

así,

$$\|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))\|_s \leq \|F(M + \|\varphi\|_s)\|_s$$

y por lo tanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_t^{t+h} \|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))\|_s d\tau = 0$$

**ii.** Se tiene que existe  $T_1 > 0$  tal que si  $0 < T \leq T_1$  y  $u \in \mathfrak{X}_s(T)$  entonces  $\Psi(u(t)) \in \mathfrak{X}_s(T)$ . En efecto, de la definición de  $\mathfrak{X}_s(T)$  en (16) y la desigualdad triangular implican que

$$\begin{aligned} \|\Psi(u(t)) - \mathbb{V}(t)\varphi\|_s &= \left\| \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)\varphi F(u(\tau)) d\tau \right\|_s \\ &\leq \int_0^t \|F(u(\tau))\|_s d\tau \\ &\leq \int_0^t L(\|u(t)\|_s, 0) \|u(t)\|_s d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

si  $u \in \mathfrak{X}_s(T)$  tenemos (18) y (19) se transforma en:

$$\begin{aligned} \|\Psi(v(\tau)) - \mathbb{V}(\tau)\varphi\|_s &\leq \int_0^t L(M + \|\varphi\|_s, 0)(M + \|\varphi\|_s) d\tau \\ &= L(M + \|\varphi\|_s, 0)(M + \|\varphi\|_s)t \\ &\leq L(M + \|\varphi\|_s, 0)(M + \|\varphi\|_s)T \end{aligned}$$

Eligiendo  $T_1 = \frac{M}{L(M + \|\varphi\|_s, 0)(M + \|\varphi\|_s)}$ , tenemos lo requerido.

**iii.** Existe  $T_2 > 0$  tal que si  $0 < T \leq T_2$ ,  $\Psi$  es una contracción en  $\mathfrak{X}_s(T)$ . En efecto, se aplica la norma de  $H^s$  a  $\Psi(u(t)) - \Psi(v(t))$ , posteriormente la desigualdad triangular, el lema 4, la definición de  $\mathfrak{X}_s(T)$  en (16) y se usa que  $\mathbb{V}$  es grupo para obtener:

$$\begin{aligned} \|\Psi(u(t)) - \Psi(v(t))\|_s &\leq \int_0^t \|F(u(\tau)) - F(v(\tau))\|_s d\tau \\ &\leq \int_0^t L(\|u(\tau)\|_s, \|v(\tau)\|_s) \|u(\tau) - v(\tau)\|_s d\tau \\ &\leq \int_0^t L(M + \|\varphi\|_s, M + \|\varphi\|_s) \|u(\tau) - v(\tau)\|_s d\tau \\ &\leq L(M + \|\varphi\|_s, M + \|\varphi\|_s) \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|_s d\tau \\ &\leq L(M + \|\varphi\|_s, M + \|\varphi\|_s) T d(v, w). \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

y escogiendo,

$$T_2 < \frac{1}{L(M + \|\varphi\|_s, M + \|\varphi\|_s)},$$

se obtiene que  $\Psi$  es una contracción en  $\mathfrak{X}_s$  si  $0 < T \leq \min\{T_1, T_2\}$ , de este modo *i*, *ii*, y *iii* implican el resultado.

**Teorema 6** *La solución obtenida en el Teorema (5) es única y depende continuamente del dato inicial  $\varphi$ .*

*Demostración.* Se supondrá que  $u, v \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$  son soluciones de (8) con datos iniciales  $\psi, \phi$  respectivamente. Aplicando la norma  $H^s$  a

$$u(t) - v(t) = \mathbb{V}(t)(\psi - \phi) + \int_0^t \mathbb{V}(t - \tau)[F(u(\tau)) - F(v(\tau))] d\tau,$$

se usa, la desigualdad triangular, el hecho de ser  $\mathbb{V}(t)$  un grupo unitario en  $H^s$  y el lema 4, para obtener:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_s &\leq \|\mathbb{V}(t)(\psi - \phi)\|_s + \int_0^t \|\mathbb{V}(t - \tau)[F(u(\tau)) - F(v(\tau))]\|_s d\tau \\ &\leq \|\psi - \phi\|_s + \int_0^t \|F(u(\tau)) - F(v(\tau))\|_s d\tau \\ &\leq \|\psi - \phi\|_s + \int_0^t L(\|u\|_s, \|v\|_s) \|u(\tau) - v(\tau)\|_s d\tau \\ &\leq \|\psi - \phi\|_s + L(\underbrace{\|u\|_{\infty, s}, \|v\|_{\infty, s}}_K) \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|_s d\tau \quad (20) \end{aligned}$$

La desigualdad de Gronwall aplicada a (20) implica la unicidad, pues

$$\|u(t) - v(t)\|_s \leq \|\psi - \phi\|_s e^{Kt} \quad (21)$$

La dependencia continua es consecuencia de la continuidad del tiempo de existencia de la solución de  $\|\varphi\|_s$ , de (16) y de (20) pero con  $K = L(\|\varphi\|_s + M, \|\varphi_n\|_s + M)$ , donde  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  en  $H^s$  y  $u_n$  en vez de  $v$ , donde  $u_n$  es la solución de (8) con dato inicial  $\varphi_n$ . Además de observar que para  $n$  suficientemente grande  $K < L(\|\varphi\|_s + M, 1 + \|\varphi\|_s + M)$ .

**Teorema 7** *El problema de valor inicial (8) es localmente bien planteado en  $H^s$  para  $s > 1/2$*

*Demostración.* Este resultado es consecuencia inmediata de los teoremas (5), (6) y el lema (4).

**Nota:** En el caso periódico, el teorema 7 es el mismo y su prueba es esencialmente la misma.

#### 4. El problema global

El objetivo de esta sección es establecer estimativas apriori de  $\|u\|_1$ , con el objetivo de obtener el buen planteamiento global de (1) en  $H^1(\mathbb{R})$ . Con esta claridad, se puede entender:

**Lema 8** Sean  $u, \varphi \in H^1(\mathbb{R})$  entonces se tiene

$$\|u\|_0 \leq c\|\varphi\|_0$$

*Demostración.* Se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_t \|u\|_0^2 &= \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2 dx = \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \overline{u(x, t)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) \overline{u(x, t)} + u(x, t) \overline{u_t(x, t)} dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(u_t(x, t) \overline{u(x, t)}) dx = 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) \overline{u(x, t)} dx \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{i}{2} u_{xx} + i|u|^2 u - (1 + ia)u - i\gamma \bar{u} \right) \bar{u} dx \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2} u_{xx} \bar{u} + i|u|^2 |u|^2 - (1 + ia)|u|^2 - i\gamma \bar{u}^2 dx \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{-i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |u_x|^2 dx + i \int_{-\infty}^{\infty} |u|^4 dx - \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx \right. \\ &\quad \left. - ia \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx - i\gamma \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{u})^2 dx \right] \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ - \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx - i\gamma \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{u})^2 dx \right] \\ &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx - 2 \operatorname{Re} \left[ i\gamma \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{u})^2 dx \right] \\ &\leq -2\|u\|_0^2 + 2 \operatorname{Re} \left[ i\gamma \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{u})^2 dx \right] \leq -2\|u\|_0^2 + 2 \left| \gamma \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{u})^2 dx \right| \\ &\leq -2\|u\|_0^2 + 2|\gamma| \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{u}|^2 dx \leq -2\|u\|_0^2 + 2|\gamma| \|u\|_0^2 \leq 2(|\gamma| - 1) \|u\|_0^2 \end{aligned}$$

Luego si  $\gamma \leq 1$  se obtiene que:

$$\|u\|_0^2 \leq \|\varphi\|_0^2$$

Pues si  $\partial_t \|u\|_0^2 \leq 0$  entonces  $\|u\|_0^2 \leq \|\varphi\|_0^2$ .

Si  $\gamma > 1$  entonces

$$\partial_t \|u\|_0^2 \leq 2(|\gamma| - 1) \|u\|_0^2$$

Integrando de 0 a  $t$

$$\begin{aligned}\|u\|_0^2 - \|\varphi\|_0^2 &\leq 2(|\gamma| - 1) \int_0^t \|u(\tau)\|_0^2 d\tau \\ \|u\|_0^2 &\leq \|\varphi\|_0^2 + 2(|\gamma| - 1) \int_0^t \|u(\tau)\|_0^2 d\tau\end{aligned}$$

Por tanto, debido a la desigualdad de Gronwall se puede concluir

$$\|u\|_0^2 \leq \|\varphi\|_0^2 e^{2t(|\gamma|-1)}$$

**Teorema 9** Si  $a \geq 0$  el problema es globalmente bien puesto en  $H^1(\mathbb{R})$

*Demostración.* Sea

$$E = \frac{1}{2} \int [|u_x|^2 + (1 - |u|^2)|u|^2 + \gamma \operatorname{Re}(u^2)] dx$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} + 2aE &= a\|u\|_{L^4}^4 \\ (e^{2at}E)' &= ae^{2at}\|u\|_{L^4}^4 \\ e^{2at}E(t) - E(0) &= a \int_0^t e^{2a\tau} \|u(\tau)\|_{L^4}^4 d\tau \\ e^{2at}E(t) &= E(0) + a \int_0^t e^{2a\tau} \|u(\tau)\|_{L^4}^4 d\tau \\ E(t) &= E(0)e^{-2at} + a \int_0^t e^{-2a(t-\tau)} (\|u(\tau)\|_{L^4}^4) d\tau\end{aligned}$$

Si  $a = 0$  entonces  $E(t) = E(0)$  y:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_x\|_0^2 &= \frac{1}{2} \int \{|u_x|^2 + (1 - |u|^2)|u|^2 + \gamma \operatorname{Re}(u^2)\} dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \{(1 - |u|^2)|u|^2 + \gamma \operatorname{Re}(u^2)\} dx \\ &= E(0) + \int \frac{|u|^4}{2} dx - \int \frac{|u|^2}{2} dx - \frac{\gamma}{2} \int \operatorname{Re}(u^2) dx \\ &\leq E(0) + \int \frac{|u|^4}{2} dx + \int \frac{|u|^2}{2} dx + \frac{|\gamma|}{2} \int |\operatorname{Re}(u^2)| dx \\ &\leq E(0) + \frac{1}{2} \int |u|^4 dx + \frac{1}{2} \|u\|_0^2 + \frac{|\gamma|}{2} \|u\|_0^2 \\ &\leq E(0) + \frac{|\gamma| + 1}{2} \|u\|_0^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^4}^4 \\ &\leq E(0) + \frac{|\gamma| + 1}{2} C_T \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^4}^4\end{aligned}$$

Estimando  $\|u\|_{L^4}^4$

$$\|u\|_{L^4}^4 \leq \|u_x\|_0^\theta \|u\|_0^{1-\theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \theta \left( \frac{1}{2} - 1 \right) + \frac{1-\theta}{2} \\ &= -\theta + \frac{1}{2} \\ \theta &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^4} &\leq \|u_x\|_0 \|u\|_0^3 \\ &\leq (\epsilon \|u_x\|_0) \left( \frac{1}{2} \|\varphi\|_0^3 \right) \\ &\leq \frac{\epsilon^2 \|u_x\|_0^2}{2} + \frac{1}{2\epsilon^2} \|\varphi\|_0^6 \end{aligned}$$

continuando

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_x\|_0^2 &\leq E(0) + \frac{|\gamma|+1}{2} C_T \|\varphi\|_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2} \|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} \|\varphi\|_0^6 \\ \left( \frac{1-\epsilon^2}{2} \right) \|u_x\|_0^2 &\leq E(0) + \frac{|\gamma|+1}{2} C_T \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} \|\varphi\|_0^6 \end{aligned}$$

Se escogió  $\epsilon$  suficientemente pequeño

$$\frac{1}{2} - \frac{\epsilon^2}{2} = \frac{1}{4}$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{4} \|u_x\|_0^2 \leq E(0) + \frac{|\gamma|+1}{2} C_T \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} \|\varphi\|_0^6$$

Ahora obsérvese cuando  $a > 0$

$$\begin{aligned} \left( \frac{1-\epsilon^2}{2} \right) \|u_x\|_0^2 &\leq E(0) e^{-2at} + \frac{|\gamma|+1}{2} C_T \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} \|\varphi\|_0^6 \\ &\quad + \left( \frac{a}{2\epsilon^2} \int_0^t e^{-2a(t-\tau)} d\tau \right) \|\varphi\|_0^6 \\ &\quad + \frac{a\epsilon^2}{2} \int_0^t e^{-2a(t-\tau)} \|u_x(\tau)\|_0^2 d\tau \end{aligned}$$

Como  $a \geq 0$ , se sabe que  $e^{-2a(t-\tau)} \leq 1$  e integrando se tiene:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1-\epsilon^2}{2} \right) \|u_x\|_0^2 &\leq E(0) e^{-2at} + \frac{|\gamma|+1}{2} C_T \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon^2} \|\varphi\|_0^6 \\ &\quad + \frac{1}{2\epsilon^2} \left( 1 + \frac{1-e^{-2at}}{2} \right) \|\varphi\|_0^6 + \frac{a\epsilon^2}{2} \int_0^t \|u_x(\tau)\|_0^2 d\tau \end{aligned}$$

Sea  $\left(\frac{1-\epsilon^2}{2}\right) = C_\epsilon$ , luego

$$\begin{aligned} \|u_x\|_0^2 &\leq \frac{1}{C_\epsilon} \left[ E(0)e^{-2at} + \frac{|\gamma|+1}{2} C_T \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|\varphi\|_0^6 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\epsilon^2} \left( 1 + \frac{1-e^{-2at}}{2} \right) \|\varphi\|_0^6 \right] + \frac{a\epsilon^2}{2} \int_0^t \|u_x(\tau)\|_0^2 d\tau \\ &= \frac{1}{C_\epsilon} \left[ E(0)e^{-2at} + \frac{|\gamma|+1}{2} C_T \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|\varphi\|_0^6 \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{2\epsilon} \left( 1 + \frac{1-e^{-2at}}{2} \right) \|\varphi\|_0^6 \right] = C(\varphi) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|u_x\|_0^2 \leq C(\varphi) + K \int_0^t \|u_x(\tau)\|_0^2 d\tau$$

Ahora bien, aplicando Gronwall se tiene que:

$$\|u_x\|_0^2 \leq C(\varphi)e^{Kt}$$

Si  $a < 0$  entonces

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} + 2aE &\leq 0 \\ \frac{dE}{dt} &\leq -2aE(t) \\ E(t) &\leq E(0) + (-2a) \int_0^t E(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Aplicando Gronwall se obtiene:

$$E(t) \leq E(0)e^{-2at}.$$

## 5. Teoría en $L^2(\mathbb{R})$

En esta sección se estudia el buen planteamiento global de (1) en  $L^2(\mathbb{R})$

**Lema 10** Si  $t \neq 0$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  y  $q \in [1, 2]$  entonces se tiene que

$$\mathbb{V}(t) = e^{it\Delta} : L^q(\mathbb{R}) \mapsto L^p(\mathbb{R})$$

es continua y

$$\|e^{it\Delta} f\|_p \leq C|t|^{\frac{-1}{2(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}} \|f\|_q$$

*Demostración.* Ver [7]

**Teorema 11** *El grupo  $\{\mathbb{V}(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$  satisfacen:*

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbb{V}(t)f\|_p^q dt \right)^{1/q} \leq c \|f\|_2, \quad (22)$$

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot, \tau) d\tau \right\|_p^q dt \right)^{1/q} \leq c \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|g(\cdot, t)\|_{p'}^{q'} dt \right)^{1/q'}, \quad (23)$$

y

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{V}(t)g(\cdot, \tau) dt \right\|_2 \leq c \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|g(\cdot, t)\|_{p'}^{q'} dt \right)^{1/q'}, \quad (24)$$

con  $2 \leq p \leq \infty$  y  $\frac{2}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$  donde  $c = c(p)$  es una constante que depende sólo de  $p$ . Se usará la notación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$$

*Demostración.* Ver [7].

**Teorema 12** *Si  $u \in L^2(\mathbb{R})$  existe  $T = T(\|\varphi\|_0) > 0$  y una única solución  $u$  de la ecuación integral (10) en  $[-T, T]$  con*

$$u \in C([-T, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap L^8([-T, T]; L^4(\mathbb{R})) \quad (25)$$

*Además, para todo  $T' < T$  existe una vecindad  $V$  de  $\varphi$  en  $L^2(\mathbb{R})$  tal que*

$$\mathbb{F} : V \mapsto C([-T', T']; L^2(\mathbb{R})) \cap L^8([-T, T]; L^4(\mathbb{R})),$$

$$\tilde{\varphi} \mapsto \widetilde{u(t)},$$

*es Lipschitz.*

*Demostración.* Para esta demostración, es importante considerar el espacio métrico completo

$$E(T, b) = \left\{ u \in C([-T, T], L^2(\mathbb{R})) \cap L^8([-T, T], L^4(\mathbb{R})) : \right. \\ \left. |||u|||_T = \sup_{[-T, T]} \|v(t)\|_0 + \left( \int_{-T}^T \|v(t)\|_{L^4}^8 dt \right)^{1/8} \leq b \right\}$$

dotado de la métrica

$$d(u, v) = |||u - v|||_T.$$

Por tanto obsérvese que si se elige  $T > 0$  adecuadamente se obtiene que

$$\Psi : E(T, b) \longrightarrow E(T, b)$$

es una contracción; donde  $\Psi$  está dada por

$$\Psi(u) = e^{\frac{it\partial_x^2}{2}}\varphi + \int_0^t e^{\frac{i(t-\tau)\partial_x^2}{2}}(i|u|^2u + (1+ia)u + i\gamma\bar{u}) d\tau \quad (26)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^T \|\Psi(u)\|_{L^4}^8 dt \right)^{1/8} \\ & \leq \left( \int_0^T \|e^{\frac{it\partial_x^2}{2}}\varphi\|_{L^4}^8 dt \right)^{1/8} + \left( \int_0^T \left\| \int_0^t e^{\frac{i(t-\tau)\partial_x^2}{2}} F(u(\tau)) d\tau \right\|_{L^4}^8 dt \right)^{1/8} \end{aligned}$$

Tomando en el teorema 11 con  $p = 4$  y  $q = 8$  se tiene entonces que  $p' = \frac{4}{3}$  y  $q' = \frac{8}{7}$  y por las desigualdades (22) y (24) se obtiene:

$$\begin{aligned} \left( \int_0^T \|\Psi(u)\|_{L^4}^8 dt \right)^{1/8} & \leq \|\varphi\|_0 + \underbrace{\left\| \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)i|u|^2u d\tau \right\|_{L_x^4 L_t^8}}_C \\ & \quad + \underbrace{\left\| \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)(1+ia)u + i\gamma\bar{u} d\tau \right\|_{L_x^4 L_t^8}}_D \end{aligned}$$

Analizando  $C$ , se tiene que:

$$\| |u|^2u \|_{L^{4/3}} = \left( \int \| |u|^2u \|_{L^{4/3}}^4 \right)^{3/4} = \left( \int |u|^4 \right)^{3/4} = \|u\|_{L_x^4}^3 \quad (27)$$

Analizando  $D$ , sea  $g(x, \tau) = (1+ia)u + i\gamma\bar{u}$  entonces:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)(1+ia)u + i\gamma\bar{u} d\tau \right\|_{L_x^4 L_t^8} & = \left\| \int_0^T \mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot, \tau)\chi_{[0,t]} d\tau \right\|_{L_x^4 L_t^8} \\ & \leq \left\| \int_0^T \chi_{[0,t]} \|\mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot, \tau)\|_{L_x^4} d\tau \right\|_{L_T^8} \\ & \leq \int_0^T \|\chi_{[0,t]}\| \|\mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot, \tau)\|_{L_x^4} \|1\|_{L_T^8} d\tau \\ & \leq \int_0^T \|\mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot, \tau)\|_{L_x^4 L_T^8} d\tau \\ & \leq \int_0^T \|\mathbb{V}(t)\mathbb{V}(-\tau)g(\cdot, \tau)\|_{L_x^4 L_T^8} d\tau \\ & \leq C(a, \lambda) \int_0^T \underbrace{\|g(\cdot, \tau)\|_0}_{\|u\|_0} d\tau \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left( \int_0^T \|\Psi(u)\|_{L^4}^8 dt \right)^{1/8} &= \|\Psi(u)\|_{L_x^4 L_T^8} \\ &\leq \underbrace{\|\varphi\|_0 + \left( \int_0^T (\|u(t)\|_{L_x^4}^3)^{8/7} dt \right)^{7/8}}_E + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 d\tau \end{aligned}$$

Aplicando Hölder a  $E$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \left( \int_0^T \|u(t)\|_{L_x^4}^{24/7} dt \right)^{7/8} &\leq \left[ \left( \int_0^T 1^{7/4} dt \right)^{4/7} \left( \int_0^T \|u(\tau)\|_{L_x^4}^8 d\tau \right)^{3/7} \right]^{7/8} \\ &\leq \left( \int_0^T dt \right)^{1/2} \left( \int_0^T \|u(\tau)\|_{L_x^4}^8 d\tau \right)^{3/8} \\ &\leq T^{1/2} \left( \int_0^T \|u(\tau)\|_{L_x^4}^8 d\tau \right)^{3/8} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \|\Psi(u)\|_{L_x^4 L_T^8} &\leq \|\varphi\|_0 + T^{1/2} \left( \int_0^T \|u(\tau)\|_{L_x^4}^8 d\tau \right)^{3/8} + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 d\tau \\ &\leq \|\varphi\|_0 + T^{1/2} \|u(\tau)\|_{L_x^4 L_T^8}^3 + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 d\tau \end{aligned}$$

Entonces, si  $u \in E(T, b)$  se tiene:

$$\|\Psi(u)\|_{L_x^4 L_T^8} \leq \|\varphi\|_0 + T^{1/2} b^3 + Tb \quad (28)$$

Usando (24) y las propiedades del grupo unitario en la expresión (26), se puede obtener:

$$\begin{aligned}
 \|\Psi(u)\|_0 &\leq \|\varphi\|_0 + \left\| \int_0^T \mathbb{V}(t-\tau) i|u|^2 u \, d\tau \right\|_0 \\
 &\quad + \left\| \int_0^T \mathbb{V}(t-\tau) (1+ia)u + \gamma \bar{u} \, d\tau \right\|_0 \\
 &\leq \|\varphi\|_0 + \left( \int_0^T \| |u|^2 u \|_{L^{4/3}}^{8/7} \, d\tau \right)^{7/8} + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 \, d\tau \\
 &\leq \|\varphi\|_0 + \left( \int_0^T \|u\|_{L^4}^{24/7} \, d\tau \right)^{7/8} + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 \, d\tau \\
 &\leq \|\varphi\|_0 + T^{1/2} \|u\|_{L_x^4 L_T^8}^3 + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 \, d\tau \\
 \sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0 &\leq \|\varphi\|_0 + \sqrt{T} \|u\|_{L_x^4 L_T^8}^3 + T \sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0 \\
 \sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0 &\leq \|\varphi\|_0 + \sqrt{T} b^3 + Tb
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \|\Psi(u)\|_{L_x^4 L_T^8} + \sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0 &\leq 2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T} \|u\|_{L_x^4 L_T^8}^3 + 2T \sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0 \\
 &\leq 2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T} b^3 + 2Tb \leq b
 \end{aligned}$$

Así,

$$|||\Psi(u)|||_T \leq 2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T} b^3 + 2Tb \leq b$$

Si  $b = 3\|\varphi\|_0$  y tomando  $T > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
 |||\Psi(u)|||_T &\leq 2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T} (3\|\varphi\|_0)^3 + 2T(3\|\varphi\|_0) \leq 3\|\varphi\|_0 \\
 2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T} (3\|\varphi\|_0)^3 + 2T(3\|\varphi\|_0) &\leq 3\|\varphi\|_0 \\
 2\|\varphi\|_0 + 54\sqrt{T} \|\varphi\|_0^3 + 6T\|\varphi\|_0 &\leq 3\|\varphi\|_0 \\
 54\sqrt{T} \|\varphi\|_0^3 + 6T\|\varphi\|_0 &\leq \|\varphi\|_0 \\
 54\sqrt{T} \|\varphi\|_0^2 + 6T &\leq 1 \\
 54\sqrt{T} \|\varphi\|_0^2 + 6T - 1 &\leq 0 \\
 \sqrt{T} &\leq \frac{-54\|\varphi\|_0^2 + \sqrt{(54)^2 \|\varphi\|_0^4 + 24}}{12} \\
 T &\leq \left( \frac{-54\|\varphi\|_0^2 + \sqrt{(54)^2 \|\varphi\|_0^4 + 24}}{12} \right)^2
 \end{aligned} \tag{29}$$

entonces  $\Psi(u) \in E(T, b)$ ; por lo tanto la aplicación  $\Psi$  está bien definida sobre  $E(T, b)$ .

Ahora si  $u, v \in E(T, b)$

$$(\Psi(u) - \Psi(v))(t) = \int_0^t \mathbb{V}(t - \tau) [(i|u|^2 u + (1 + ia)u + i\gamma \bar{u}) - (i|v|^2 v + (1 + ia)v + i\gamma \bar{v})] d\tau$$

entonces

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^T \|(\Psi(u) - \Psi(v))(t)\|_4^8 dt \right)^{1/8} \\ & \leq \left( \int_0^T \left\| \int_0^t \mathbb{V}(t - \tau) (i|u|^2 u + (1 + ia)u + i\gamma \bar{u}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (i|v|^2 v + (1 + ia)v + i\gamma \bar{v}) d\tau \right\|_{L_x^4}^8 dt \right)^{1/8} \\ & \leq \left\| \int_0^t \mathbb{V}(t - \tau) i(|u|^2 u - |v|^2 v) \right. \\ & \quad \left. + (1 + ia)(u - v) + i\gamma(\bar{u} - \bar{v}) d\tau \right\|_{L_x^4 L_t^8} \\ & \leq \underbrace{\left\| \int_0^T \mathbb{V}(t - \tau) (i|u|^2 u - i|v|^2 v) d\tau \right\|_{L_x^4 L_T^8}}_F \\ & \quad + \underbrace{\left\| \int_0^T \mathbb{V}(t - \tau) (1 + ia)(u - v) + i\gamma(\bar{u} - \bar{v}) d\tau \right\|_{L_x^4 L_t^8}}_G \end{aligned} \quad (30)$$

Analizando  $F$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \| |u|^2 u - |v|^2 v \|_4 & \leq \|u - v\|_4 \left( \|u\|_4^2 + \frac{\|u\|_4^2}{2} + \frac{\|v\|_4^2}{2} + \|v\|_4^2 \right) \\ & \leq \|u - v\|_4 \left( \frac{3}{2} \|u\|_4^2 + \frac{3}{2} \|v\|_4^2 \right) \\ & = \frac{3}{2} (\|u\|_{L^4}^2 + \|v\|_{L^4}^2) \|u - v\|_{L^4} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^T \mathbb{V}(t - \tau) (i|u|^2 u - i|v|^2 v) d\tau \right\|_{L_x^4 L_T^8} \\ & \leq \left( \frac{3}{2} \int_0^T (\|u\|_{L^4}^2 + \|v\|_{L^4}^2)^{8/7} \|u - v\|_{L^4}^{8/7} dt \right)^{7/8} \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando Hölder se tiene que:

$$\begin{aligned} &\leq C \left\{ \int_0^T (\|u\|_{L^4}^8 dt)^{1/4} + \int_0^T (\|v\|_{L^4}^8 dt)^{1/4} \right\} \int_0^T (\|u - v\|_{L^4}^8 dt)^{1/8} \\ &\leq C\sqrt{T}b^2 \int_0^T (\|u - v\|_{L^4}^8 dt)^{1/8} \end{aligned}$$

Analizando  $G$ , Sea  $h(x, t) = (1 + ia)(u - v) + i\gamma(\bar{u} - \bar{v})$  entonces:

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t \mathbb{V}(t - \tau) [(1 + ia)(u - v) + i\gamma(\bar{u} - \bar{v})] d\tau \right\|_{L_x^4 L_t^8} \\ &= \left\| \int_0^t \mathbb{V}(t - \tau) h(\cdot, \tau) \chi_{[0, t]} d\tau \right\|_{L_x^4 L_t^8} \\ &\leq \left\| \int_0^T \chi_{[0, t]} \|\mathbb{V}(t - \tau) h(\cdot, \tau)\|_{L_x^4} d\tau \right\|_{L_T^8} \\ &\leq \int_0^T \|\chi_{[0, t]} \|\mathbb{V}(t - \tau) h(\cdot, \tau)\|_{L_x^4}\|_{L_T^8} d\tau \\ &\leq \int_0^T \|\mathbb{V}(t - \tau) h(\cdot, \tau)\|_{L_x^4 L_T^8} d\tau \\ &\leq \int_0^T \|\mathbb{V}(t) \mathbb{V}(-\tau) h(\cdot, \tau)\|_{L_x^4 L_T^8} d\tau \\ &\leq \int_0^T \|h(\cdot, \tau)\|_0 d\tau \\ &= \int_0^T \|(1 + ia)(u - v) + i\gamma(\bar{u} - \bar{v})\|_0 d\tau \\ &\leq \int_0^T \|(1 + ia)(u - v)\|_0 d\tau + \int_0^T \|i\gamma(\bar{u} - \bar{v})\|_0 d\tau \\ &\leq (|1 + ia| + |\gamma|) \int_0^T \|u - v\|_0 d\tau \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} &\left( \int_0^T \|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{L^4}^8 dt \right)^{1/8} = \|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{L_x^4 L_T^8} \\ &\leq C\sqrt{T}b^2 \int_0^T (\|u - v\|_{L^4}^8 dt)^{1/8} + (|1 + ia| + |\gamma|) \int_0^T \|u - v\|_0 d\tau \\ &\leq C\sqrt{T} \|u - v\| + CT \|u - v\| \end{aligned}$$

Combinando (24) y las propiedades de un grupo unitario se observa que:

$$\sup_{[0, T]} \|(\Psi(u) - \Psi(v))(t)\|_0 \leq (C\sqrt{T} + CT) \|u - v\|$$

Finalmente, por medio de la escogencia de  $b$ , de la desigualdad (29) se concluye que:

$$C\sqrt{T}b^2 \leq C\sqrt{T}\|\varphi\|_0^2 < 1$$

Así,

$$T \simeq \|\varphi\|_0^{-4}$$

Se ha probado la existencia, unicidad y regularidad de la solución de la ecuación (9). Para probar la continuidad de  $\Psi(u) = \Psi(\varphi)$  con respecto a  $\varphi$ , es importante observar que si  $u, v$  son las soluciones de (9) correspondientes a los datos  $\varphi, \phi$  entonces

$$u(t) - v(t) = e^{\frac{it\partial_x^2}{2}}(\varphi - \phi) + \int_0^t e^{\frac{i(t-\tau)\partial_x^2}{2}}(i|u|^2u + (1+ia)u + i\gamma\bar{u}) d\tau$$

y así con el mismo argumento usando en (30) se tiene que

$$\left( \int_0^T \|u(t) - v(t)\|_{L^4}^8 dt \right)^{1/8} \leq C\|\varphi - \phi\| + K\sqrt{T}(\|\varphi\|_0^2 + \|\phi\|_0^2)$$

En consecuencia, si  $\|\varphi - \phi\|_0$  es suficientemente pequeño, entonces

$$\left( \int_0^T \|u(t) - v(t)\|_{L^4}^8 dt \right)^{1/8} \leq K\|\varphi - \phi\|_0$$

En forma análoga también se puede probar que

$$\sup_{[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_0 \leq K\|\varphi - \phi\|_0$$

lo cual completa la prueba del teorema.

**Teorema 13** Si  $u_0 \in L^2$  entonces (1) es globalmente bien planteado.

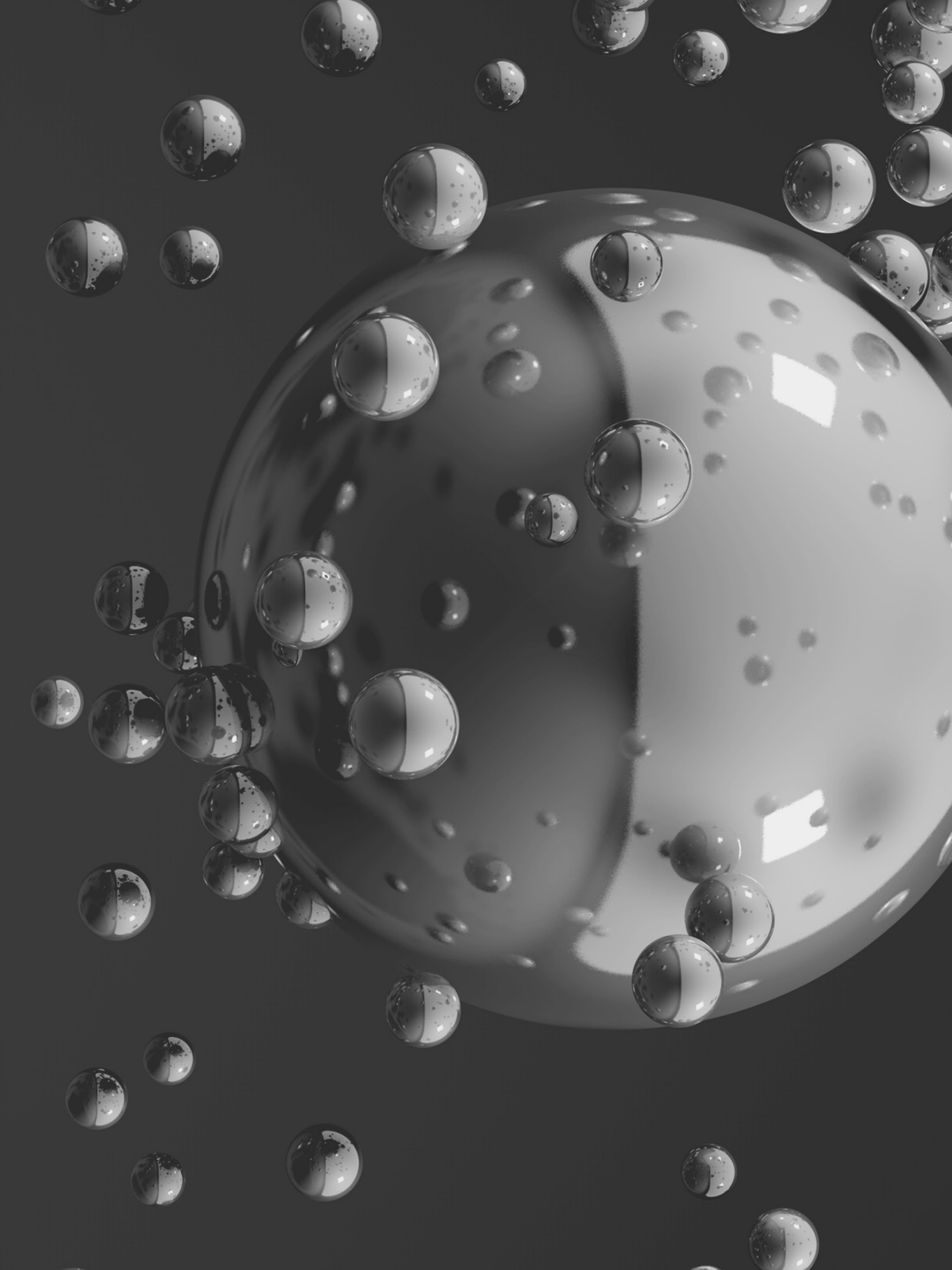
*Demostración.* Es consecuencia del teorema anterior y de  $\|u\|_0 \leq \|\varphi\|_0$ .

Este tipo de resultado en el caso periódico no fue posible obtenerlo con este tipo de técnica, pues no tiene estimativas del tipo  $L_p L_q$ .

## Referencias

- [1] Promislow K., Kutz J. N.: Bifurcation and asymptotic stability in the large detuning limit of the optimal parametric oscillator, *Nonlinearity* 13, (2000), pp.675-698.
- [2] Duoandikoetxea J.: Análisis de Fourier, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, (1991).
- [3] Rafael. J. Iório, Jr., Valéria de Magalhães Iório: *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge studies in advanced mathematics, 70, (2001).

- [4] Ponce G.:, Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales de evolución. Universidad del Valle, Escuela de verano en ecuaciones diferenciales, geometría diferencial y análisis numérico, 1993.
- [5] Wang X.: Parametrically excited nonlinear waves and their localizations. Phys. D 154, (2001), 337-359
- [6] Chang P. A. C. , Promislow K.: Nonlinear stability of oscillatory pulses in the parametric nonlinear Schrödinger equation. Nonlinearity, 20, (2007), pp. 743-763.
- [7] Linares F., Ponce G.: Introduction to nonlinear dispersive equations. Springer, Universitext, (2009).



# Diseño de herramientas que fomentan el aprendizaje de matemáticas con ayuda de *Mathematica 10*

## Design of Tools that Promote Math Learning by Using *Mathematica 10*

Camilo Andrés Ramírez\*

Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas,  
Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano,  
Bogotá, Colombia.

FECHA DE ENTREGA: 13 DE ENERO DE 2015  
FECHA DE EVALUACIÓN: 16 DE MARZO DE 2015  
FECHA DE APROBACIÓN: 24 DE ABRIL DE 2015

**Resumen** En este artículo se presenta el desarrollo y avances del proyecto “Diseño e implementación de objetos virtuales y dinámicos en el aprendizaje de matemáticas” correspondiente a la elaboración de una serie de programas con el objeto de ampliar las herramientas que apoyan a estudiantes y docentes, y orientan el curso de Matemáticas de la Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano. En primera instancia se muestra el marco teórico que fundamenta el desarrollo del proyecto identificando las problemáticas y posibles vías de acción, seguido de esto se da una breve introducción al programa trabajado y los productos esperados. Finalmente se muestra el desarrollo y algunos avances en el proceso de implementación donde las evidencias sugieren que con estas herramientas se logra acercar un poco al estudiante (no a todos) a la comprensión de los conceptos matemáticos.

**Abstract** This article presents the development and progress of the project “Design and Implementation of Virtual and Dynamic Objects when Learning Math”. This project is part of a series of programs that search for enhancing of tools that support math students and teachers at

---

\* Docente de matemáticas con énfasis en Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional y Magister en Matemática Aplicada de la Universidad Nacional de Colombia, con una formación pedagógica y disciplinar para el desempeño en la educación matemática en básica, media y universitaria. Conocimientos avanzados en el área de sistemas, programación, *software* matemático y manejo de plataformas de aprendizaje virtual. Amplia experiencia en la planeación, organización y estructuración de congresos y encuentros de educación matemática. Actualmente es docente de planta del Politécnico Grancolombiano en donde se especializa en la tutoría, administración y logística de módulos del área de matemáticas en la modalidad de educación virtual. [caramirezs@poligran.edu.co](mailto:caramirezs@poligran.edu.co)

Politécnico Grancolombiano University Institution. Initially, we showed the theoretical framework that is the foundation of the project by identifying the problem and possible ways to follow. After this, we introduced the program and the expected products. Finally, we presented the development and the improvement of the implementation process. Here, the evidence suggests that it is possible to make most of students understand mathematical concepts by using these tools.

**Palabras Clave:** aprendizaje significativo, interactividad, matemáticas, educación matemática, *applet*, apoyo académico.

**Keywords:** meaningful learning, interactivity, math, math learning, *applet*, academic support.

## 1. Introducción

El origen de este proyecto está relacionado con varias problemáticas específicas del curso, aspectos curriculares, sociales y herramientas innovadoras que llevaron a reflexionar sobre la necesidad de justificar y realizar programas que propicien una nueva metodología de clase en el curso de Matemáticas que se imparte en la institución.

El diseño de las herramientas que se muestran en este artículo, se enmarca en un proyecto de investigación más amplio que contempla, además de esta fase, una fase de implementación, una de medición de las herramientas en cursos pilotos y una fase de evaluación de esta propuesta, en contraste a los cursos tradicionales.

Actualmente la Institución cuenta con un curso de Matemáticas I para todos los estudiantes, el cual parte del reconocimiento de las matemáticas como herramienta en la vida cotidiana. Este curso se creó para ofrecer un espacio para que el estudiante confronte, revise y modifique lo que cree que sabe, lo que cree que significa estudiar y lo que cree que significa aprender. El logro fundamental de esta asignatura es brindar experiencias que permitan el aprendizaje comprensivo de conceptos matemáticos, el aprendizaje de mecanismos y estrategias para aprender matemáticas y establecer habilidades básicas de matemáticas.

En lo que sigue (sección 2), se resume el marco teórico y el problema de investigación. En la sección 3 se describe la metodología de trabajo, el programa utilizado para su diseño y la descripción y propiedades de los productos finales. En la sección 4 se muestran los avances en la implementación de los programas en un curso piloto y las primeras experiencias. Actualmente el proyecto está en curso y aún no se tienen resultados evaluativos. En las últimas secciones se analiza la idoneidad de la propuesta basada en los resultados parciales de la investigación, así como también se identifican las limitaciones y mejoras potenciales de esta y se termina con una síntesis de la experiencia.

## 2. Marco teórico

Actualmente se puede afirmar que casi todos los fenómenos físicos y situaciones cotidianas se relacionan con “lo que cambia y lo que varía”, y es por esta razón que

se deben desarrollar competencias necesarias en los estudiantes para “entender y controlar el mundo cambiante en el que vivimos” [8]. El reto de la educación actual debe ser conseguir una enseñanza de las matemáticas cognitivamente eficiente. Las tecnologías y *software* educativos han permitido dar un gran paso en este reto [6,9].

Las funciones que desempeñan los materiales manipulativos (tangibles o gráfico-textuales) en el aprendizaje de la matemática, se fundamenta en teorías que dan un peso importante a las relaciones entre el lenguaje y el pensamiento, y conceden gran relevancia a los medios de expresión en el estudio de las matemáticas [4].

Así mismo, diversas investigaciones están demostrando que los estudiantes pueden aprender más matemáticas y de manera más profunda con el uso de una tecnología apropiada sin llegar a cometer el error de usarla como sustituto de intuiciones y comprensiones conceptuales. Los recursos tecnológicos se deben usar de manera amplia y responsable con el fin de enriquecer el aprendizaje matemático de los estudiantes [4].

Por lo anterior, se fundamenta que el uso de la tecnología en el aula de clase juega un papel cuya importancia se ha incrementado en los últimos años; específicamente en el aprendizaje de las matemáticas, los instrumentos tecnológicos (como calculadoras graficadoras, tablets, computadoras o *software* específicos de matemáticas) están permitiendo evaluar nuevamente el currículo porque anteriormente, gran parte (o todo) del peso de la enseñanza estaba en desarrollar competencias operativas y algorítmicas, y se dejaba de lado el desarrollo de competencias comprensivas y conceptuales [1,3].

El desarrollo del pensamiento matemático visto desde el punto de vista de competencias requiere enfocarse de manera diferente en el tratamiento procedimental y brindar a los estudiantes más espacios de acompañamiento en los procesos cognitivos y conceptuales [5]. El uso de la tecnología juega un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas y en el aprendizaje procedimental de los conceptos matemáticos [2], actualmente existe un *software* matemático que permite desarrollar objetos dinámicos que potencien la construcción de conceptos matemáticos en el estudiante.

## 2.1. El problema de investigación

Actualmente los problemas frecuentes en los cursos de matemáticas y en los procesos de enseñanza de esta área, se centran en el gran número de estudiantes y la poca disposición que tienen para afrontar el curso responsablemente. Muchos de los estudiantes que toman alguna asignatura de Ciencias Básicas (matemáticas, cálculo, álgebra lineal, estadística, física, química, etc) llegan con una predisposición negativa a la asignatura; por un lado están los estudiantes que durante todo el curso refuerzan esa disposición negativa y apática, lo cual les impide aprovechar las actividades y herramientas que el curso ofrece; y por otro lado están aquellos estudiantes que encuentran un apoyo fundamental en el docente, las herramientas y actividades del curso para afrontar la problemática y la apatía satisfactoriamente.

Entre los factores que inciden en el logro de los estudiantes, tanto en matemáticas como en otras áreas, han sido los objetos virtuales y las herramientas informáticas de apoyo; más específicamente, las herramientas informáticas que pueden ajustarse al nivel del estudiante y darles retroalimentación [5,7]. Dicho lo anterior, el problema de investigación consiste en diseñar herramientas tecnológicas que incidan positivamente en la disposición del estudiante a la materia y en el aprendizaje de los conceptos de ésta.

## 2.2. La herramienta

En la comunidad académica existen gran variedad de *software* y lenguajes de programación que permiten el diseño de programas (por ejemplo *Maple 17*, *Mathematica 10*, *Matlab*, *java*, *C++* entre otros), se ha optado por utilizar el programa *Mathematica 10* pues este posee un potente lenguaje de programación funcional y la característica de compilar programas en documentos dinámicos y manipulables con una interfaz de usuario cómoda y fácil de trabajar. Así mismo posee un gran y número de funciones matemáticas que facilita la elaboración de los programas específicos de esta área incluso para aquellos que no están familiarizados con algún lenguaje de programación.

*Mathematica 10* exporta los programas en el formato cdf (*Computable Document Format*), y para poder ejecutarlos es necesario descargar el plugin “cdf player” el cual es gratuito y se encuentra disponible para cualquier sistema operativo. Los programas desarrollados son de libre licenciamiento, lo cual permite que cualquier persona pueda tener acceso a estos.

## 3. Método

El desarrollo de la investigación se dividió en dos partes, la primera se enfocó en desarrollar herramientas tecnológicas para el docente en el aula y para el estudiante en los momentos de trabajo individual o grupal que motiven el desarrollo de los conceptos matemáticos abordados en la materia:

- Conjunto numéricos (números naturales, enteros, racionales y reales)
- Ecuaciones
- Inecuaciones
- Función lineal y cuadrática

La segunda parte (aunque aún no se ha comenzado) mide la eficacia de las herramientas mediante la implementación de estas en cursos pilotos, comparando los resultados finales con los cursos convencionales.

Para el desarrollo de la primera parte se comenzó con un estudio bibliográfico acerca de la epistemología, didáctica y problemas de enseñanza de los conceptos y competencias matemáticas abordados en el currículo de la asignatura.

Con estos insumos pedagógicos, se procedió a realizar reuniones semanales con el grupo de trabajo en donde se estudió un concepto matemático (por ejemplo, sistemas numéricos) y se identificaron las principales dificultades y problemáticas

específicas de los estudiantes de la institución, con estos datos se procedió a trabajar en la creación del programa. El desarrollo de cada programa tuvo una duración de 15 a 20 días, lo cual permitió que en una reunión posterior fuera evaluado por el grupo de trabajo su utilidad y se realizaran las correcciones necesarias.

Iniciando el segundo semestre se brindó con algunos programas que fueron utilizados en el aula de clase, esto ofreció la primera aproximación al estudiante y se pudo trabajar en las correcciones necesarias. Afortunadamente se pudieron aplicar todos los programas, lo cual brindó valiosa información e hizo que algunos de estos se modificaran para la versión final.

Finalizando el año se hará la entrega de los productos finales y se comenzará a organizar la puesta en marcha de la segunda fase.

## 4. Desarrollo y experiencia en la implementación

En total se desarrollaron 14 programas que abordaron los principales conceptos de la materia, así:

1. Números naturales y enteros
2. Números reales
3. Expresiones algebraicas
4. Potenciación
5. Factorización
6. Ecuaciones de primer grado
7. Ecuación cuadrática
8. Ecuación no lineal, no cuadrática
9. Inecuaciones lineales
10. Inecuaciones no lineales
11. Concepto de función
12. Transformaciones de funciones
13. Función lineal
14. Función cuadrática

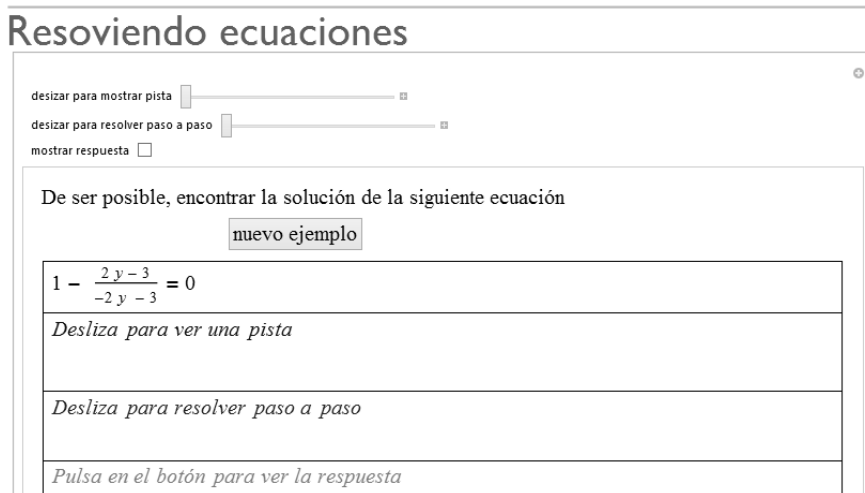
Todo programa consta de una variedad de ejercicios aleatorios, una ayuda “paso a paso” para que el estudiante se centre en los procesos que generen mayor dificultad y una retroalimentación del desarrollo completo del ejercicio.

A continuación se presentan cuatro programas desarrollados e implementados en un curso piloto de la asignatura de Matemáticas de la Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano.

### 4.1. Ecuación no lineal, no cuadrática

A comienzo del segundo corte, se comenzó a trabajar con problemas cuya solución se abordó con el uso de ecuaciones. El objetivo era que el estudiante interiorizara los procedimientos algorítmicos para enfrentarse a cualquier tipo de ecuación y pudiera encontrar, de ser posible, las respectivas soluciones. Para ello, se

desarrollaron tres programas: uno para ecuaciones lineales, otro para ecuaciones cuadráticas y el último para ecuaciones no lineales y no cuadráticas. En la figura 1 se muestra la interfaz gráfica del último programa.



**Figura 1.** Resolviendo ecuaciones

Como se puede ver, al trabajar con expresiones racionales se le exigió al estudiante repasar conceptos previamente abordados como operaciones, simplificación de expresiones racionales y exclusiones de elementos que no pertenecían al conjunto solución, así como también categorizar el tipo de ecuación que queda al simplificar la expresión.

Para ayudar al estudiante a interiorizar estos procesos, se les dotó de un programa con dos barras de deslizamiento: la primera ayuda al estudiante recordando los pasos vistos en clase al abordar este tipo de ecuaciones, la segunda ayuda al estudiante resolviendo la ecuación paso a paso, ya que la solución se puede realizar de muchas maneras. Este programa le recuerda al estudiante que los pasos mostrados no son la única vía de solución y que es probable resolverla de otro modo. Lo importante es que la respuesta debe ser la misma.

Debajo de las barras de ayuda está la opción de mostrar o no la respuesta, en la figura 2 se muestra el programa con todas las ayudas y la respuesta activa.

El botón “nuevo ejemplo” cambia el ejercicio, el programa está diseñado para que el estudiante repase gran variedad de este tipo de ecuaciones haciendo poco probable que el ejercicio se repita.

## Resolviendo ecuaciones

deslizar para mostrar pista ☐
 deslizar para resolver paso a paso ☐
 mostrar respuesta ☒

De ser posible, encontrar la solución de la siguiente ecuación

nuevo ejemplo

$$1 - \frac{2y-3}{-2y-3} = 0$$

*Pista:*

|                                                                                                                   |                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Analizar los denominadores para determinar las restricciones, de ser posible, factorizar los denominadores.    | 5. Simplificar lo que más se pueda el denominador, operar términos semejantes.          |
| 2. Agrupar todos los términos a un lado (igualar a cero).                                                         | 6. Utilizar la propiedad: Si $\frac{b}{c} = 0$ , entonces $b = 0$ .                     |
| 3. Identificar el denominador común de las fracciones y amplificarlas para que todas tengan el mismo denominador. | 7. Resolver la ecuación resultante, esta debe ser lineal o cuadrática.                  |
| 4. Sumar o restar las fracciones, tener cuidado con el cambio de signo en las restas.                             | 8. Verificar las soluciones y tener cuidado con que no sea alguna de las restricciones. |

*paso a paso:*

|                                                            |                           |
|------------------------------------------------------------|---------------------------|
| > $1 - \frac{2y-3}{-2y-3} = 0$                             | > $\frac{-4y}{-2y-3} = 0$ |
| > $\frac{1 \cdot (-2y-3)}{-2y-3} - \frac{2y-3}{-2y-3} = 0$ | > $-4y = 0$               |
| > $\frac{-2y-3 - (2y-3)}{-2y-3} = 0$                       | {y → 0}                   |

{y → 0}

Figura 2. Resolviendo ecuaciones

### 4.2. Inecuación no lineal

De un modo similar al que se utilizó para desarrollar las ecuaciones, se comenzó con el desarrollo de problemas que involucraran el uso de intervalos para hallar la respuesta, pues en este caso pueden ser infinitas soluciones. Se trabajaron problemas lineales y problemas no lineales. La interfaz del usuario es muy similar al de los programas anteriores como se muestra en la figura 3.

Como se muestra en la figura 3, se cuenta con las barras deslizantes que ayudan al estudiante y también se cuenta con la opción de mostrar o no la respuesta. Con este programa se hace especial énfasis en el uso correcto de los intervalos y en su representación gráfica. En la figura 4 se muestra el programa con todas las ayudas y la respuesta activa.

Con este tipo de ejercicios, se refuerza todo el trabajo anterior, pues el estudiante necesita operar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones para poder resolver ejercicios.

### 4.3. Transformaciones de funciones

En el tercer corte, se trabajó el concepto de funciones, abordando problemas que impliquen identificar variables y constantes; y modelar, acorde a las características, del problema. Una vez introducido el concepto de función, se trabajó

## Resolviendo inecuaciones no lineales

desizar para mostrar pista ☐

desizar para resolver paso a paso ☐

mostrar respuesta ☐

De ser posible, encontrar la solución de la siguiente inecuación nuevo ejemplo

$$\frac{3z^2 - 7z - 6}{-z - 3} < 0$$

*Desliza para ver una pista*

*Desliza para resolver paso a paso*

*Pulsa en el botón para ver la respuesta*

Figura 3. Resolviendo inecuaciones no lineales

## Resolviendo inecuaciones no lineales

desizar para mostrar pista ☐

desizar para resolver paso a paso ☐

mostrar respuesta ☒

De ser posible, encontrar la solución de la siguiente inecuación nuevo ejemplo

$$\frac{3z^2 - 7z - 6}{-z - 3} < 0$$

**Pista:**

1. Es una desigualdad no lineal, todos los términos de la desigualdad se deben agrupar en el lado izquierdo.  
Por lo tanto el lado derecho de la desigualdad debe ser cero
2. Operar y simplificar las expresiones del lado izquierdo.
3. Factorizar completamente la expresión, simplificar de ser necesario
4. Para analizar el comportamiento de la desigualdad cada factor se debe igualar a cero y resolver la ecuación resultante.
5. En una recta numérica se colocan todas las soluciones de las ecuaciones y se identifican los intervalos generados
6. Determinar cual o cuales intervalos dan solución a la desigualdad: elegir un valor en cada intervalo y evaluarlo en la inecuación, los intervalos en donde los resultados verdaderos forman parte de la solución
7. Dependiendo del signo de la desigualdad se debe incluir o no los extremos de los intervalos:  $\leq$  o  $\geq$  se incluyen los extremos,  $<$  o  $>$  no se incluyen los extremos
8. Si en el paso 3 se canceló algún factor, este valor no hace parte de la solución: *no se puede dividir por cero*

**paso a paso:**

$> \frac{(z-3)(3z+2)}{-z-3} < 0$

$> -\frac{(z-3)(3z+2)}{z+3} < 0$

$> \text{La(s) solución(es) de la expresión es(son): } \left\{-\frac{2}{3}, 3\right\}$

$> \text{La(s) indeterminación(es) de la expresión es(son): } \{-3\}$

$-3 < z < -\frac{2}{3} \vee z > 3$

$> \text{Se determinan los intervalos generados por las soluciones e indeterminaciones}$

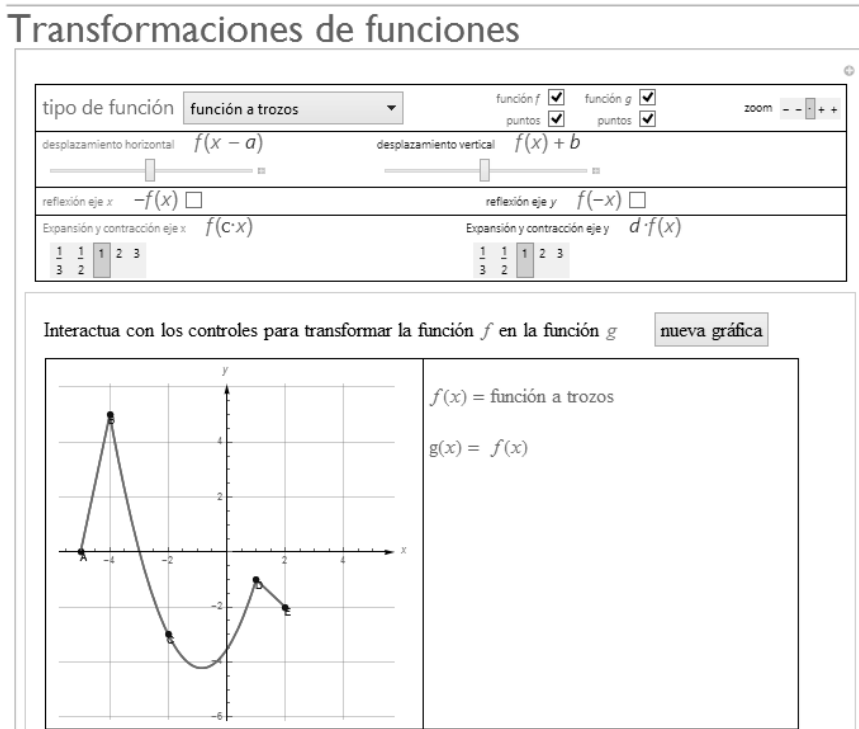
$> \text{Se determina cual(es) intervalo(s) da(n) solución a la inecuación y si los extremos forman parte de esta o no.}$

$\begin{array}{ccccccc} + & 0 & - & 0 & + & 0 & - \\ & -3.0 & & -0.67 & & 3.0 & \end{array}$

$\begin{array}{ccccccc} \circ & & \circ & & \circ & & \rightarrow \\ & -2 & & 0 & & 2 & & 4 & & 6 \end{array}$

Figura 4. Resolviendo inecuaciones no lineales

su representación gráfica y específicamente las transformaciones de funciones. En la figura 5 se presenta la interfaz gráfica del programa “transformaciones de funciones”.



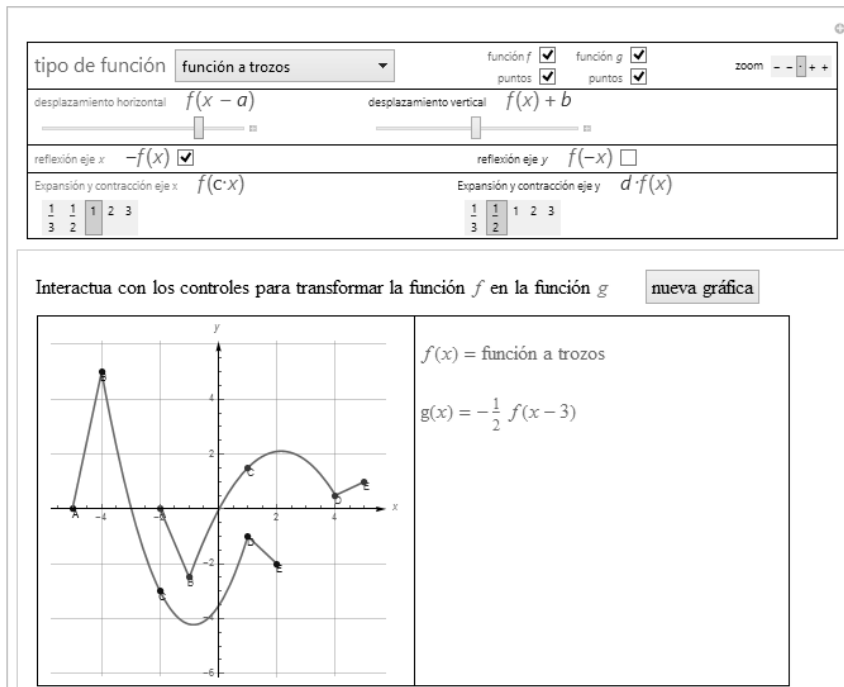
**Figura 5.** Transformaciones de funciones

Este programa cuenta con una gran cantidad de elementos manipulables, entre ellos: cambiar el tipo de función: puede ser a trozos, una recta, una parábola o una raíz cuadrada. También se puede elegir qué tipo de transformación se realiza, se estudia el desplazamiento vertical y horizontal, la reflexión con respecto al eje  $y$  y al eje  $x$  y la expansión y contracción con respecto a los ejes cartesianos.

El estudiante puede interactuar a tal punto de juntar todos los tipos de transformaciones para ver la función resultante, tanto gráficamente como analíticamente, como se muestra en la figura 6.

Los controles superiores de la derecha, se utilizan para ocultar las funciones (original y transformada) o los puntos de estas y para modificar el *zoom*, esto permite que, en clase, este programa se pueda utilizar como un facilitador de ejercicios y repaso de conceptos.

## Transformaciones de funciones



**Figura 6.** Transformaciones de funciones

### 4.4. Función cuadrática

El último tema abordado en el curso de matemáticas es la función cuadrática, se hace especial énfasis en el trabajo de diferentes representaciones (algebraica, tabular y gráfica).

El objetivo es facilitar que el estudiante identifique las principales características de una función cuadrática como los cortes e interceptos con los ejes, el vértice, la simetría y la concavidad. Como resultado, se espera que dada la expresión algebraica de alguna función cuadrática, se pueda graficar, identificando los principales puntos de esta. En la figura 7 se presenta la interfaz gráfica del programa.

Al igual que todos los programas, este cuenta con ejemplos de forma aleatoria lo que garantiza que las funciones no se repitan; además se tiene una serie de preguntas para que el estudiante interiorice el concepto de función (no sólo de la función cuadrática) y con una barra deslizadora que responda dichas preguntas. En la figura 8 se muestra el programa con todas las ayudas y las respuestas.

## Función cuadrática (parábolas)

pasos para graficar la función

mostrar los cortes eje x ☐

mostrar los cortes eje y ☐

mostrar la gráfica de  $f$  ☐

mostrar el vértice ☐

mostrar el eje de simetría ☐

Determine los ceros, corte eje y y vértice de la parábola cuya función es

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} - 3x$$

nueva función

y

0.5

-1

-0.5

-1.0

-1.5

-2.0

x

-1

1

2

>> identificar coeficientes  $a, b$  y  $c$ :

>> completar cuadrados:

>> ceros de  $f$ : resolver la ecuación  $f(x)=0$

>> corte eje y: encontrar la imagen de 0,  $f(0)$

>> vértice hallar  $-\frac{b}{2a}$  y  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

>> eje de simetría recta vertical que pasa por el vértice

**Figura 7.** Función cuadrática

Las funciones pueden tener o no ceros, lo cual implica en el estudiante el trabajo de resolver la ecuación (repasar conceptos vistos anteriormente), también pueden ser cóncavas hacia arriba o abajo.

La naturaleza de este programa acerca al estudiante al proceso de graficar funciones, el cual se profundiza en el curso de cálculo.

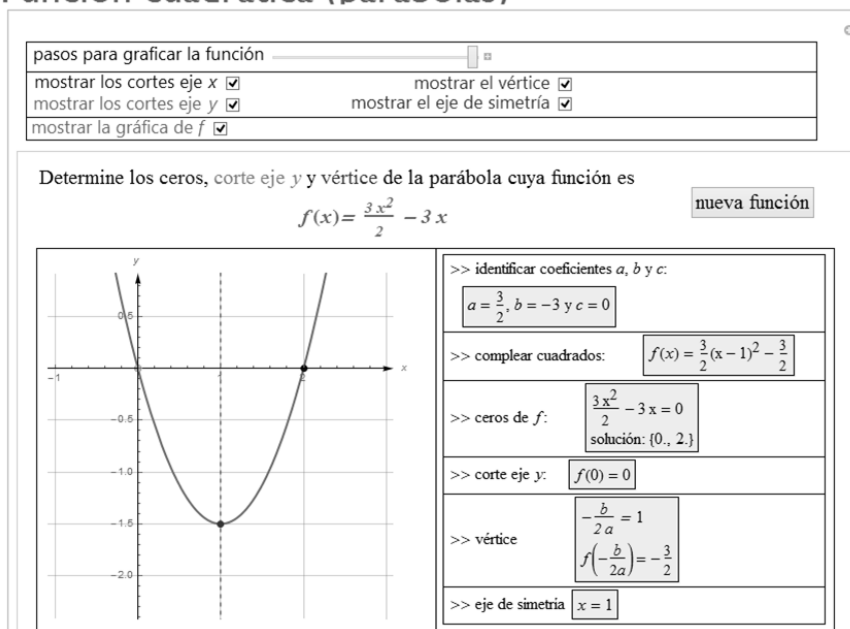
### 4.5. Primera experiencia en el aula

Al utilizar los programas en el aula se identificaron tres momentos para su uso: en el primero se expone el ejercicio acorde al concepto estudiado (ecuación, inecuación, función, entre otros) sin ningún tipo de ayuda ni respuesta y se brinda un tiempo a los estudiantes para que lo desarrollen, de ser necesario, se ayuda al estudiante que lo requiera. El tiempo de desarrollo depende de la dificultad de los ejercicios.

El segundo momento, se desarrolla cuando se muestra solo la solución de la ecuación y los respectivos mensajes de ayuda, lo cual da tiempo para que aquellos que no llegaron a la solución puedan revisar y corregir los errores.

En el último momento, se muestra el desarrollo paso a paso y se compara con lo propuesto por los estudiantes, se da un tiempo para responder las preguntas

## Función cuadrática (parábolas)



**Figura 8.** Función cuadrática

que se tenga y el docente está pendiente de aquellos que no lo hicieron de la misma manera para ayudarles a corregir los errores y poder solucionar el ejercicio.

En general, desde que se comenzaron a utilizar estas herramientas en el aula de clase, se vio un cambio en la disposición de la mayoría de los estudiantes, pues se confirmó que el manipularlas o aplicarlas en clase, brindó una mayor seguridad y un constante acompañamiento en los procesos algorítmicos, promoviendo en el estudiante una motivación mayor a trabajar en clase.

Al comienzo, no se entregaron los programas a los estudiantes, sólo se utilizaron en el aula de clase, pero por requerimiento de ellos a medida que se abordaba un nuevo tema se subía el respectivo programa a la plataforma virtual. El trabajo en casa es algo que aún no se puede medir, pero sí se evidencia que algunos estudiantes descargan las herramientas y las utilizan; incluso algunos en la siguiente clase tienen preguntas específicas del desarrollo de determinado ejercicio.

## 5. Discusión y conclusiones

La naturaleza de estos programas permite potenciar el desarrollo algorítmico de los ejercicios propuestos y estudiados en la clase, y al ser este el fuerte, también

es su principal debilidad porque sin el pertinente trabajo en clase por parte del profesor, se puede llegar a cometer el grave error de dedicar la mayoría de la clase en procesos algorítmicos y formar estudiantes que sólo desarrollan y refuerzan este tipo de procesos, pero que en ningún momento desarrollan competencias matemáticas o se forman para afrontar situaciones de la vida cotidiana.

El objetivo, por tanto, es poder trabajar solo una parte de la clase en procesos algorítmicos y tener una herramienta que oriente al estudiante en este proceso para poder enfocar el grueso de la clase la solución de problemas y al desarrollo de estudiantes competentes matemáticamente. Lamentablemente esto no se ha logrado en un 100 % pues algunas veces se excede el tiempo dedicado al desarrollo algorítmico de uno o varios ejercicios y no se tiene tiempo para trabajar con situaciones problema.

Al aplicar la experiencia se confirma que la herramienta puede cumplir el propósito planeado, pero que un incorrecto uso puede llevar al error de utilizarla como sustituto de intuiciones y comprensiones conceptuales en el estudiante.

Aunque la implementación de los programas sólo se ha hecho en un curso, indiscutiblemente se ha evidenciado un cambio en la participación y motivación de los estudiantes en el trabajo del aula de clase. El simple hecho de tener la herramienta presente, muestra una disposición diferente al abordar un ejercicio y la metodología de la clase se ve influenciada positivamente.

## 6. Síntesis

La primera conclusión a la que se llega es la siguiente: el programa *Mathematica 10*, además de ser una herramienta para utilizar en el aula por el docente y los estudiantes como apoyo en la comprensión de los temas trabajados.

La segunda conclusión es: todos los programas cumplen con el objetivo de que el estudiante repase (en clase o en sus momentos de estudio) los conceptos abordados en la materia y entienda los algoritmos y operaciones necesarios para resolver ejercicios algorítmicos.

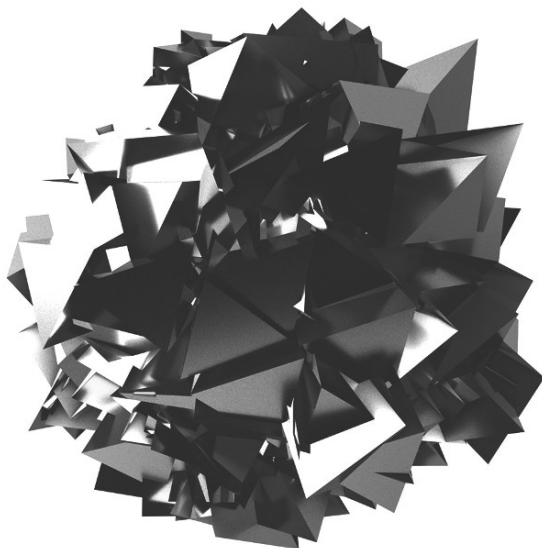
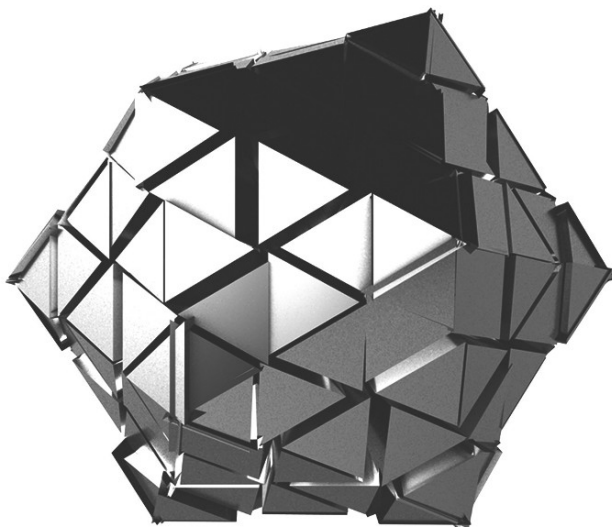
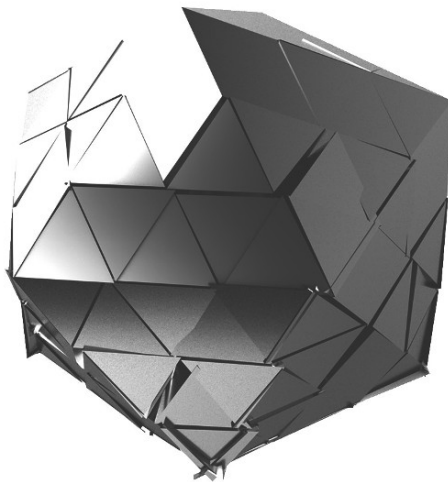
La experiencia en el aula da cuenta que no se puede estancar todo el tiempo de trabajo en clase o estudio en la resolución de ejercicios algorítmicos, el reto está en utilizar estos para potenciar el desarrollo de problemas aplicados y fomentar un desarrollo de competencias matemáticas y pensamiento de alto nivel en los estudiantes.

## Referencias

1. Cantoral, R. Cordero, Farfan R. Imaz, E: Una revisión de la Investigación Educativa. En Cálculo y Análisis. Universidad Autónoma del Estado de México UAEM. Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. 1991.
2. Córdoba, J. Vingues, G. Cárdenas, C. Martínez, F. Obando, G. Posada, F. Jiménez, A. Sepúlveda, J: Herramientas computacionales en el desarrollo de procesos de interpretación y argumentación en clase de matemáticas. Ministerio de Educación,

- Memorias del congreso internacional: Tecnologías computacionales en el currículo de Matemáticas. Bogotá, Colombia. 2002.
3. García, G. Serrano, C. Díaz, H: Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva a nociones básicas y conceptos del Cálculo. Universidad Pedagógica Nacional. 1999.
  4. Godino, J. D. Batanero, C. Font, V.: Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para Maestros. Granada, Universidad de Granada, 2003.
  5. López, O. & Triana, S. Efecto de un activador computacional de autoeficacia sobre el logro de aprendizaje en estudiantes de diferente estilo cognitivo. Revista Colombiana de Educación, 64. 2013.
  6. Meyer, D: Math class needs a makeover. TED talks. 2010.
  7. Moreno, L. Santos, M: Proceso de transformación del uso de la tecnología en una herramienta para la solución de problemas de matemáticas por parte de los estudiantes. Seminario Nacional de Formación Docente. Uso de nuevas tecnologías en el aula de clase, Ministerio de educación, serie memorias. 2002.
  8. Steward, James. Cálculo: trascendentes tempranas. 6a. ed. México: Cengage Learning, 2008.
  9. Wolfram, C: Teaching kids real math with computers. TED talks. 2010.





# Método para calcular la eficiencia cuántica y la respuesta espectral de celdas solares usando LabVIEW

## Method to Calculate the Quantum Efficiency and Spectral Response of Solar Cells by Using LabVIEW

Andrés Julián Aristizábal Cardona\*

Departamento de Ingeniería. Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano.  
Bogotá, Colombia

FECHA DE ENTREGA: 11 DE JUNIO DE 2015

FECHA DE EVALUACIÓN: 19 DE JUNIO DE 2015

FECHA DE APROBACIÓN: 23 DE JUNIO DE 2015

**Resumen** En este trabajo se presentan los procedimientos clásicos para calcular la densidad de corriente espectral de cortocircuito para la base y para el emisor de una celda solar. Posteriormente, se calculan la eficiencia cuántica y la respuesta espectral. El método es realizado a partir de instrumentación virtual mediante el lenguaje de programación gráfica LabVIEW.

Este programa procesa los datos de longitud de onda, el coeficiente de absorción, el espectro de radiación y el coeficiente de reflexión para desarrollar el análisis mencionado y permite exportar a archivos en formato `.xls`, la información obtenida.

Los resultados indican para una celda solar de silicio; una densidad de corriente espectral de cortocircuito del emisor de  $24,3 \text{ mA/cm}^2\mu$  (valor máximo) y de  $61,6 \text{ mA/cm}^2\mu$  (valor máximo) para la base. La eficiencia cuántica interna alcanzó el 97 % para los  $0,65 \mu\text{m}$ ; mientras que la respuesta espectral interna registró  $610 \text{ mA/W}$  en los  $1,45 \mu\text{m}$ .

**Abstract** This article presents the classical procedures used to calculate the density of a short circuit spectral current for the base and the transmitter of a solar cell. Afterwards, we calculated its quantum efficiency

---

\* Posdoctorado, Proyecto Distribución Eléctrica Inteligente SILICE, Universidad Nacional de Colombia, 2010. Doctorado en Ciencias - Física, Universidad Nacional de Colombia, 2008. Ingeniería Eléctrica, Universidad Nacional de Colombia, 2004. Director de la Maestría en Ingeniería - Gestión Sostenible de la Energía, Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, 2014 - Actual. Áreas de interés: Energía Solar, Instrumentación Electrónica y Sensores, Calidad de Energía, Generación Distribuida. [andresj.aristizabal@utadeo.edu.co](mailto:andresj.aristizabal@utadeo.edu.co)

and spectral response. The method followed was virtual instrumentation through the graphic programming language LabVIEW.

The program developed processes wavelength data, the absorption coefficient, the radiation spectrum, and the reflection coefficient to carry out this analysis and export the information obtained to .xls files.

Results indicate that for a silicon solar cell and a short circuit, the spectral density current is  $24.3 \text{ mA/cm}^2\mu$  (maximum value) with a base of  $61.6 \text{ mA/cm}^2\mu$  (maximum value), the quantum efficiency reached 97 % for  $0.65 \mu\text{m}$  and the spectral response registered  $610 \text{ mA/W}$  at  $1.45 \mu\text{m}$ .

**Palabras Clave:** celdas solares, eficiencia cuántica, respuesta espectral, densidad de corriente, instrumentación virtual.

**Keywords:** solar cells, quantum efficiency, spectral response, current density, virtual instrumentation.

## 1. Introducción

La tecnología fotovoltaica es una fuente de energía renovable prometedora que convierte la luz solar en electricidad, con un gran potencial para contribuir significativamente a solucionar el futuro problema energético que enfrenta la humanidad.

A la fecha, las celdas solares elaboradas a partir de materiales semiconductores dominan el mercado comercial, las de Si cristalino en un 80 % de participación; el restante 20 % es mayormente tecnología de películas delgadas, tales como CdTe y CIS y CIGS [1]. Las primeras son semiconductores de banda de energía prohibida o gap indirecta que normalmente requieren una capa de absorción de 300 nm de espesor y los costos de materiales y procesamiento son muy altos. Las segundas, contienen elementos que son tóxicos y de baja abundancia en la naturaleza. Sin embargo el compuesto  $\text{CuIn}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Se}_2$  permite fabricar dispositivos solares de película delgada con mejor desempeño, ya que exhibe una eficiencia del 20 %, pero es 1,4 veces más costoso que los dispositivos de CdTe y de Si amorfo [2]. Una alternativa ecológica y de bajo costo para estos dispositivos de estado sólido, es la celda solar sensibilizada por colorante (DSC) [3] [4] y las celdas solares de materiales poliméricos que han alcanzado eficiencias cercanas al 9 % (Solar Cell Efficiency Tables, Martin Green), cuyos costos de preparación son menores que los de las otras tecnologías dominantes en el mercado y su estructura permite la fabricación automatizada.

Las únicas celdas solares de silicio cristalino fabricadas por material de silicio grado solar a partir de un proceso metalúrgico, tienen un desempeño inferior que las fabricadas por silicio policristalino a partir de un proceso químico; pero las primeras tienen un voltaje de circuito abierto más alto que las últimas, en condiciones de poca iluminación [5].

El material de silicio grado solar a partir de un proceso metalúrgico, representa una manera rentable para la producción de celdas solares de silicio cristalino; pero es un sistema complejo de semiconductores: su calidad sufre por la presencia

de impurezas de metales de transición, oxígeno, carbono y otras complejidades [6].

Los procesos de caracterización de celdas solares representan una fuente valiosa de información para mejorar los procesos ópticos y eléctricos de los materiales con el fin de aumentar el desempeño de los dispositivos fotovoltaicos, y de esta manera, lograr una disminución en los costos a nivel de producción industrial.

Los sistemas de instrumentación virtual son ampliamente usados en la industria y los laboratorios de enseñanza para experimentación, pruebas, control y análisis de desempeño de datos adquiridos mediante mediciones y para procesos de simulación y validación [7] [8] [9].

El proceso presentado en este trabajo, se efectuó mediante el paquete de *software* LabVIEW 2014, aplicando las definiciones clásicas de celdas solares sobre una celda solar de silicio caracterizada previamente; pero puede también ser utilizado para cualquier celda solar sin importar el tipo de tecnología, para la cual es necesario disponer de la información requerida por la aplicación desarrollada.

## 2. Consideraciones iniciales

### 2.1. Modelo analítico de la celda solar

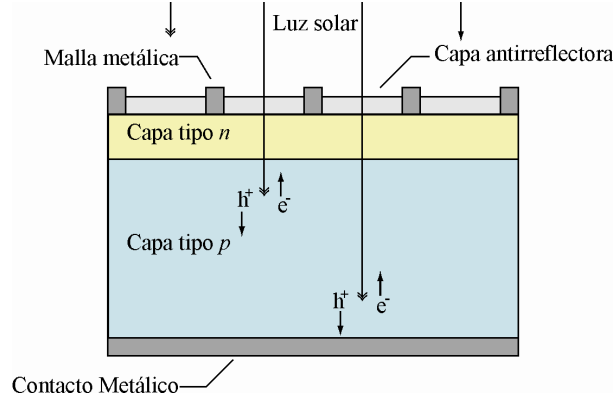
El procedimiento de cálculo expuesto fue extraído del capítulo 2.2 de [10] y sus ecuaciones fueron procesadas mediante el *software* LabVIEW.

La celda solar es un dispositivo fabricado para convertir luz solar directamente en electricidad, mediante el fenómeno físico denominado efecto fotovoltaico [11]. Las celdas solares no necesitan recargarse como una batería, algunas han estado en operación continua a la intemperie en la tierra o en el espacio por más de 30 años [12].

La celda solar tiene la capacidad de absorber luz y entregar parte de la energía de los fotones absorbidos a los portadores de corriente eléctrica (electrones y huecos). Un semiconductor separa y colecta los portadores de carga y conduce la corriente eléctrica generada preferiblemente en una dirección específica. Así, una celda solar es simplemente un diodo semiconductor que ha sido diseñado y construido para absorber y convertir eficientemente la energía de la luz solar en energía eléctrica [13]. Una celda solar convencional se muestra en la figura 1 y su funcionamiento se explica a continuación.

La luz solar incide sobre la superficie de la celda solar. Una malla metálica hace contacto eléctrico con la celda y permite que la luz llegue al semiconductor por medio de la líneas de la malla y sea absorbida y convertida en energía eléctrica. Una capa anti reflectora entre las líneas de la malla, incrementa la cantidad de luz transmitida al semiconductor. Un diodo se forma cuando un semiconductor tipo  $n$  y uno tipo  $p$  son agrupados para formar una juntura. Esto se logra típicamente a través de procesos de difusión o implantación de impurezas específicas (dopantes) o mediante procesos de deposición. El otro contacto eléctrico del diodo es formado por una capa metálica en la parte posterior de la celda solar [12].

Los fenómenos para la generación de electricidad en la celda solar, se puede resumir en: absorción de radiación solar (absorción de fotones por parte de los



**Figura 1.** Representación esquemática de una celda solar convencional. Se representa la creación de pares electrón-hueco,  $e^-$  y  $h^+$ , respectivamente [12].

electrones), separación de portadores de carga en la juntura, colección de esos portadores en los contactos del dispositivo y transporte hacia los diferentes tipos de acondicionamiento de potencia y almacenamiento de energía según el uso final determinado. Para aplicaciones terrestres, cada etapa de esta secuencia depende críticamente de las otras mencionadas. Por ejemplo, la generación fotovoltaica de electricidad debe ser acoplada con un proceso efectivo de almacenamiento con el fin de compensar la naturaleza intermitente de la radiación solar [14].

El cálculo de la corriente fotogenerada de una celda solar a una longitud de onda dada requiere la solución de un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales, incluyendo ecuaciones de continuidad y corriente tanto para portadores minoritarios como mayoritarios y la ecuación de Poisson [10].

## 2.2. Densidad de corriente espectral de corto circuito

Corresponde a la corriente por unidad de área y por unidad de longitud de onda incidente en la celda solar. El modelo descrito en [10] entrega el valor de la foto corriente recolectada por una superficie de celda solar de  $1 \text{ cm}^2$  cuando se expone a luz monocromática. Las expresiones analíticas son:

*Densidad de corriente espectral de corto circuito del emisor:*

$$J_{scE}(\lambda) = \frac{q\alpha\phi_0(1-R)L_p}{(\alpha L_p)^2} \left[ -\alpha L_p e^{-\alpha W_e} + \frac{S_e \frac{L_p}{D_p} + \alpha L_p - e^{-\alpha W_e} \left( S_e \frac{L_p}{D_p} Ch \frac{W_e}{L_p} + Sh \frac{W_e}{L_p} \right)}{Ch \frac{W_e}{L_p} + S_e \frac{L_p}{D_p} Sh \frac{W_e}{L_p}} \right] \quad (1)$$

*Densidad de corriente espectral de corto circuito de la base:*

$$J_{scB}(\lambda) = \frac{q\alpha\phi'_0(1-R)L_n}{(\alpha L_n)^2 - 1} \left[ -\alpha L_n - \frac{S_b \frac{L_n}{D_n} \left( Ch \frac{W_b}{L_n} - e^{-\alpha W_b} \right) + Sh \frac{W_b}{L_n} + \alpha L_n e^{-\alpha W_b}}{Ch \frac{W_b}{L_n} + S_b \frac{L_n}{D_n} Sh \frac{W_b}{L_n}} \right] \quad (2)$$

Los principales parámetros de las ecuaciones (1) y (2) se definen en el cuadro 1.

| Símbolo   | Nombre                                                   | Unidades                         |
|-----------|----------------------------------------------------------|----------------------------------|
| $\alpha$  | Coefficiente de absorción                                | $\text{cm}^{-1}$                 |
| $\phi_0$  | Flujo espectral de fotones en la superficie del emisor   | Fotón/ $\text{cm}^2\mu\text{ms}$ |
| $\phi'_0$ | Flujo espectral de fotones en la interface base - emisor | Fotón/ $\text{cm}^2\mu\text{ms}$ |
| $L_n$     | Longitud de difusión de electrones en la capa base       | cm                               |
| $L_p$     | Longitud de difusión de los huecos en la capa del emisor | cm                               |
| $D_n$     | Constante de difusión de electrones en la capa base      | $\text{cm}^2/\text{s}$           |
| $D_p$     | Constante de difusión de huecos en la capa del emisor    | $\text{cm}^2/\text{s}$           |
| $S_e$     | Velocidad de recombinación en la superficie del emisor   | cm/s                             |
| $S_p$     | Velocidad de recombinación en la superficie de la base   | cm/s                             |
| $R$       | Coefficiente de reflexión                                | —                                |

**Cuadro 1.** Principales parámetros involucrados en el modelo analítico [10].

### 2.3. Flujo espectral de fotones

El flujo espectral de fotones  $\phi_0$  recibido en la superficie frontal del emisor de una celda solar, se relaciona fácilmente con la radiación espectral y la longitud de onda. Es importante aclarar que la radiación espectral es la potencia por unidad de área y unidad de longitud de onda. Lo anterior se muestra en la ecuación (3):

$$\phi_0 = 10^{16} \frac{I_\lambda \lambda}{19.8} \left[ \frac{\text{Fotón}}{\text{cm}^2\mu\text{ms}} \right] \quad (3)$$

Con  $I_\lambda$  ( $I$  - radiación solar,  $\lambda$  - longitud de onda) en  $\text{W}/\text{m}^2\mu\text{m}$  y  $\lambda$  en  $\mu\text{m}$ . Para la región de la base, se tiene la ecuación (4):

$$\phi' = \phi_0 e^{-\alpha W_e} = e^{-\alpha W_e} 10^{16} \frac{I_\lambda \lambda}{19.8} \left[ \frac{\text{Fotón}}{\text{cm}^2\mu\text{ms}} \right] \quad (4)$$

De esta manera, la densidad de corriente espectral de corto circuito total (ecuación (5)) es la suma de las ecuaciones (1) y (2):

$$J_{sc\lambda} = J_{scE}(\lambda) + J_{scB}(\lambda) \quad (5)$$

#### 2.4. Corriente total de corto circuito

Corresponde a la contribución total de corriente a todas las longitudes de onda de la luz incidente en la celda solar. Esta se describe por medio de la ecuación (6):

$$J_{sc} = \int_0^{\infty} J_{sc\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} (J_{scE}(\lambda) + J_{scB}(\lambda)) d\lambda \quad (6)$$

#### 2.5. Eficiencia cuántica (QE)

Corresponde al número de electrones producidos en el circuito externo a la celda solar por cada fotón del espectro incidente. La eficiencia cuántica externa e interna se definen empleando las ecuaciones (7) y (8):

$$IQE = \frac{J_{sc\lambda}}{q\phi_0(1 - R)} \quad (7)$$

$$EQE = \frac{J_{sc\lambda}}{q\phi_0} \quad (8)$$

#### 2.6. Respuesta espectral

Se define como la relación entre la densidad de corriente espectral de corto circuito y la radiación espectral. También se define la respuesta espectral interna y la externa empleando las ecuaciones (9) y (10):

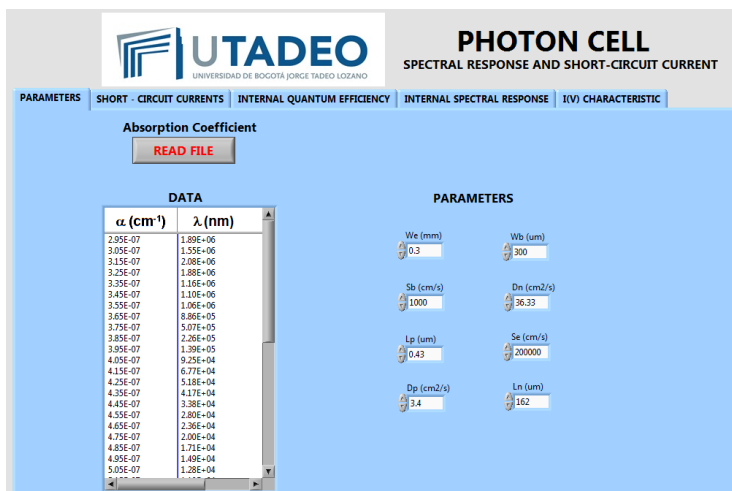
$$ISR = 0.808(IQE)\lambda \quad (9)$$

$$ESR = 0.808(EQE)\lambda \quad (10)$$

### 3. Resultados

Con el fin de aplicar el modelo descrito, en LabVIEW, se desarrolló el instrumento virtual denominado “photoncell.vi” cuyo panel frontal se muestra en la figura 2. El programa cuenta con cinco menús de selección:

- Parámetros (*Parameters*).
- Corrientes de corto circuito (*Short-circuit currents*).
- Eficiencia cuántica interna (*Internal quantum efficiency*).
- Respuesta espectral interna (*Internal spectral response*).
- Característica IV (*IV characteristic*).



**Figura 2.** Panel frontal del programa “Photon Cell” desarrollado.

En el menú “Parámetros”, el usuario debe inicialmente cargar el archivo que contenga los valores del espectro del coeficiente de absorción, en función de la longitud de onda de la celda solar a analizar. A continuación se deben ingresar los datos relacionados con el espesor y los demás parámetros indicados en el cuadro 1. El análisis se realizó considerando una celda solar de silicio con las dimensiones y características dadas a continuación [10]:

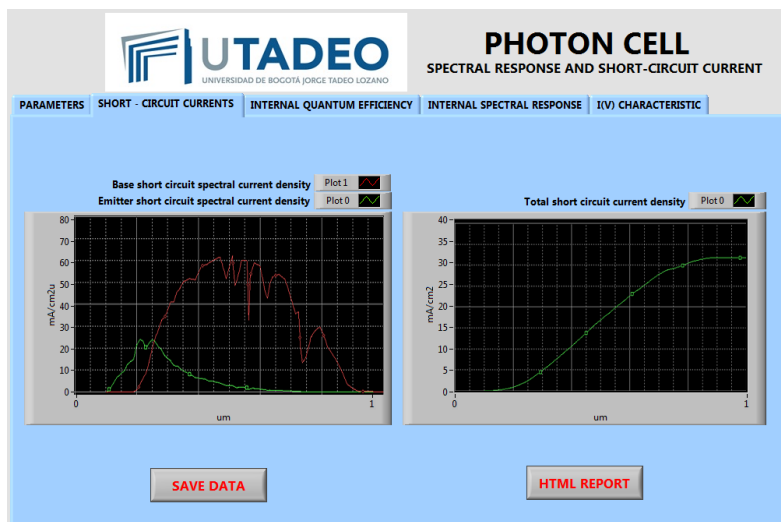
Espesor del emisor:  $W_e = 0,3$  mm, espesor de la base  $W_b = 300$  μm,  $L_p = 0,43$  μm,  $S_e = 2 \times 10^5$  cm/s,  $D_p = 3,4$  cm<sup>2</sup>/s,  $L_n = 162$  μm,  $S_b = 1000$  cm/s,  $D_n = 36,33$  cm<sup>2</sup>/s.

En la figura 3, se presentan las densidades de corriente espectral de corto circuito para la base y el emisor de la celda solar; así como también, la densidad de corriente total, las cuales fueron obtenidas a partir de los datos descritos en el párrafo anterior.

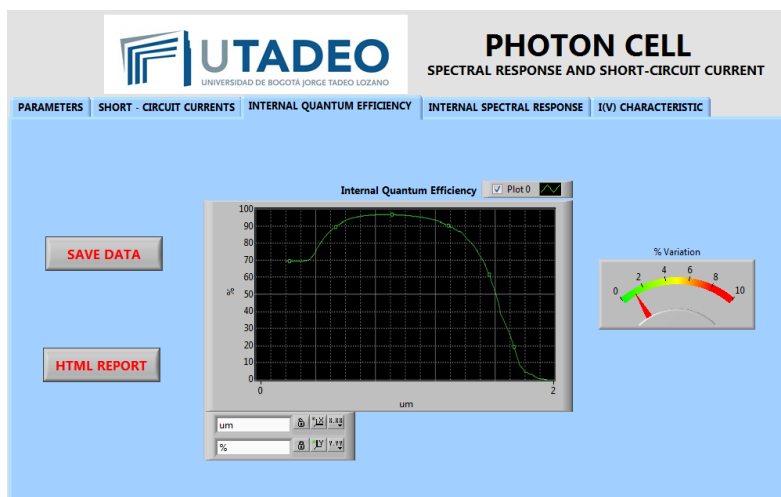
Se obtuvo una densidad de corriente espectral de cortocircuito del emisor de 24,3 mA/cm<sup>2</sup>μ (valor máximo) y de 61,6 mA/cm<sup>2</sup>μ (valor máximo) para la base.

El programa permite almacenar la información en archivos con formato .xls para realizar análisis posteriores, y crear un informe tipo html.

Como era de esperarse, la densidad de corriente espectral de cortocircuito en la base del dispositivo fotovoltaico es mayor respecto a aquella en el emisor; y más precisamente en 40 mA/cm<sup>2</sup> teniendo en cuenta que, en el emisor existen pérdidas en la generación de portadores asociados a los procesos de recombinación superficial del material. Tratamientos asociados al manejo anti reflectivo de la radiación solar en la capa del emisor, impactarían benéficamente la colección de portadores que permitirían aumentar la respuesta de la densidad de corriente total. En la figura 4, se puede apreciar la eficiencia cuántica interna de la celda solar.



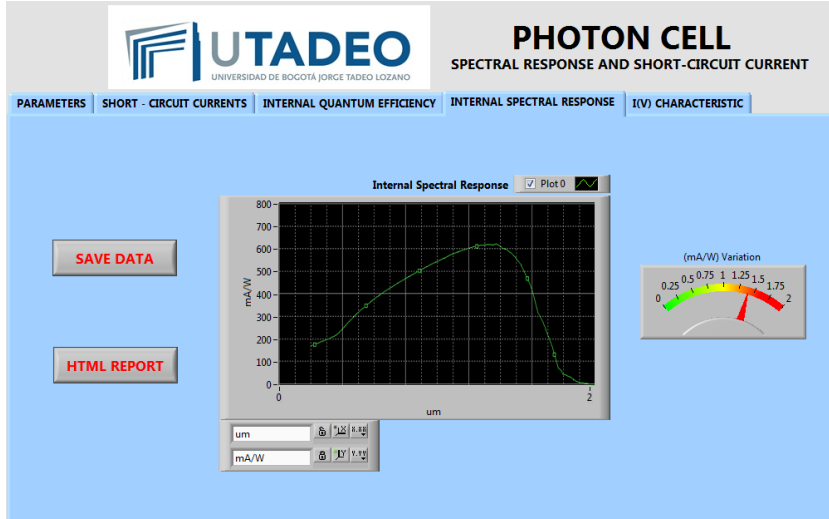
**Figura 3.** Densidades de corriente espectral de cortocircuito del emisor (verde - izquierda) y de la base (rojo - izquierda). Densidad total de corriente de cortocircuito (derecha).



**Figura 4.** Respuesta de la eficiencia cuántica interna de la celda solar analizada.

La eficiencia cuántica interna alcanzó el 97 % para los  $0,65 \mu\text{m}$  de longitud de onda incidente. La eficiencia cuántica interna tiende a decrecer significativamente a partir de los  $1,4 \mu\text{m}$  y ello puede deberse, al aumento de la luz reflejada por fotón incidente para cada longitud de onda a partir de dicho valor ( $1,4 \mu\text{m}$ ).

De nuevo, la implementación de una capa anti reflectiva podría aumentar la cantidad de luz que llegue hasta la base y genere mayor cantidad de pares electrón - hueco y que los primeros puedan efectivamente hacer transición hacia la banda de conducción. En la figura 5 se muestra la respuesta espectral interna.



**Figura 5.** Respuesta espectral interna de la celda solar analizada.

La respuesta espectral interna registró un valor máximo de 610 mA/W en los 1,45  $\mu\text{m}$ . Se puede observar que para una longitud de onda de aproximadamente 0,30  $\mu\text{m}$ , la celda registra una respuesta espectral interna cercana a 180 mA/W; mientras que para esa misma longitud de onda, la eficiencia cuántica interna era de alrededor del 70 % (figura 4). Este comportamiento evidencia el inicio de la colección de portadores mayoritarios que va a definir hacia los 620 mV el punto de máxima potencia del dispositivo (figura 5).

### 3.1. Corriente en oscuro de la celda solar

La curva I-V en oscuro de una celda solar es idéntica a la de un diodo convencional y se describe en la ecuación (11):

$$I_d = I_s \left( e^{\frac{qV}{kT}} - 1 \right) \quad (11)$$

### 3.2. Efectos del material de la celda solar

Tal como se mencionó anteriormente, varias magnitudes importantes en la conversión fotovoltaica dependen de las propiedades del material del semiconductor.

En el cuadro 2, se presentan los principales parámetros de una celda solar de silicio y de una celda solar de GaAs [10].

| Parámetro celda solar de silicio* Celda solar de GaAs** |                         |                        |
|---------------------------------------------------------|-------------------------|------------------------|
| $n_i$ (cm <sup>-3</sup> )                               | $1 \times 10^{10}$      | $9,27 \times 10^5$     |
| $W_e$ (μm)                                              | 0,3                     | 0,2                    |
| $L_p$ (μm)                                              | 0,43                    | 0,132                  |
| $S_e$ (cm/s)                                            | $2 \times 10^5$         | $5 \times 10^3$        |
| $D_p$ (cm <sup>2</sup> /V)                              | 3,4                     | 7,67                   |
| $W_b$ (μm)                                              | 300                     | 3,8                    |
| $L_n$ (μm)                                              | 162                     | 1,51                   |
| $S_b$ (cm/s)                                            | $1 \times 10^3$         | $5 \times 10^3$        |
| $D_n$ (cm <sup>2</sup> /V)                              | 36,63                   | 46,8                   |
| $J_0$ (A/cm <sup>2</sup> )                              | $1 \times 10^{-12}$     | $9,5 \times 10^{-20}$  |
| $J_{sc}$ (A/cm <sup>2</sup> )                           | $31,188 \times 10^{-3}$ | $25,53 \times 10^{-3}$ |

**Cuadro 2.** Comparación entre una celda solar de silicio y una de GaAs. \*Geometría de archivo PC1D5 Pvccl.prm, y cálculos usando ecuaciones en anexo 2 de [10]. \*\*De L.D Partain, Solar Cells and their applications, Wiley 1995, p. 16.

### 3.3. Superposición

La superposición se emplea para determinar la corriente total de la celda solar al sumar las contribuciones bajo iluminación y oscuridad. Una vez han sido calculadas las corrientes de iluminación y bajo oscuridad de la celda solar, la corriente total es:

$$J = J_{sc} - J_{\text{dark}} \quad (12)$$

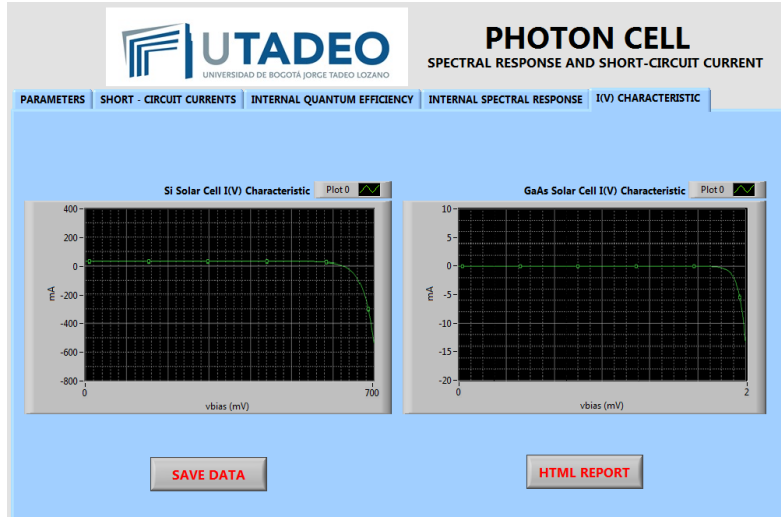
Sustituyendo la corriente bajo oscuridad se obtiene la ecuación (13):

$$J = J_{sc} - J_0 \left( e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right) \quad (13)$$

### 3.4. Característica I-V de una celda solar

En este caso se usó “Photon Cell” aplicando la ecuación (13), para una celda solar con 1 cm<sup>2</sup> de área, y los datos presentados en el cuadro 2  $J_{sc}$  y  $J_0$  para una celda solar de silicio. Simultáneamente, se calcula la característica I-V para una celda solar de GaAs usando la ecuación (13) y los datos del cuadro 2. El resultado de la curva I-V puede verse en la figura 6.

Como puede observarse, comparando las características I-V para la celda solar de Si y para la de GaAs, los materiales diferentes de las celdas solares y



**Figura 6.** Cálculo de la característica I-V para una celda solar de Si y otra de GaAs.

sus geometrías producen diferentes niveles de corriente y voltaje. En particular puede notarse que la diferencia de voltaje es la más importante en este caso: el máximo valor de voltaje de la celda solar de GaAs es el doble que el de la celda solar de silicio, lo cual puede ser atribuido en mayor parte a la gran diferencia en los valores de  $J_0$  [10].

## 4. Conclusiones

Se desarrolló una herramienta empleando instrumentación virtual que permite, previa medición del espectro de absorción, calcular los parámetros que caracterizan una celda solar.

Es posible representar el comportamiento de la eficiencia cuántica interna de una celda solar, con un modelo mono cristalino equivalente que considere parámetros efectivos.

La longitud de difusión es un parámetro relacionado directamente con la eficiencia cuántica interna de la celda solar y suministra información de los procesos de transporte, así como también del fenómeno de recombinación de portadores.

En el modelo empleado, se considera que la eficiencia de colección de portadores a lo largo de la región de carga espacial, se mantiene constante.

La eficiencia cuántica interna varía con la profundidad y puede ser calculada con parámetros gobernados exclusivamente por procesos de absorción.

Para el cálculo de la respuesta espectral, y en condiciones de corto circuito, la corriente es lineal con la irradiancia y es poco sensible frente a pequeños cambios

de tensión, dependiendo directamente de la longitud de onda que incide sobre la celda solar.

Se verifica que a longitudes de onda pequeñas, la respuesta espectral de la celda solar decrece y se infiere que la energía mayor a la del *gap* del material, es efectivamente usada por la celda solar.

El cálculo de los parámetros descritos permite analizar otras propiedades de las celdas solares, útiles para caracterizar de forma integral el desempeño y eficiencia eléctrica de los dispositivos fotovoltaicos; así como también profundizar en aspectos que afectan los procesos de recombinación y el transporte eléctrico.

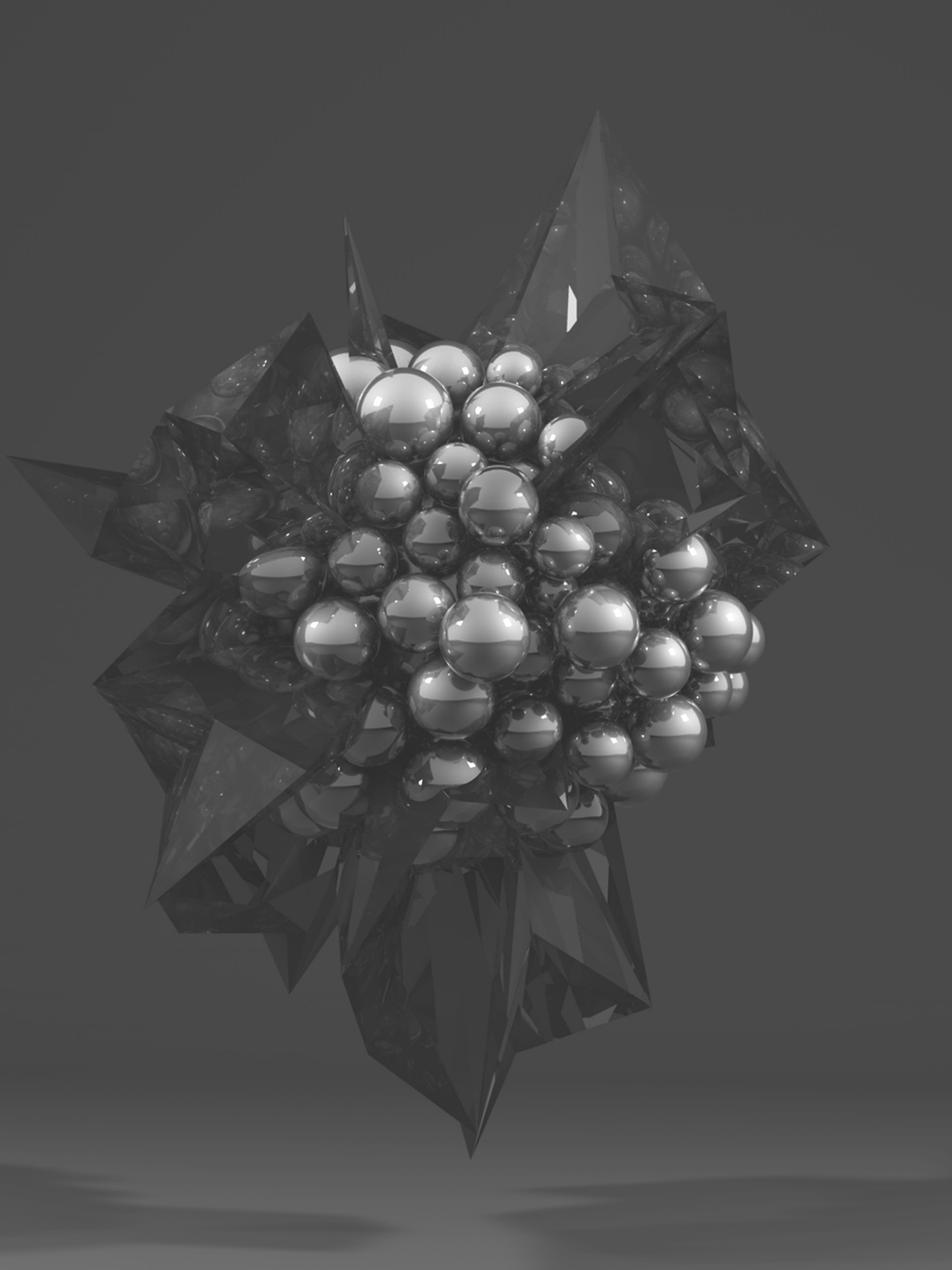
## Agradecimientos

El presente documento ha sido soportado por el proyecto de investigación con código 633-11-14 financiado por la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano.

## Referencias

1. Bisquert, J. Dilemmas of dye sensitized solar cells. *ChemPhysChem* 12, 1633-1636 (2011).
2. In Chung, Byunghong Lee, Jiaqing He, Robert P. H. Chang & Mercouri G. Kanatzidis. All solid state dye sensitized solar cells with high efficiency. *NATURE*, VOL 485, MAY 2012.
3. Hagfeldt, A., Boschloo, G., Sun, L. C., Kloo, L. & Pettersson, H. Dye-sensitized solar cells. *Chem. Rev.* 110, 6595-6663 (2010).
4. Gratzel, M. Recent advances in sensitized mesoscopic solar cells. *Acc. Chem. Res.* 42, 1788-1798 (2009).
5. Hong Yang, He Wang, Minqiang Wang. Investigation of open-circuit voltage in solar grade silicon solar cells from a metallurgical process route and cell's defect. *Clean Techn. Environ. Policy* (2013) 15:111-116.
6. Istratov AA, Buonassisi T, McDonald RJ et al (2003) Metal content of multicrystalline silicon for solar cells and its impact on minority carrier diffusion length. *J. Appl Phys.* 94:6552-6557.
7. B. Andó, S. Graziani and N. Pitrone, 'Stand-alone laboratory sessions in sensors and signal processing', *IEEE Trans. Educ.*, 47 (2004), 4-9.
8. M. Nagistris, 'A Matlab-based virtual laboratory for teaching introductory quasi-stationary electro - magnetics', *IEEE Trans. Educ.*, 48 (2005), 81-88.
9. T.W. Gedra, A. Seungwon, Q. H. Arsalan and S. Ray, 'Unified power engineering laboratory for electromechanical energy conversion, power electronics and power systems', *IEEE Trans. Power Systems*, 19 (2004), 112-119.
10. L. Castañer, S. Silvestre. 'Modelling Photovoltaic Systems Using PSpice'. Ed. Wiley, 2002.
11. Desarrollo de celdas solares basadas en CuInSe<sub>2</sub> usando nuevos materiales *buffer* en su estructura. Clara Lilia Calderon Triana. Tesis de doctorado. Universidad Nacional de Colombia. 2003.
12. Handbook of Photovoltaic Science and Engineering. Edited by A. Luque and S. Hegedus. 2003 John Wiley & Sons, Ltd ISBN: 0-471-49196-9.

13. Síntesis y Caracterización de Nuevos Materiales No Tóxicos Empleados como Capa *Buffer* y Capa Absorbente en la Fabricación de Celdas Solares. Mónica Andrea Botero Londoño. Tesis de doctorado. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2008.
14. Fundamentals of solar cells. Photovoltaic Solar Energy Conversión. Alan L. Fahrenbruch and Richard H. Bibe. 1983. Academia Press, inc. ISBN: 0-12-247680-8.



# Producción de hidrógeno a partir de energía solar. Panorama en Colombia

## Hydrogen Production from Solar Energy. The Overview in Colombia

Andrea Lache Muñoz\*

Universidad de América, Bogotá, Colombia.

FECHA DE ENTREGA: 1 DE JUNIO DE 2015

FECHA DE EVALUACIÓN: 17 DE JUNIO DE 2015

FECHA DE APROBACIÓN: 25 DE JUNIO DE 2015

**Resumen** La generación de energía a partir de fuentes renovables como el sol, representa una oportunidad para reducir la emisión de gases de efecto invernadero, los cuales han sido los responsables de la aceleración del cambio climático, en los últimos años. A su vez, el hidrógeno es considerado el vector o gestor energético ideal para las energías de tipo renovables, que puede facilitar la implementación de un nuevo modelo de suministro energético, para países como Colombia, que en un mediano y largo plazo, la energía solar ampliamente disponible, promueva la independencia energética, garantice el suministro en todo el territorio y aporte tanto bienestar ambiental como social en materia energética.

**Abstract** Power generation from renewable sources like the sun; represents an opportunity to reduce the emission of greenhouse gases, which are responsible for the acceleration of climate change in recent years. In turn, hydrogen is considered an ideal energy carrier for renewable energy, which will allow the implementation of a new model of energy supply, interest to countries like Colombia, where in the medium and long term, solar energy widely available, promote energy independence, ensure supply throughout the country and provide both environmental and social welfare in the energy field.

**Palabras Clave:** energía solar térmica, fotovoltaica, concentración solar, hidrógeno.

**Keywords:** solar thermal energy, photovoltaic, solar concentration, hydrogen.

---

\* Ingeniero Químico de la Fundación Universidad de América, Master en Energías renovables, pilas de combustible e hidrógeno, de la Universidad Internacional Menéndez Pelayo en convenio con el Centro Superior de Investigaciones Científicas (CSIC) en España; y Diplomado como Gestor Energético Avanzado de la Universidad Nacional de Colombia; y actualmente Directora del Grupo de Investigación Energías Alternativas de la Fundación Universidad de América.  
[andrea.lache@investigadores.uamerica.edu.co](mailto:andrea.lache@investigadores.uamerica.edu.co)

## 1. Introducción

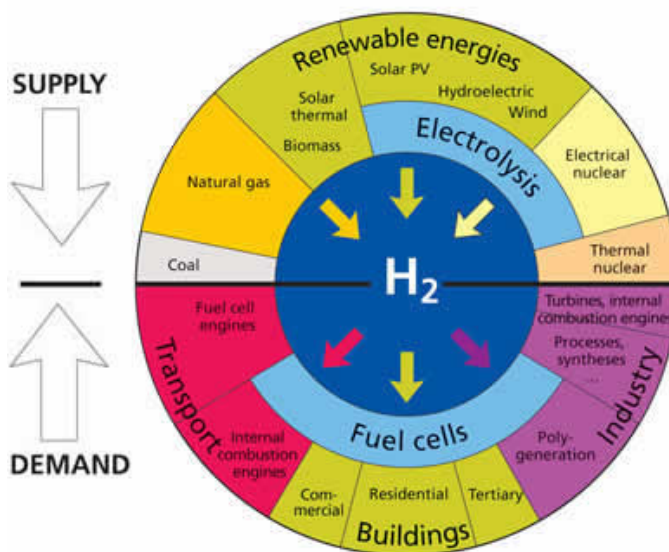
En la actualidad, el escenario energético mundial se ha visto enfrentado al reto de seguir garantizando el suministro de energía como respuesta al incremento de la demanda, y a la consecuencia del crecimiento demográfico e industrial de cada país, dentro de un esquema de responsabilidad ambiental que propenda por asegurar el desarrollo sostenible. Este panorama unido a la creciente preocupación por los efectos del cambio climático, el cual ha sido definido como “la modificación del clima con respecto al historial climático a una escala global o regional” [1], ha incentivado el estudio, la investigación y la generación de nuevas tecnologías para el aprovechamiento de fuentes de energía inagotables o mejor conocidas como renovables (el sol), para favorecer la independencia energética de cada país, y la reducción de emisiones de gases de efecto invernadero a la atmósfera.

El sol es la principal fuente de energía, a partir de la cual se han venido desarrollando tecnologías para el aprovechamiento de su energía. Ésta es “resultado de reacciones nucleares de fusión que llegan a la tierra a través del espacio en paquetes de energía llamados fotones (luz), que interactúan con la atmósfera y la superficie terrestre” [2] dando lugar a la energía solar térmica, la energía solar fotovoltaica, la energía solar de concentración, la energía eólica y la energía a partir de biomasa primaria, entendida esta como “La energía solar convertida por la vegetación en materia orgánica mediante la fotosíntesis” [3]. Otras fuentes de energía consideradas renovables, son la energía hidráulica, las formas de aprovechamiento energético de los diferentes tipos de biomasa y la energía geotérmica.

El creciente aprovechamiento energético de las fuentes renovables, tuvo un primer momento de relevancia en los años 70 como consecuencia de la crisis del petróleo, debido a la concentración de éste en países caracterizados por la inestabilidad política [4]. Posteriormente y a partir de los compromisos adquiridos por los países industrializados, luego de la firma del protocolo de Kyoto en 1997, se renovó y consolidó la necesidad de incorporar las energías renovables como parte de la matriz energética mundial; por lo que desde esas primeras instancias se evidenció que el principal desafío para su implementación a gran escala, es la gestionabilidad, pues no se puede tener certeza de la disponibilidad de sol o viento en las horas de mayor consumo, como si es posible con las energías fósiles o las centrales hidroeléctricas.

La mencionada falta de sincronización entre la oferta de energías renovables y la demanda energética ha propiciado el interés en la implementación de una economía del hidrógeno [5], en la cual éste actúe como vector energético, capaz de almacenar y transportar la energía proveniente de fuentes renovables, porque además presenta, ventajas tales como : (a) su densidad energética es mayor que la de los combustibles fósiles convencionales [6]; (b) también puede ser empleado como materia prima en pilas de combustible, las cuales pueden llegar a producir energía eléctrica con una eficiencia de hasta el 60 % [7], debido a que no están sujetas al ciclo de Carnot; es decir, es un proceso más eficiente que los motores de combustión interna cuyas eficiencias no superan el 35 %; y (c) adicionalmente no emite gases de efecto invernadero [8], lo que a mediano y largo plazo contribuye a

la desaceleración del cambio climático. Es así como el hidrógeno llegaría a jugar un papel importante en la gestión de energías renovables para la estabilización de la oferta y la demanda de energía térmica, eléctrica y motriz, tal como lo muestra la figura 1.

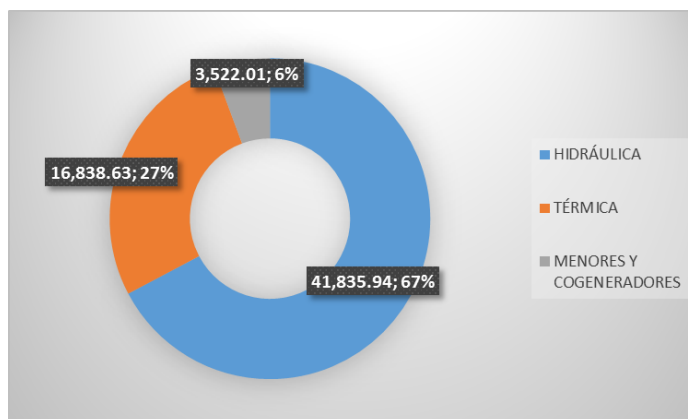


**Figura 1.** Modelo de demanda y suministro de hidrógeno [9].

En Colombia, al igual que en el mundo, se ha reconocido la importancia de incorporar las energías renovables dentro de la oferta energética nacional, especialmente para Zonas No Interconectadas (ZNI), toda vez que en el país actualmente la energía eléctrica es generada principalmente por plantas hidroeléctricas (alrededor de un 70 %) [10] y por plantas termoeléctricas alimentadas por combustibles fósiles, como se puede apreciar en la figura 2, para el año 2013. Bajo este esquema el valor por KW tiene un costo bajo en comparación con el costo asociado a la producción de energía eléctrica a partir de cualquiera de las formas de energía solar.

Por esta razón, la Ley 1715 por medio de la cual se regula la integración de las energías renovables no convencionales al sistema energético nacional, firmada el 13 de mayo de 2014, está principalmente enfocada a garantizar el suministro energético en las ZNI, porque se reconoce el gran potencial del país para diversificar la matriz energética actual, dada su ubicación geográfica privilegiada y estratégica para planear proyectos, empleando cada una de las opciones de energías renovables ya mencionadas.

La implementación de esta Ley, en un mediano y largo plazo, representa una oportunidad favorable para que las energías renovables se tornen económicamente viables también en las Zonas Interconectadas.



**Figura 2.** Composición de la generación del SIN (Sistema Inter-Conectado) en 2013, GWh. [11]

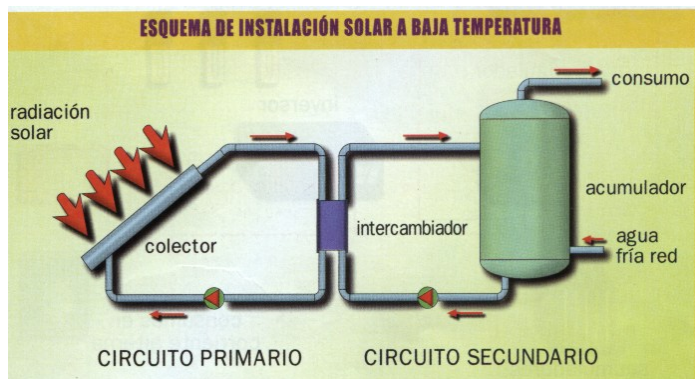
## 2. Energía solar

Como se ha mencionado son tres las formas principales de aprovechamiento directo de energía solar: solar térmica, solar fotovoltaica y solar de concentración, de las cuales las dos últimas son de particular interés para la producción de hidrógeno, como se expone más adelante.

Los sistemas de energía térmica de baja temperatura son considerados la primera forma de aprovechamiento de la energía solar, los cuales producen calor a partir de la radiación infrarroja del sol [12], para calentar un fluido a una temperatura máxima promedio de 100 °C [13], especialmente agua, para aplicaciones a nivel residencial, en climatización de piscinas, calefacción ambiental o procesos de secado [14]. El elemento captador de estos sistemas, como se puede observar en la figura 3, es el colector solar, que principalmente puede ser de placa plana o de tubos.

La temperatura que se alcanza en los sistemas de energía solar térmica mencionados no es suficiente para que estos puedan ser empleados de manera favorable en procesos termoquímicos como la descomposición de la molécula del agua o la generación de energía eléctrica que posteriormente se puedan aprovechar en un proceso electrolítico, y así producir hidrógeno.

La segunda vía para el aprovechamiento de la energía solar, es la energía solar fotovoltaica, la cual permite la generación directa de energía eléctrica a partir



**Figura 3.** Esquema básico de una instalación solar de baja temperatura con aplicación de agua caliente sanitaria [15].

de la radiación solar [16], a través de la “energía que los fotones de los rayos solares, le pueden ceder a la superficie de un material semiconductor, como lo son las placas fotovoltaicas fabricadas a partir de minerales semiconductores tales como el silicio” [2]. Este fenómeno es conocido como efecto fotovoltaico sin ciclos térmicos, mecánicos o reacciones químicas como lo mencionan Fonash, Green y Nelson [17]. El crecimiento a escala comercial de las aplicaciones basadas en la energía solar fotovoltaica se ha venido dando de manera paulatina con las mejoras en la tecnología, en donde el silicio sigue siendo el principal componente de las células o celdas fotovoltaicas de diferentes tipos y características, como se puede ver en la figura 4.

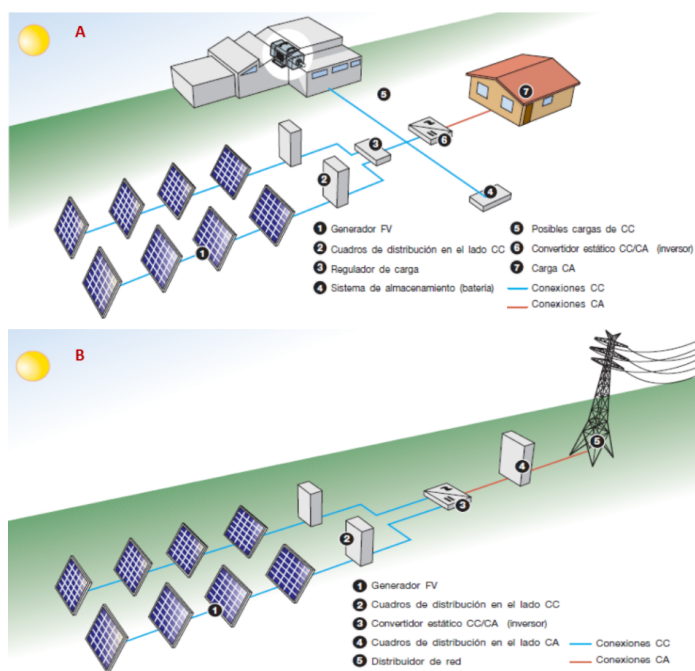
Las celdas son agrupadas dentro de un módulo fotovoltaico, en serie y en paralelo, con el propósito de “entregar la tensión y corriente adecuadas” [16]. La cantidad de energía eléctrica que genera un módulo de celdas fotovoltaicas depende del área expuesta a los rayos solares, es decir, del número de celdas agrupadas y de la correcta orientación de los módulos, puesto que, de acuerdo con la ubicación geográfica, varía el ángulo de incidencia de los rayos del sol sobre la superficie de la tierra y, en consecuencia, varía el nivel de radiación efectiva sobre el módulo fotovoltaico [16], por lo que se hace necesario establecer las condiciones más favorables para cada sitio. Una incorrecta instalación puede afectar no solo la eficiencia del módulo sino que puede causar daños en el mismo.

Los sistemas fotovoltaicos requieren de sistemas auxiliares que permiten el uso de la energía generada, tanto de sistemas aislados para autogeneración, como para sistemas conectados a red eléctrica, como se puede ver en la figura 5, porque los módulos generan corriente continua a un voltaje regularmente entre 12 y 48 V [2], razón por la cual se emplean diversas configuraciones de acuerdo con la aplicación.

La tercera vía para el aprovechamiento directo de la energía solar, son los sistemas de concentración solar térmica, también conocidos como energía solar

|               | Silicio monocristalino             | Silicio policristalino                              | Capa fina (silicio amorfo)                   |
|---------------|------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| $\eta$ célula | 14% - 17%                          | 12% - 14%                                           | monocristal 4-6%<br>tándem 7-10%             |
| Ventajas      | $\eta$ elevada                     | menor coste                                         | menor coste                                  |
|               | $\eta$ constante                   | producción más simple                               | influencia de la temperatura reducida        |
|               | tecnología fiable                  | dimensionamiento óptimo                             | mayor salida energética con radiación difusa |
| Desventajas   | mayor energía                      | sensibilidad a impurezas del proceso de fabricación | mayores dimensiones                          |
|               | cantidad necesaria para producción |                                                     | coste de estructura y tiempo de montaje      |

**Figura 4.** Comparación entre módulos fotovoltaicos de diferente tipo de Silicio [18].



**Figura 5.** A. Esquema de una planta FV aislada. B. Diagrama de una planta FV conectada a red eléctrica [18].

termoeléctrica o termosolar, cuyo objetivo principal es aprovechar la radiación directa, concentrando los rayos del sol, generalmente mediante espejos, para conseguir temperaturas suficientemente altas que permitan evaporar un fluido y dotarlo de una energía de expansión con el fin de hacer rotar los álabes de una turbina y así generar energía mecánica que, a través de un generador eléctrico, produzca energía eléctrica [19] [20]. Aunque la principal aplicación de los diferentes sistemas de concentración solar es la generación de energía eléctrica, de manera similar a una termoeléctrica convencional “basada en la conversión mecánica del calor y posteriormente la generación eléctrica en un alternador a partir de un movimiento mecánico rotativo” [21]; para integración a red eléctrica, es posible emplear la energía concentrada en procesos industriales termodinámicos, o como se verá más adelante es posible aprovecharla en la producción de hidrógeno para el almacenamiento, transporte y posterior aprovechamiento de la energía generada. Dicha producción se da principalmente mediante ciclos termoquímicos.

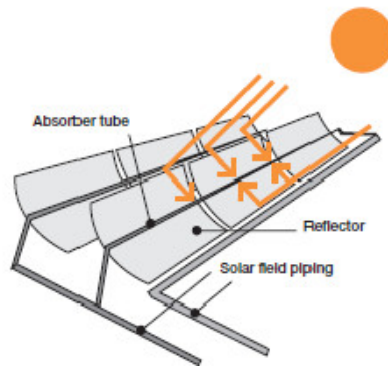
Las cuatro tecnologías más consolidadas para la concentración solar, están comprendidas por los sistemas de tipo linear, como los colectores cilindro parabólicos(1), y los sistemas Fresnel (2), sistemas de receptor central a torre (3) y los discos parabólicos con turbina o discos Stirling (4) [22]. En las figuras 6 a 12, se pueden observar las características diferenciadoras, puesto que hay varias condiciones de operación inherentes a todas las tecnologías, tal es el caso de la necesidad de un sistema de seguimiento solar que garantice la eficiencia en la captación del recurso solar.

Posterior al sistema de captación de energía solar concentrada, existen elementos comunes a todas las tecnologías cuando la aplicación final es la generación de energía eléctrica, un ejemplo de esto es el caso de las turbinas, los alternadores o los sistemas de almacenamiento térmico que emplean sales fundidas [23]. Es así como surge la oportunidad de integrar la producción de hidrógeno como un mecanismo para transportar la energía y aprovecharla en aplicaciones de otra índole.

Colombia dada su ubicación geográfica, tiene un alto potencial para la implementación de tecnologías que aprovechen la energía solar, puesto que el país cuenta con una radiación “promedio diario multianual cercano a 4,5 kWh/m<sup>2</sup> (destacándose la península de la Guajira, con un valor promedio de 6,0 kWh/m<sup>2</sup> y la Orinoquía con un valor un poco menor)” [31]. Con la certeza del recurso disponible, es necesario mencionar que la generación de energía a gran escala, a partir de fuentes como el sol, todavía no es económicamente viable en el país, por lo que las oportunidades están centradas en generación de energía eléctrica para Zonas No Interconectadas, o en aplicaciones en el sector agrícola e industrial; según lo establecido en la legislación más reciente.

### 3. Producción de hidrógeno empleando energía solar

En la actualidad, el hidrógeno se produce principalmente a partir de combustibles fósiles, con el fin de ser empleado en aplicaciones en diversos sectores como la industria química, el refino, la metalurgia, el vidrio o la electrónica. Los procesos



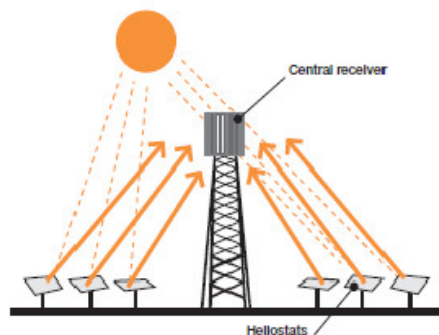
**Figura 6.** Colectores cilindro parabólicos. [26]. Concentra la radiación entre 30-80 veces. Potencia unitaria de 30 a 80 MW. Temperatura entre 200 y 400 °C.



**Figura 7.** Colectores cilindro parabólicos. [27]. Concentra la radiación entre 30-80 veces. Potencia unitaria de 30 a 80 MW. Temperatura entre 200 y 400 °C.



**Figura 8.** Colector lineal Fresnel [27]. Temperaturas entre 100 y 300 °C [28].



**Figura 9.** Sistemas de torre con recepción central [26]. Concentra la radiación entre 200-1000 veces. Potencias unitarias de 10 a 200 MW. Temperaturas alrededor de 1300 °C.

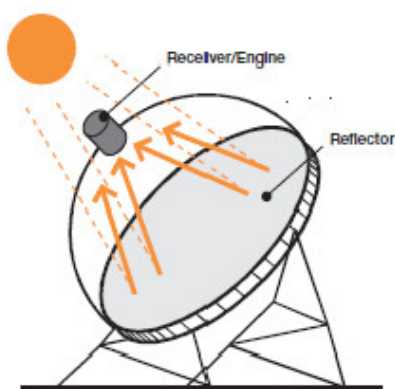


**Figura 10.** Sistemas de torre con recepción central [29]. Concentra la radiación entre 200-1000 veces. Potencias unitarias de 10 a 200 MW. Temperaturas alrededor de 1300 °C.

en los cuales se consume la mayor parte del hidrógeno producido hoy en día, son la síntesis del amoníaco, la hidrogenación en refinerías para obtener fracciones ligeras de crudo, el tratamiento del carbón, así como procesos de síntesis orgánica e inorgánica y en una escala más reducida, ha sido empleado como combustible en aplicaciones aeroespaciales [32].

La producción de hidrógeno con los métodos y tecnologías actuales, genera gases de efecto invernadero, favoreciendo negativamente el cambio climático, por esta razón y considerando que el hidrógeno es tan limpio como la fuente de energía que se emplee para producirlo, su integración a la cadena energética de las fuentes renovables de energía (figura 13), constituye una oportunidad altamente sostenible en sectores reconocidos por causar contaminación, como lo es caso del sector automotriz, y todas las aplicaciones móviles [33].

Con relación a las tecnologías para el aprovechamiento de la energía solar, se han desarrollado diversos métodos para producir hidrógeno, tal y como lo resume Montes en la figura 14. En esta, se pueden observar que las tres vías para su producción son fotoquímica, electroquímica y termoquímica. De estos



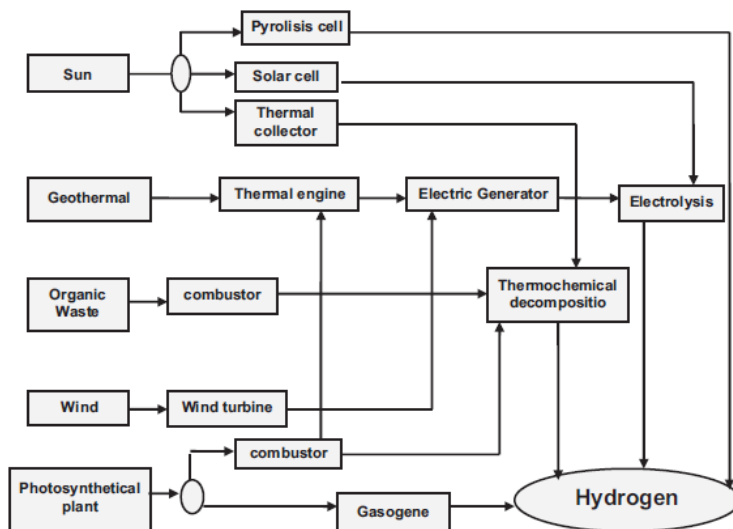
**Figura 11.** Discos parabólicos con motor Stirling [26]. Concentra la radiación entre 1000-4000 veces. Potencias unitarias de 5 a 25 MW. Temperaturas de hasta 1500 °C.



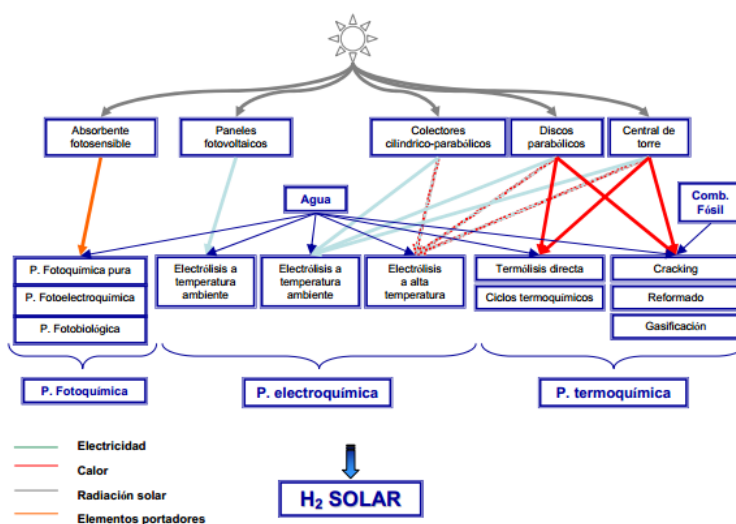
**Figura 12.** Discos parabólicos con motor Stirling [30]. Concentra la radiación entre 1000-4000 veces. Potencias unitarias de 5 a 25 MW. Temperaturas de hasta 1500 °C.

tres procesos, los que han tenido un mayor desarrollo técnico-económico, son los electroquímicos y los termoquímicos.

Los procesos electroquímicos consisten en emplear la energía eléctrica proveniente de un módulo fotovoltaico (figura 15), para alimentar un electrolizador, con el objetivo de fomentar una reacción no espontánea [36] y de esta forma obtener el hidrógeno por electrólisis del agua. También es posible emplear la energía eléctrica generada por un sistema de concentración solar para llevar a cabo electrólisis de alta temperatura, cuya ventaja es un menor requerimiento de energía eléctrica. La electrólisis, es el proceso principal de estos sistemas y consiste en la reacción electroquímica que separa la molécula del agua en hidrógeno y

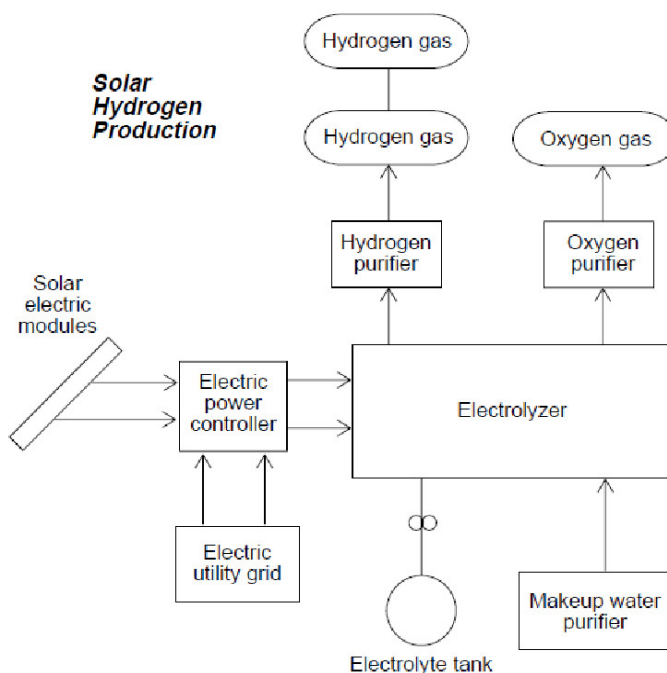


**Figura 13.** Técnicas para la producción de hidrógeno a partir de energías renovables [34].



**Figura 14.** Producción de hidrógeno, empleando energía solar [35].

oxígeno, mediante la aplicación de un voltaje o corriente eléctrica generalmente de tipo continua que promueve las reacciones de óxido-reducción [37], [38].



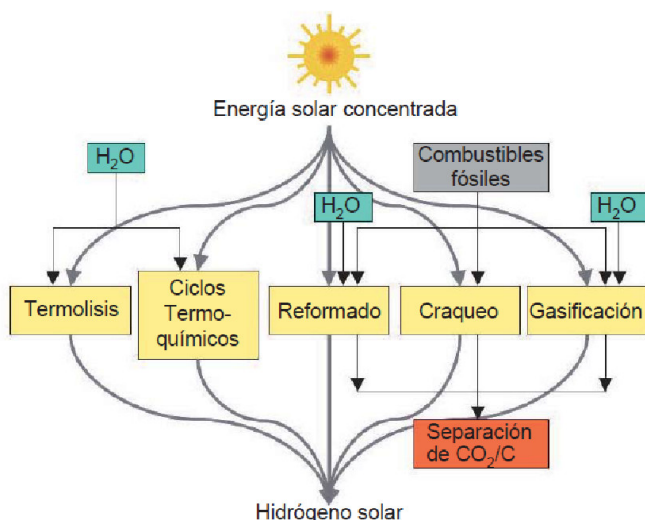
**Figura 15.** Producción de hidrógeno por electrólisis a partir de radiación solar [39].

El costo de la producción de hidrógeno mediante electrólisis a partir de energía solar fotovoltaica, es elevado, dado que la relación entre el volumen de hidrógeno generado, por superficie de sistemas fotovoltaicos de escala comercial, es baja. Por esta razón se continúa investigando en encontrar materiales para los electrodos que permitan aumentar el rendimiento de la electrólisis (realizándola a mayores temperaturas) como forma de disminuir los costos de producción y que en consecuencia, el proceso sea más competitivo y atractivo en el mercado.

Ahora bien, los procesos termoquímicos (figura 16) son aquellos que usan la energía solar como fuente de calor para producir reacciones químicas endotérmicas, tales como:

- Termólisis directa del agua: busca la disociación de la molécula de agua, utilizando energía solar, requiere temperaturas demasiado elevadas de alrededor de 2500 °C y la necesidad de poseer una técnica efectiva de separación del hidrógeno y el oxígeno formados, para evitar su mezcla explosiva, en consecuencia no existen proyectos a escala de planta piloto [40].

- Ciclos termoquímicos: descomposición del agua para obtener hidrógeno y oxígeno, mediante una serie de reacciones químicas endotérmicas y exotérmicas que constituyen ciclos compuestos de varias etapas. La mayor ventaja de este método es que el hidrógeno y el oxígeno se obtienen por separado (en etapas distintas) y no requiere temperaturas tan altas como en el caso de la termólisis directa. Sin embargo la existencia de varias etapas en estos ciclos, reduce el rendimiento total del proceso debido a la irreversibilidad asociada a cada una de las mismas [41].



**Figura 16.** Procesos termoquímicos para la producción de hidrógeno solar [42].

Estos procesos termoquímicos utilizan la radiación solar concentrada como fuente calorífica de alta temperatura para llevar a cabo reacciones endotérmicas. Para conseguir razones de concentración elevadas, se hace uso de dos de las tres configuraciones ópticas ya mencionadas: discos parabólicos y sistemas de torre, ya que con los colectores cilindro parabólicos no es posible alcanzar la temperatura requerida [35].

En la actualidad, se están adelantando diversas investigaciones con el fin de establecer ciclos termoquímicos que empleen menos etapas y, en consecuencia, sean más eficientes para ser implementados a gran escala porque los ciclos pueden consistir incluso de ocho reacciones que involucren hasta cinco elementos diferentes al hidrógeno y el oxígeno [43]. Los ciclos que emplean catalizadores basados en óxidos y en óxidos mixtos de diferentes metales de transición, al tener menor número de etapas, requerir temperaturas menos elevadas, una mayor eficiencia global del ciclo y permitir la recuperación del catalizador de forma más

sencilla; han sido los que mayor proyección han logrado, al punto que algunos de ellos han sido probados a escala de planta piloto, dentro de los que se destacan los óxidos de Zinc, de hierro, de manganeso y algunas ferritas. Dentro del amplio grupo de compuestos probados, los compuestos que más se han consolidado de acuerdo con diferentes publicaciones son el óxido de Cerio y la Ferrita de Níquel [44] [25] [45] [46].

Una vez sean establecidos los compuestos y ciclos más favorables en términos de eficiencia y rentabilidad económica, existen diversos proyectos de energía solar de concentración, tanto en Europa como en Estados Unidos, especialmente en el estado de California, que brindan la oportunidad de integrar la producción de hidrógeno rápidamente al proceso como una alternativa equiparable y posiblemente más eficiente que el almacenamiento en sales fundidas, que se emplea actualmente, para gestionar la energía generada [47].

El hidrógeno que es producido a partir de energía solar, debe ser captado y almacenado de manera tal que pueda ser empleado posteriormente en diferentes tipos de aplicaciones, principalmente móviles, es por eso que también se están adelantando numerosas investigaciones para establecer el método de almacenamiento más efectivo. Actualmente la tecnología más prometedora es el almacenamiento del hidrógeno en forma de hidruros metálicos que posteriormente puedan alimentar pilas de combustible, puesto que el almacenamiento en forma gaseosa, representa riesgos de seguridad y mayores requerimientos de volumen de gas, en comparación con sistemas que operan con gas natural. De igual forma se han desarrollado diferentes tecnologías para pilas de combustible tales como las membranas de intercambio protónico (PEM), para aplicaciones móviles de baja potencia y temperaturas de operación inferiores a 150 °C [48].

Es claro que los esfuerzos están concentrados en consolidar tecnologías en cada una de las etapas necesarias para que se consolide la economía del hidrógeno, del mismo modo que en el pasado se dio el establecimiento paulatino del modelo energético basado en los combustibles fósiles.

#### **4. Perspectivas para la implementación de la producción de hidrógeno solar en Colombia**

La implementación a nivel mundial de la producción de hidrógeno a partir de energías renovables en una escala comercial, está aún en etapa de maduración a nivel tecnológico y como modelo de negocio, pero sin duda alguna es una de las alternativas más interesantes y favorables para combatir el cambio climático y gestionar la energía proveniente de fuentes renovables. Esta es la razón por la cual se continúan llevando a cabo investigaciones serias, lideradas por entidades tales como el NREL (National Renewable Energy Laboratory), la IEA (International Energy Agency), cuyos resultados se espera ayuden a consolidar las diferentes etapas de la cadena de producción, almacenamiento y aprovechamiento del hidrógeno [49].

En Colombia, el hidrógeno es susceptible de ser incorporado a la cadena energética a través de los procesos que involucran la transformación de la energía

de la biomasa, como son la gasificación o la generación de hidrógeno a partir de microorganismos (algas o bacterias). Estos procesos presentan desventajas tales como el requerimiento de instalaciones de gran tamaño, así como procedimientos muy complejos para la captura y limpieza del hidrógeno [50], por lo que otra de las opciones viables e interesantes es emplear la energía solar en procesos electrolíticos y termoquímicos como los ya mencionados.

De acuerdo con lo anterior y dado el estado actual de desarrollo de cada una de las tecnologías, los procesos electrolíticos representan la oportunidad más clara para la producción de hidrógeno en un mediano plazo, especialmente en Zonas no Interconectadas, en donde es posible adelantar proyectos que impacten positivamente tanto en materia ambiental, como a nivel social.

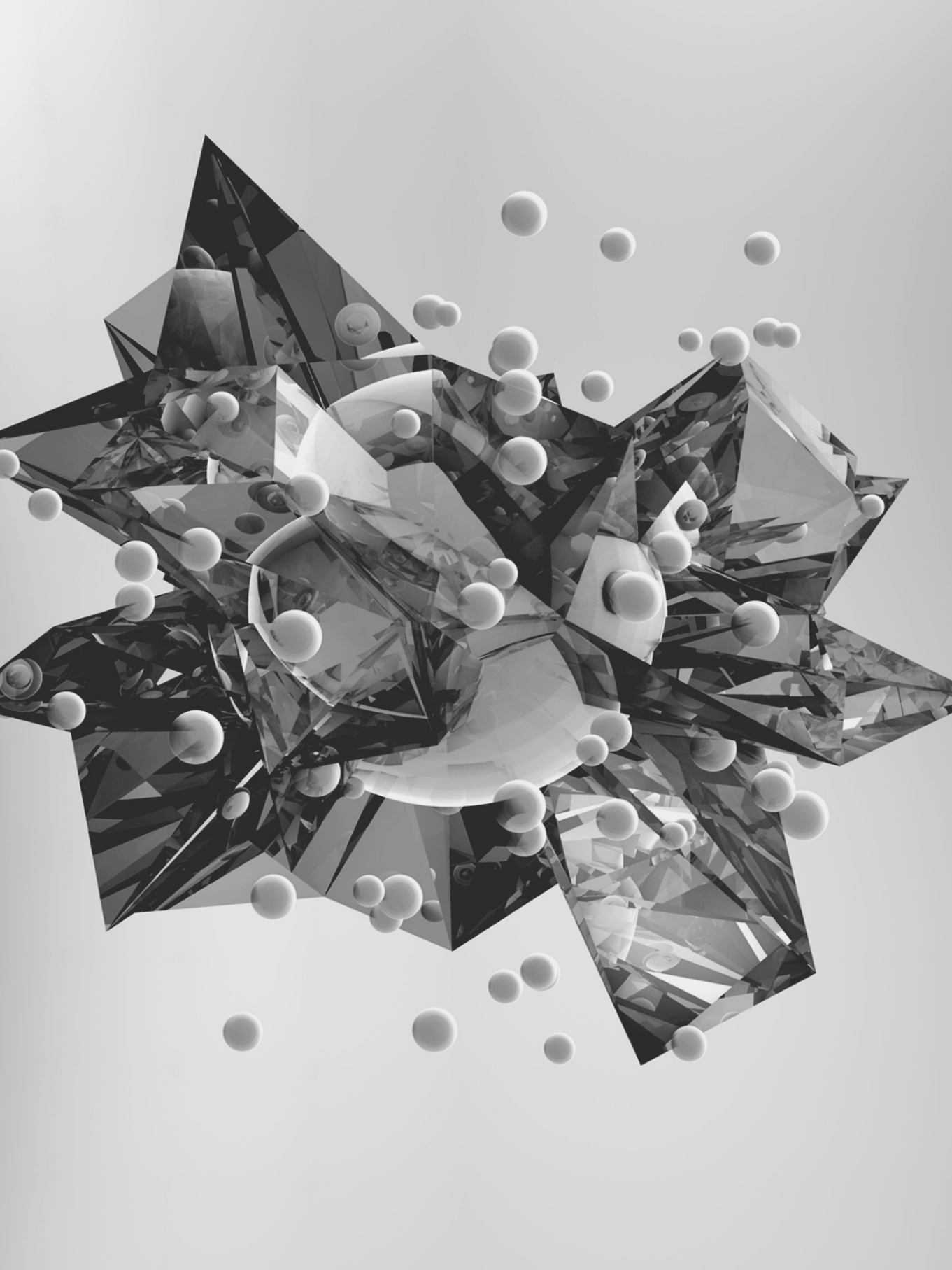
Los beneficios que brindan este tipo de proyectos están claramente reconocidos por diversas entidades como el Banco Interamericano de Desarrollo (BID) [51], quienes cuentan con programas de financiación y/o patrocinio para países en vía de desarrollo, como es el caso de Colombia. Es indudable entonces la importancia de implementar paulatinamente soluciones energéticas que aprovechen los recursos naturales renovables con los cuales cuenta el país, teniendo como primer escenario las zonas no interconectadas, con la finalidad de enriquecer y diversificar la oferta energética. Este panorama le permitirá a Colombia ser parte de los países líderes en el crecimiento sostenible.

## Referencias

1. I. p. o. c. change, Climate change 2007: Synthesis report, de IPCC Plenary XXVII, Valencia, España, 2007.
2. C. Orbeago y R. Arivilca, Energía solar fotovoltaica. Manual técnico para instalaciones domiciliarias, 2010. [En línea]. Available: [http://energiaverde.pe/wp-content/uploads/2010/06/Manual\\_ES\\_Fotovoltaica.pdf](http://energiaverde.pe/wp-content/uploads/2010/06/Manual_ES_Fotovoltaica.pdf).
3. J. A. R. Bermejo, Tesis doctoral: Análisis de la problemática e investigación de aspectos avanzados de la generación eléctrica de biomasa, Logroño (España): Universidad de la Rioja, 2013, p. 8.
4. C. J. Winter, R. L. Sizmann y L. L. Vant-Hull, Solar Power Plants. Fundamentals, Technology, Systems, Economics, Berlin: Springer-Verlag, 1991.
5. J. Rifkin, La economía del hidrógeno. La creación de la red energética mundial y la redistribución del poder en la tierra, Barcelona: Paidós, 2002.
6. R. R. G. N. K. G. Z Wang, Comparison of thermochemical, electrolytic, photoelectrolytic and photochemical solar-to-hydrogen production technologies, International journal of hydrogen energy, pp. 16287-16301, 2012.
7. K. Bennaceur, B. Clark, F. Orr, T. Ramakrishnan, C. Roulet y E. Stout, El hidrógeno, Un futuro portador energético?, 2005. [En línea]. Available: [http://www.slb.com/~media/Files/resources/oilfield\\_review/spanish05/sum05/p34\\_47.pdf](http://www.slb.com/~media/Files/resources/oilfield_review/spanish05/sum05/p34_47.pdf). [último acceso: 11 2014].
8. W. Lubitz y B. Tumas, Hydrogen: An overview, American Chemical Society, Chemical Reviews, vol. 107, n 10, pp. 3900-3903, 2007.
9. B. Schmitt, Pilus Energy, Enero 2011. [En línea]. Available: <http://pilusenergy.com/blog/black-gold-and-white-diamonds/>.

10. I. Mitsubishi research institute, U. N. d. Colombia y N. A. Inc, Sustainable energy and biofuel strategies for Colombia. Preliminary Report, BID, Ministerio de minas y energía, Bogotá D.C., 2010.
11. XM Compañía de expertos en mercados S.A. E.S.P., XM, 2014. [En línea]. Available: <http://informesanuales.xm.com.co/2013/SitePages/operacion/2-4-Generaci%C3%B3n-del-SIN.aspx>.
12. A. Labouret y M. Viloz, Solar Photovoltaic Energy, Cuarta ed., Herts, UK: The Institution of Engineering and Technology, 2010, p. 1.
13. SEDIGAS, Guía sobre aplicaciones de la energía solar térmica, España: Sedigas. Asociación española de del gas, 2013.
14. FOCER, Manuales sobre energía renovable. Solar térmica, San José de Costa Rica: FOCER Fortalecimiento de la capacidad de Energía renovable para América Central, 2002.
15. IDAE, José Manuel López-Cózar, Manuales de Energías renovables. Energía solar térmica, Madrid: IDAE, 2006.
16. O. P. Lamigueiro, Energía solar Fotovoltaica, Marzo 2013. [En línea].
17. G. M. Crawley y I. Rey-Stolle, The World Scientific Handbook of Energy, de The World Scientific Handbook of Energy, Singapore, World Scientific, 2013, p. 169.
18. ABB Group, Virtual Pro, 2011. [En línea]. Available: <http://www.revistavirtualpro.com/biblioteca/plantas-fotovoltaicas>.
19. J. González Velasco, Energías Renovables, de Energías Renovables, Barcelona, Reverte, 2009, p. 60.
20. S. Mishra y P. Tripathy, Solar Thermal electricity generating system, International Journal of advancements in research and technology, vol. 1, n 3, pp. 1-16, Agosto 2012.
21. Z. E. Romero M., Concentrating Solar Thermal Power., de Handboook of Energy Efficiency and Renewable Energy, Taylor & Francis Group, Boca Raton, Florida, 2007.
22. F. Bernadelli y CEPAL, Energía solar termodinámica en América Latina: Los casos de Brasil, Chile o México, Naciones Unidas, Santiago de Chile, 2010.
23. O. P. Akinjiola y U. B. Balachandran, Concentrated Solar Thermal (CST) Systemfor Fuelwood Replacement and Household Water Sanitation in Developing Countries, Journal of Sustainable development, vol. 5, n 6, pp. 25-34, 2012.
24. M. Romero y S. R. V.-H. L. Winter C.J., Bio-nica, 2014. [En línea]. Available: <http://www.bio-nica.info/biblioteca/RomeroEnergiaSolarTermoelectrica.pdf>.
25. T. Kodama y N. Gokon, Thermochemical cycles for high temperature solar hydrogen production, Chemical reviews, vol. 107, n 10, pp. 4048-4077, 2007.
26. Greenpeace, Solar Thermal Power 2020, 2003. [En línea]. Available: <http://www.greenpeace.org/international/en/publications/reports/solar-thermal-power-2020/>.
27. CIEMAT, CIEMAT, 2014. [En línea]. Available: <http://www.psa.es/webesp/instalaciones/parabolicos.php>.
28. J. A. Duffie y W. A. Beckman, Solar Engineering of Thermal Processess, Hoboken, New Jersey: John Wiley & sons Inc., 2013.
29. CIEMAT, CIEMAT, 2014. [En línea]. Available: <http://www.psa.es/webesp/instalaciones/receptor.php>.
30. Mi energía gratis, 2014. [En línea]. Available: <http://www.mienergiagratis.com/noticias/n000013.html>.
31. UPME, Atlas de radiación solar de Colombia, UPME, Bogotá, 2005.

32. G. San Miguel, J. Dufour, J. A. Calles y J. A. Botas, Asociación Española de Científicos, [En línea]. Available: [http://www.aecientificos.es/empresas/aecientificos/documentos/LA\\_ECONOMIA\\_HIDROGENO\\_2.pdf](http://www.aecientificos.es/empresas/aecientificos/documentos/LA_ECONOMIA_HIDROGENO_2.pdf).
33. UNEP, The hydrogen economy. A non technical review, UNEP, 2006.
34. S. Koumi Ngho y D. Njomo, An overview of Hydrogen gas production from solar energy, Renewable and sustainable energy reviews, pp. 6782-6792, 2012.
35. M. J. Montes, A. Abánades y J. M. Martínez-Val, Energía sostenible, [En línea]. Available: <http://www.energiasostenible.net/DVD/H2solar.pdf>.
36. Fuel Cell Today, Fuel cell Today, Mayo 2013. [En línea]. Available: [http://www.fuelcelltoday.com/media/1871508/water\\_electrolysis\\_renewable\\_energy\\_systems.pdf](http://www.fuelcelltoday.com/media/1871508/water_electrolysis_renewable_energy_systems.pdf). [último acceso: 11 11 2014].
37. J. S. H. Sand, Electroquímica y análisis electroquímico, Madrid: Aguilar, 1952.
38. F. Scholtz, Teaching pH measurements with a student-Assembled combination Quinhydrone electrode, Journal of chemical education, vol. 82, n 5, 2005.
39. W. Pyle, J. Healy y R. Cortez, Solar Hydrogen Production by electrolysis, Home Power, vol. 39, pp. 32-38, 1994.
40. S. R. Fernández, Revisión bibliográfica sobre la producción de hidrógeno, Informes técnicos Ciemat, Madrid, 2007.
41. C. Perkins y A. W. Weimer, Likely near-term solar-thermal water splitting technologies, International Journal of Hydrogen Energy, vol. 29, n 15, pp. 1587-1599, 2004.
42. A. Steinfeld, Solar thermochemical production of hydrogen—a review, Solar Energy, vol. 78, n 5, pp. 603-615, 2005.
43. J. E. Funk, Hydrogen production, 10th World Hydrogen Energy Conference, US, 1994.
44. S. Abanades y G. Flamant, Thermochemical hydrogen production from a two-step solar driven water-splitting cycle based on cerium oxides, Solar energy, vol. 80, n 12, p. 1611-1623, 2006.
45. K. Wegner y A. Steinfeld, In situ formation and hydrolysis of Zn nanoparticles for H<sub>2</sub> production by the two step ZnO/Zn water-splitting thermochemical cycle, International Journal Hydrogen Energy, vol. 31, n 1, p. 55-61, 2006.
46. F. Fresno, R. Fernández Saavedra, M. B. Gómez Mancebo, A. Vidal, M. Sánchez, M. I. Rucandio, A. Quejido y M. Romero, Solar hydrogen production by two-step thermochemical cycles: evaluation of the activity of commercial ferrites, International Journal of Hydrogen Energy, vol. 34, n 7, p. 2918-2924, 2009.
47. European commission, Concentrating solar power from research to implementation, European Communities, Bélgica, 2007.
48. H. Abdel-Aal y E. El-Shenawy, Integration of Sustainable Energy Sources with hydrogen vector with case studies, Journal of Energy and power sources, vol. 1, n 3, pp. 147-151, 2014.
49. J. I. Levene, M. K. Mann, R. Margolis y A. Milbrandt, An Analysis of hydrogen production from renewable electricity sources, NREL (National renewable energy laboratory), Orlando, Florida, 2005.
50. European Commission, European Commission, 2003. [En línea]. Available: [http://ec.europa.eu/research/energy/pdf/hydrogen-report\\_en.pdf](http://ec.europa.eu/research/energy/pdf/hydrogen-report_en.pdf). [último acceso: 11 2014].
51. Banco Interamericano de Desarrollo, OLADE, Mayo 2010. [En línea]. Available: [http://www.olade.org/electricidad/Documents/ponencias/Dia%2026%20de%20mayo/Sesion%202/Natacha\\_Marzolf\\_Mayo\\_2010.pdf](http://www.olade.org/electricidad/Documents/ponencias/Dia%2026%20de%20mayo/Sesion%202/Natacha_Marzolf_Mayo_2010.pdf). [último acceso: Noviembre 2014].



# Análisis de la distribución del tamaño de *partícula de agregados de porfirinas* por dispersión dinámica de luz

## Analysis of the Porphyrin Additive Particle per Light Dynamic Dispersion

Carlos E. Díaz-Uribe\*, William A. Vallejo

Grupo de Investigación en Fotoquímica y Fotobiología. Programa de Química. Facultad de Ciencias Básicas. Universidad del Atlántico. Barranquilla, Colombia.

FECHA DE ENTREGA: 28 DE ABRIL DE 2015

FECHA DE EVALUACIÓN: 30 DE MAYO 2015

FECHA DE APROBACIÓN: 3 DE JUNIO DE 2015

**Resumen** La formación de sus agregados recibe considerable interés debido a las distintas aplicaciones ópticas y electrónicas. La *distribución del tamaño de partícula* es una propiedad fundamental para caracterizar sistemas de partículas en suspensión de agregados moleculares. En este trabajo se estudió la distribución del tamaño de partícula de agregados de tetracarboxifenilporfirinas de Zn (TCPPZn) y Cu (TCPPCu) en solución. Los compuestos fueron sintetizadas utilizando la metodología desarrollada por Achar. Las tetracarboxifenilporfirinas fueron caracterizadas por espectrofotometría y el tamaño de partícula en solución fue determinado por Espectroscopia de Correlación Fotónica (ECF). Los resultados de espectro fotometría mostraron las señales características de tetracarboxifenilporfirinas; adicionalmente el estudio del tamaño de agregados mostró un valor promedio de 5419 nm para los agregados de TCPPZn, mientras que para la TCPPCu fue de 5560 nm.

**Abstract** Porphyrins are essential compounds involved in a variety of processes, the formation of its aggregates received considerable interest due to the different optical and electronic applications. The distribution of the particle size is a critical property for characterizing systems of particles in suspension of molecular aggregates. In this paper we studied the distribution of the particle size of aggregates of tetracarboxyphenylprophyrins of Zn (TCPPZn) and Cu (TCPPCu). Compounds were synthesized using the methodology developed by Achar. Compounds were characterized by UV-Vis spectrophotometry and the particle size in solution was determined through Photon Correlation Spectroscopy. Spectrophotometry results showed typical signals to tetracarboxyphenylprophyrins, furthermore, the study of aggregate size showed a mean value of 5419 nm for aggregates of TCPPZn while for TCPPCu was 5560 nm.

---

\* carlosdiaz@mail.uniatlantico.edu.co

**Palabras Clave:** porfirina, agregados, tamaño de partícula.

**Keywords:** porphyrin, aggregates, particle size.

## 1. Introducción

Las porfirinas son compuestos esenciales involucrados en una diversidad de procesos, y participan en una serie de procesos biológicos de gran relevancia para los seres vivos como son: la catálisis bioquímica, la transferencia electrónica, el transporte y activación de oxígeno y la fotosíntesis [1], [2], [3]. Ellas son utilizadas como sensibilizadores debido a su alta absorción en la región visible [4], en procesos de terapia fotodinámica antimicrobiana [5], en celdas solares [6] y para la modificación de electrodos [7].

Los sistemas basados en porfirinas son muy interesantes tanto en el punto sintético como supramolecular [8]. La formación de agregados de porfirinas ha recibido considerable atención debido a las diversas aplicaciones ópticas y electrónicas [9], [10]. Los agregados de porfirinas se pueden formar en solución en forma de fibras, cintas y tubos por la libre asociación o los distintos métodos de agregación [11]. El carácter bidimensional de la molécula de porfirina con 22 electrones  $\pi$  permite una fuerte interacción  $\pi$ - $\pi$ , facilitando la formación de nanoestructuras unidimensionales tales como los agregados tipo J y H a través del apilamiento lado a lado y cara a cara respectivamente [12], [13].

La técnica de dispersión de luz dinámica permite determinar el tamaño de partículas en suspensión hasta rangos del orden de los nanómetros, el uso del movimiento Browniano de las partículas en suspensión permite alcanzar estos límites de sensibilidad, adicionalmente este método no altera de ninguna manera la matriz de estudio debido a que es una técnica no destructiva. En este trabajo se utilizó esta técnica con el fin de estudiar la distribución del tamaño de partícula de agregados de tetracarboxifenilporfirinas de cobre y zinc.

## 2. Metodología

### 2.1. Síntesis y caracterización de las tetracarboxifenilporfirinas

La tetracarboxifenilporfirina sin metal (TCPP) se sintetizó añadiendo 30 mmol de pirrol previamente destilado a una mezcla de 4-carboxibenzaldehído (30 mmol), ácido propiónico (105 mL) y nitrobenzeno (45 mL). La mezcla se calentó a 120 °C durante 1h. El solvente se removió por destilación al vacío y el sólido obtenido se disolvió con una solución de NaOH (0,1 M). La porfirina se precipitó con una solución de HCl 0,1 M, se disolvió en etanol y se cristalizó por evaporación del solvente [14]. Las metaloporfirinas (TCPPM) se prepararon colocando a reflujo la TCPP (0,33 mmol) con cloruro de cobre (II) decahidratado o acetato de zinc (II) dihidratado (cantidades correspondientes a 1,82 mmol) en N,N'-dimetilformamida (70 mL) durante 2 h, para las porfirinas de Cu y Zn respectivamente. La N,N'-dimetilformamida se removió por destilación y la

TCPPM se precipitó, adicionando agua. El precipitado se disolvió en una solución de NaOH (0,1 M) y se recrystalizó con una solución de HCl (1 M). Finalmente, las porfirinas se filtraron y secaron a temperatura ambiente. Los espectros UV-vis de las porfirinas en etanol se registraron usando un espectrofotómetro Hewlett-Packard 8453.

## 2.2. Caracterización del tamaño de partícula por dispersión dinámica de luz

El tamaño de partícula en suspensión fue determinado mediante la técnica de dispersión dinámica de luz (espectroscopia de correlación fotónica). El equipo utilizado fue un Zetasizer versión 6.2 de Malvern Instruments Ltda. Para el análisis se tomó 1 g/L de la TCPPM en etanol como medio dispersante. Todos los experimentos se midieron mediante dispersión dinámica, el cual mide las fluctuaciones de la intensidad de la dispersión en función del tiempo. La distribución de intensidad vista en el programa DLS se obtuvo por el análisis de la función de correlación por el análisis del menor de los cuadrados no negativo.

## 3. Resultados y discusión

### 3.1. Espectrofotometría

El espectro UV-vis de la TCPM presenta una banda de absorción Soret a 419 nm (transición  $a_{1u}(\pi) - e_g^*(\pi)$ ), y 4 bandas Q (514, 548, 588 y 645 nm) características de la porfirina no metálica, correspondientes a transiciones  $a_{2u}(\pi) - e_g^*(\pi)$  (figura 1) [15].

Los espectros UV-vis de las metaloporfirinas exhiben una banda Soret y dos bandas Q para la TCPMZn y 1 banda Q para la TCPMCu. La disminución del número de bandas Q es típico de las metaloporfirinas. Cuando el ión metálico se coordina con los átomos de nitrógeno del macrociclo, la simetría de la molécula se incrementa y el número de bandas Q decrece [16]. En el cuadro 1 se muestran los máximos de absorción de las porfirinas.

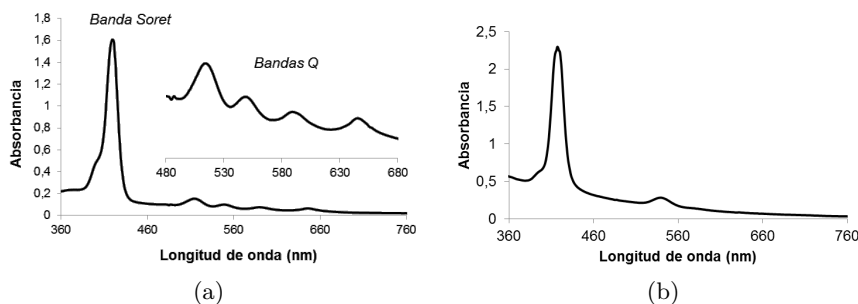


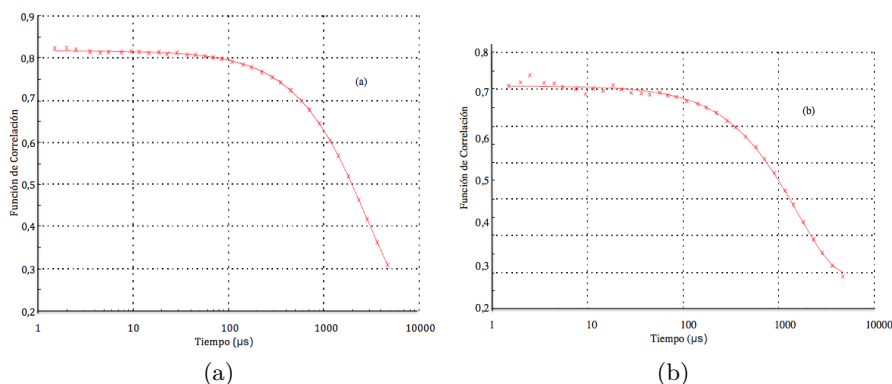
Figura 1. Espectro UV-vis de: (a)TCPM y (b) TCPMCu.

| Porfirina | Banda Soret $\lambda_{max}$ (nm) | Bandas Q $\lambda_{max}$ (nm) |
|-----------|----------------------------------|-------------------------------|
| TCPP      | 419                              | 514, 548, 588 y 645           |
| TCPPZn    | 420                              | 541, 579                      |
| TCPPCu    | 417                              | 539                           |

**Cuadro 1.** Bandas máximas de absorción UV-vis para las porfirinas.

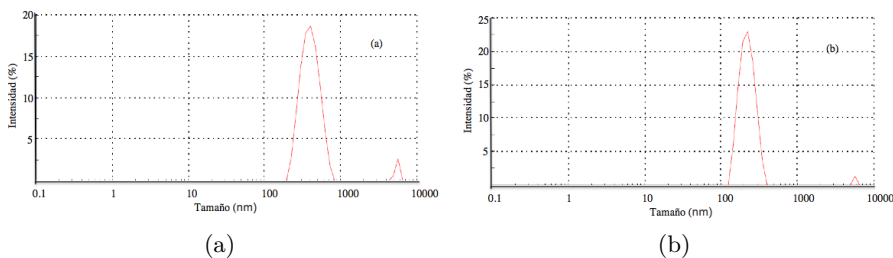
### 3.2. Caracterización por dispersión dinámica de luz

La figura 2 muestra la calidad del ajuste de cumulantes a los datos medidos. Los resultados indican que el diámetro calculado y la dispersidad obtenida para las partículas medidas son fiables. En ellas se puede ver que las funciones de autocorrelación de la intensidad de luz dispersada disminuyen más rápidamente después de los 1000  $\mu$ s.

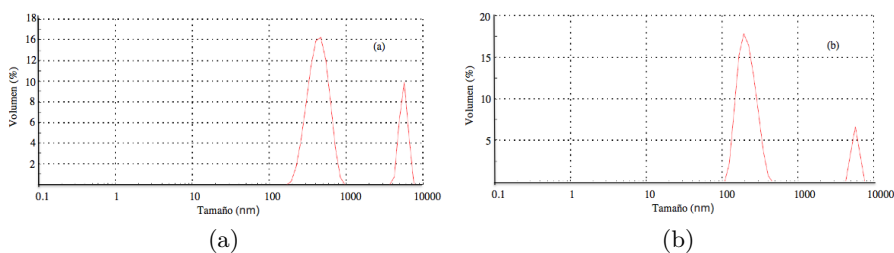
**Figura 2.** Función de autocorrelación de luz dispersada (a) TCPPZn (b) TCPPCu.

Los resultados en intensidad muestran dos picos para ambas porfirinas (figura 3), esto sugiere la formación de dos grupos de partículas: las primeras (100nm - 1000nm) corresponden a un grupo de partículas pequeñas y las otras partículas con mayores tamaños (5000nm - 6000nm) posiblemente como resultado de agregación de la porfirinas. También se puede observar que la intensidad de la formación de agregados es menor para la TCPPCu, esto posiblemente puede deberse a la interrupción de la planaridad del anillo macrociclo. El diámetro de partícula promedio para los agregados de TCPPZn es de 5419 nm mientras que para la TCPPCu es de 5560 nm.

Las gráficas de volumen en función del tamaño de partícula, confirman que hay dos tipos de partículas (figura 4), esto confirma la posible formación de agregados de las porfirinas.

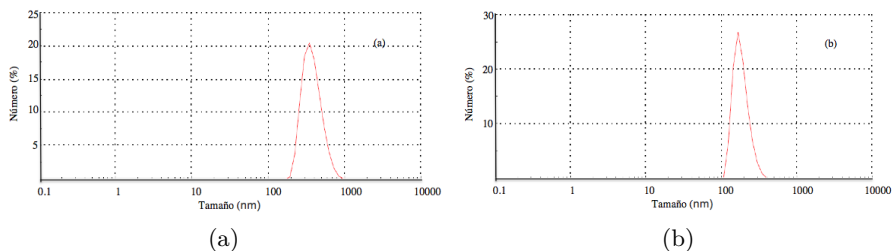


**Figura 3.** Estudio de DLS en intensidad: (a) TCPPZn y (b) TCPPCu.



**Figura 4.** Distribución del volumen en función del tamaño de partícula (a) TCPPZn (b) TCPPCu.

En la figura 5 se muestran las gráficas del tamaño de partícula en función del número de partículas. Se puede observar que en ambos casos hay una señal, esto se debe a que la cantidad de partículas mayores que se encuentran agregadas es muy baja proporción, lo que no permite generar señal en el análisis.



**Figura 5.** Distribución del número de partículas (a) TCPPZn (b) TCPPCu.

## 4. Conclusiones

Fue posible sintetizar tetracarboxifenilporfirinas utilizando la metodología de Achar, los resultados de espectrofotometría mostraron las señales típicas de tetracarboxifenilporfirinas.

Mediante la técnica de dispersión dinámica de luz fue posible determinar el número de tipo de partículas dispersas en etanol, las partículas de mayor tamaño son posiblemente debido a la formación de agregados.

También fue posible verificar que hay mayor formación de agregados para la TCPPZn que para la TCPPCu.

Finalmente los resultados obtenidos son relevantes debido a la portencial aplicación de las tetracarboxifenilporfirinas en la sensibilización de fotoelectrodos de  $\text{TiO}_2$  en sistemas fotocatalíticos y fotovoltaicos.

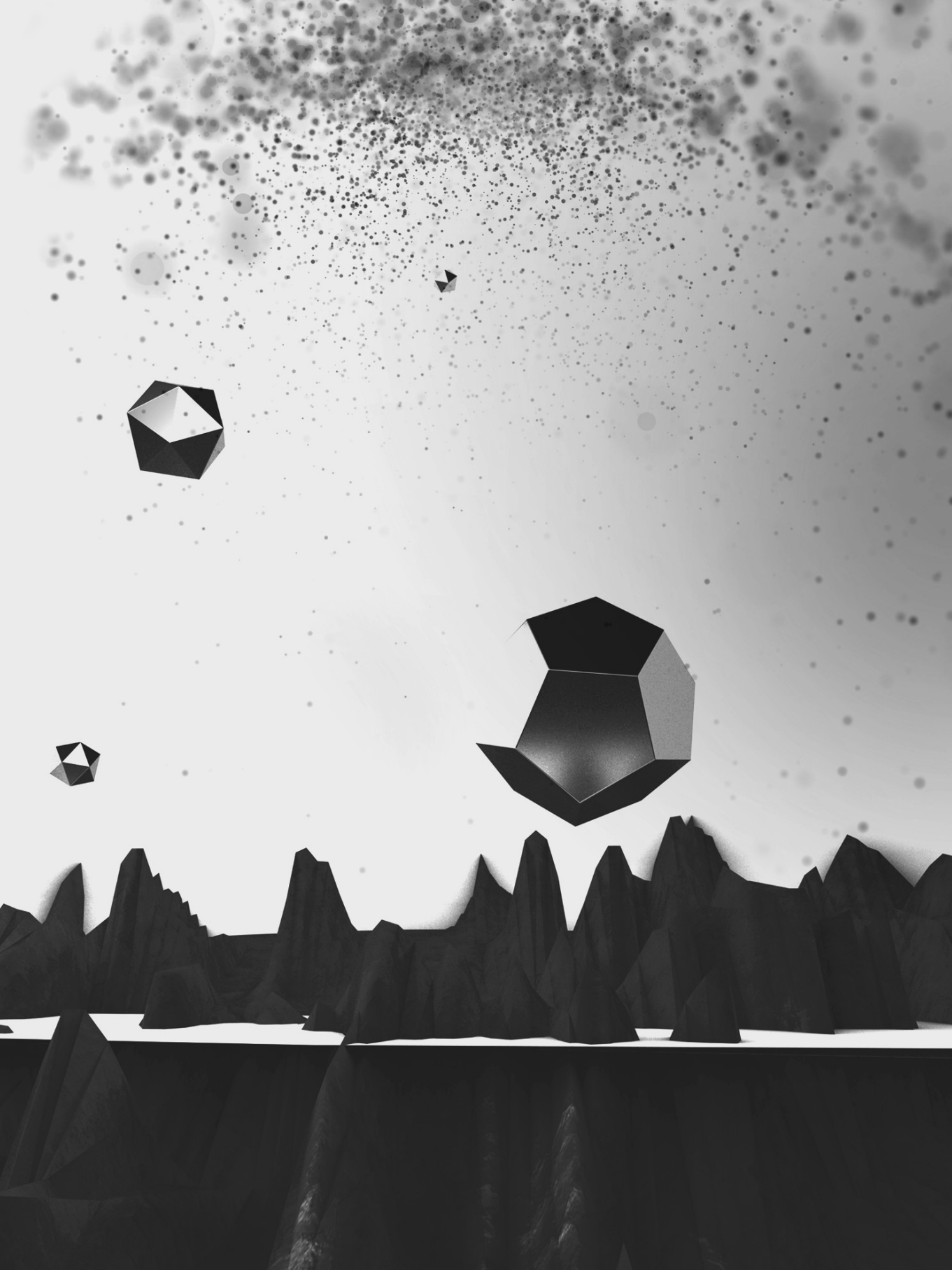
## Agradecimientos

Los autores agradecen al profesor Fernando Martínez Ortega de la Universidad Industrial de Santander, Colombia, por el análisis de DLS.

## Referencias

1. Valez, V.; Cassina A.; Batinic-Haberle, I.; Kalyanaraman, B.; Ferrer-Sueta, G.; Radi, R. Arch. Biochem. Biophys. 2013, 529, 45-54.
2. Pessoto, F.; Mayumi, N.; Nepomuceno, M.; Ruggiero, A.; Nascimento, O.; Vercesi, A.; Nantes, I. Chem-Biol. Interact. 2009, 181, 400-408.
3. Bottari, G.; Trukhina, O.; Ince, M.; Torres, T. Coord. Chem. Rev. 2012, 256, 2453-2477.
4. Díaz-Uribe, C.E., Daza, M., Martínez, F.; Páez-Mozo, E.; Guedes, C.; Di Mauro, E. J. Photochem. Photobiol. A: Chem. 2010, 215, 172-178.
5. Hanakova, A.; Bogdanova, K.; Tomankova, K.; Pizova, K.; Malohlava, J.; Binder, S.; Bajgar, R.; Langova, K.; Kolar, M.; Mosinger, J.; Kolarova H. Microbiol. Res. 2014, 169, 163-170.
6. Luechai, A.; Pootrakulchote, N.; Kengthanomma, T.; Vanalabhapatana, P.; Tham-yongkit, P. J. Org. Chem. 2014, 753, 27-33.
7. García, M.; Aguirre, M.; Canzi, G.; Kubiak, C.; Ohlbaum, M.; Isaacs, M. Electrochim. Acta. 2014, 115, 146-154.
8. Villari, V.; Mineo, P.; Scamporrino, E.; Micali, N. Chem. Phys. 2012, 409, 23-31.
9. Gonçalves, P.J.; Corrêa, D.S.; Franzen, P.L.; Boni, L.; Almeida, L.M.; Mendonça, C.R.; Borissevitch, I.E.; Zílio, S.C. Spectrochim. Acta. 2013, 112, 309-317.
10. Hamer, M.; Tomba, J.; Rezzano I. Sensor. Actuat. B: Chem. 2014, 193, 121-127.
11. Rotomskis, R.; Augulis, R.; Snitka, V.; Valiokas, R.; Liedberg, B. J. Phys. Chem. B. 2004, 108, 2833-2835.
12. Li, X.; Zhang, L.; Mu, J. Colloid. Surface. A. 2007, 311, 187-190.
13. Würthner, F.; Kaiser, T.E.; Saha-Möller, C.R. Angew. Chem. Int. 2011, 50, 3376-3378.
14. Adler, A.D.; Longo, F.R.; Finarelli, J.D.; Goldmacher, J.; Assour, J.; Korsakoff, L. J. Org. Chem. 1967, 32, 476-476.
15. Gouterman, M.; Wagnière, G.H.; Snyder, L.C. J. Mol. Spectrosc. 1963, 11, 108-127.
16. Zheng, W.; Shan, N.; Yu, L.; Wang, X. Dyes Pigm. 2008, 77, 153-157.





# Ingeniería del mantenimiento industrial y gestión del conocimiento. Mejora en la eficiencia de las empresas

## Industrial Maintenance Engineering and Knowledge Management. Improvement in Business Efficiency

Francisco Javier Cárcel-Carrasco\*

Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.

FECHA DE ENTREGA: 10 DE NOVIEMBRE DE 2014

FECHA DE EVALUACIÓN: 27 DE ENERO DE 2015

FECHA DE APROBACIÓN: 27 DE ENERO DE 2015

**Resumen** En este artículo se muestra el nivel estratégico que, para las empresas con activos físicos, supone una adecuada gestión del conocimiento en la ingeniería del mantenimiento industrial. Por las peculiaridades propias que se dan normalmente en este tipo de actividad fundamental de la empresa, el conocimiento de los operarios y técnicos que operan en las áreas de mantenimiento está fuertemente basado en su experiencia (fuerte componente tácito), difícil de medir y articular, y sin embargo, en numerosas ocasiones, esta rotura de la información-conocimiento, puede suponer un alto coste para la empresa, muchas veces asumido como algo que afrontar, debido al incremento de tiempos de parada de producción y servicios, pérdidas de eficiencia energética, o tiempo de acoplamiento de nuevo personal a estas áreas. Este artículo muestra una reseña sobre dos libros de investigación que tratan sobre este tema, publicados tras una investigación de campo aplicada en empresas industriales reales europeas, que marcan las consecuencias de disponer el conocimiento en islas, así como las mejores medidas cuando se produce una adecuada gestión del conocimiento.

**Abstract** This article demonstrates the strategic level involving management of knowledge in industrial maintenance engineering for businesses with physical assets. The peculiarities that occur normally in this type of basic activity of the company, knowledge of operators and technicians working in the areas of maintenance is strongly based on your experience (strong tacit component), difficult to measure and articulate, however, on numerous occasions, this break of information-knowledge, can signify a high cost for the companies taken as something to deal with, due to the increase of downtimes of production and services, loss of efficiency,

---

\* [fracarc1@csa.upv.es](mailto:fracarc1@csa.upv.es)

or time of coupling of new personnel to these areas. This article shows a review of two books of research dealing with this topic, published after a field investigation applied to real industrial companies that make the consequences of having knowledge on islands, as well as measures improvements when there is an adequate knowledge management.

**Palabras Clave:** eficiencia energética, mantenimiento industrial, gestión del conocimiento, industria agroalimentaria.

**Keywords:** energy efficiency, industrial maintenance, management of knowledge, food industry.

## 1. Introducción

La ingeniería del mantenimiento industrial requiere de conocimientos técnicos muy específicos, un alto requerimiento de experiencia del personal que lo desenvuelve, con un alto componente de conocimiento tácito, y con poca tradición en transcribir las experiencias que se producen. La adecuada gestión del conocimiento y la aplicación del conocimiento adquirido en las actividades rutinarias de mantenimiento en la empresa, y su mejora, puede ser observado como un factor o proceso importante que puede influir positivamente en diversas acciones que afectan estratégicamente a toda la empresa, y entre ellas, las acciones que afectan a la fiabilidad, operación en explotación y la eficiencia energética.

Aunque existen muchos estudios teóricos sobre cómo aplicar técnicas de gestión del conocimiento en organizaciones o en empresas de carácter general, en la literatura actual no existen estudios empíricos de su aplicación a una organización de mantenimiento industrial de una empresa, enfocados a mejorar sus acciones estratégicas fundamentales (la mantenibilidad, la fiabilidad y la eficiencia energética).

Durante un periodo de dos años se realizó un estudio exploratorio y de campo para ver la incidencia de la adecuada gestión del conocimiento en empresas industriales europeas con importante equipo humano en las áreas de mantenimiento operativo. Posteriormente tras los datos de campo obtenidos, se planteó y aplicó un modelo de mantenimiento industrial basado en la gestión del conocimiento en una empresa de primer orden, obteniéndose resultados que fueron contrastados tras un periodo continuo de tres años. Del resultado de estas investigaciones se publicaron dos libros de investigación en la editorial científica Omnia Science [1] [2] (publicados en *open access*, para descarga libre, por parte de cualquier investigador interesado) (Figura 1). Estos libros son “La gestión del conocimiento en la ingeniería del mantenimiento industrial: Investigación sobre la incidencia en sus actividades estratégicas”. Omnia Science, 2014. ISSN 978-84-941872-7-8 y “Planteamiento de un modelo de mantenimiento industrial basado en técnicas de gestión del conocimiento”. Omnia Science, 2014. ISSN 978-84-941872-8-5.

En los puntos siguientes del artículo, se comentan los aspectos fundamentales de estas publicaciones objeto de la investigación de campo en esta área.



**Figura 1.** Portadas de los libros de investigación publicados en referencia a la gestión del conocimiento en la ingeniería del mantenimiento industrial.

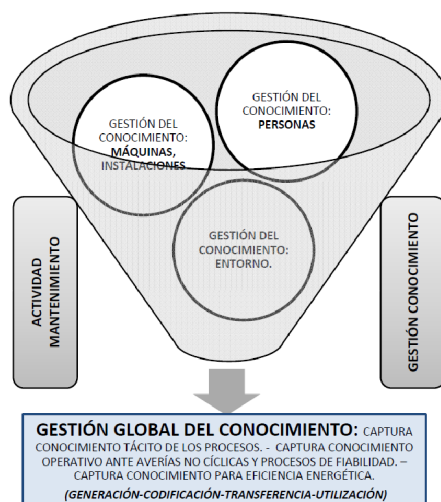
## 2. La gestión del conocimiento en la ingeniería del mantenimiento industrial

En el libro de investigación “La gestión del conocimiento en la ingeniería del mantenimiento industrial: Investigación sobre la incidencia en sus actividades estratégicas” [1], se estudian e identifican en dos etapas las características del mantenimiento industrial y la gestión del conocimiento. La primera etapa, está orientada a la identificación del estado de la situación del mantenimiento, los principios y técnicas de la gestión del conocimiento, y la descripción de los modelos organizativos de mantenimiento industrial y sus misiones estratégicas fundamentales en relación al conocimiento y la experiencia, estableciendo la evolución y el estado del arte de esta materia y los mecanismos en relación a la transmisión de la información , y en especial, al conocimiento tácito.

En una segunda etapa, se analizan mediante estudios cualitativos con entrevistas, cuestionarios y encuestas preparadas y analizadas en un entorno industrial, los aspectos estratégicos del mantenimiento en relación a la fiabilidad (o confiabilidad), la mantenibilidad, la eficiencia energética y la operatividad en explotación, con el fin de establecer y confirmar los mecanismos de captación, generación, transmisión y utilización del conocimiento estratégico que se usan en la propia organización de mantenimiento.

El proceso de gestión del conocimiento integrado básicamente, por la generación, la codificación, la transferencia y la utilización del conocimiento aplicado a la actividad táctica del mantenimiento, puede tener un enfoque kantiano en el

cual interactúan personas, instalaciones y entorno (Figura 2), en el cual deben ser estudiadas todas las variables en conjunto.



**Figura 2.** Enfoque kantiano de la actividad de mantenimiento.

Hay que tener en cuenta los problemas más frecuentes y críticos, en relación al conocimiento tácito y la gestión del conocimiento con los que los especialistas y técnicos de mantenimiento se encuentran, varios. A continuación se listan los que se deben tener en cuenta en este tipo de organizaciones.

- Cambios de personal de la plantilla (pérdida del conocimiento de la persona que causa baja).
- Poca experiencia de los operarios (tiempo en formar conocimiento para ser operativo en el entorno).
- Falta de información de medidas a tomar y pasos a seguir ante ciertas averías o incidencias (Conocimiento ante actuaciones no registradas).
- Dependencia del conocimiento y experiencia tácita de los operarios (Conocimiento que hace cautiva a la empresa).
- Históricos de avería y análisis de causas imperfectos (Conocimiento incompleto o mal documentado).
- Desorganización de la información acerca de las instalaciones (Conocimiento explícito mal organizado o no actualizado (planimetría, manuales, procedimientos)).
- Carencia de sistemas de aprendizaje y reciclaje del personal (Adquisición del conocimiento útil y aplicado).
- Actuación ante averías críticas, de emergencia o no cíclicas (conocimiento crítico de graves efectos económicos).

Todos estos problemas fundamentales, aunque simples en definición y de apariencia banal, pueden tener graves consecuencias en el proceso productivo que afectarán sin duda a la empresa, aunque muchas veces asumidos. Son problemas complejos de tratar y procesar, dada la alta dependencia del factor humano, requiere de un compromiso global con unas dotaciones de medios y un seguimiento a largo plazo, mostrando con ello la dificultad de las empresas en la aplicación de estrategias globales de gestión del mantenimiento y su conocimiento estratégico.

Se confirma en el presente estudio, que la transcendencia de una adecuada gestión del conocimiento puede tener sobre las actividades estratégicas fundamentales de mantenimiento confirmadas por todo el personal entrevistado (fiabilidad, mantenibilidad, eficiencia energética y operación/explotación). En la figura 3, se extraen las principales características observadas en función de las actividades estratégicas, y que redundan en la eficiencia de la actividad de la empresa.

Se reconoce, que una mejora en la gestión de la información y conocimiento, redundará positivamente en todas esas acciones, y en especial en la resolución de grandes averías, o fallos no cíclicos espaciados en el tiempo y normalmente no registrada su actuación.

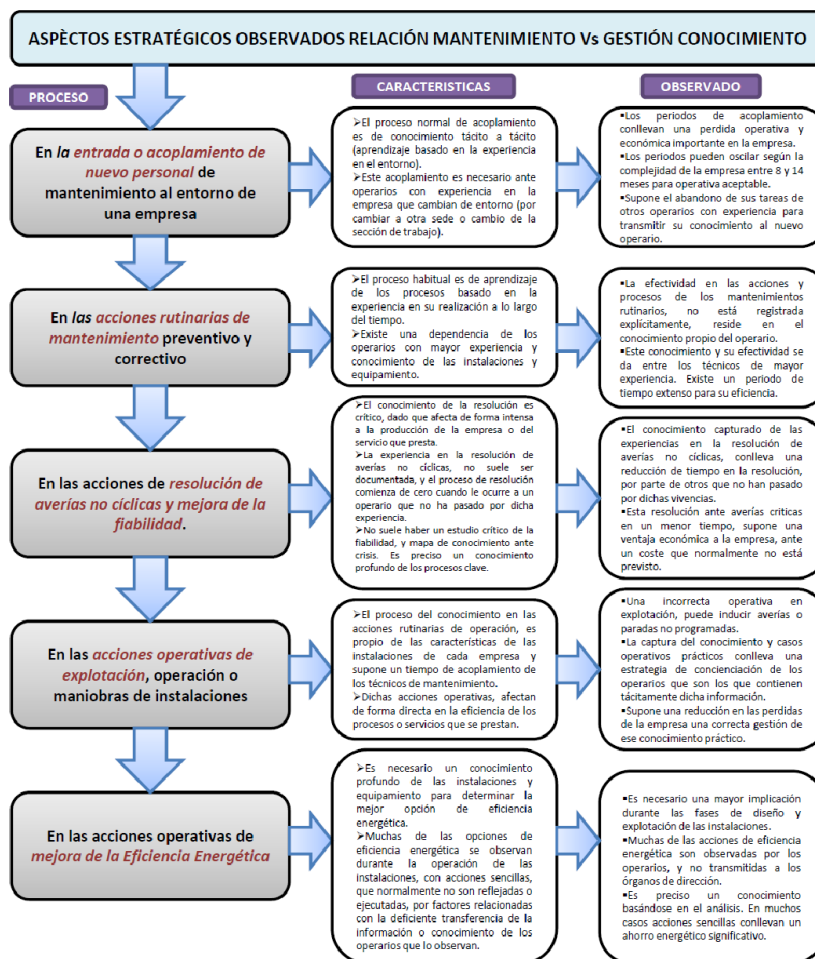
En cuanto a las herramientas que pueden ser utilizadas para recabar información estratégica que ayude a mejorar la gestión del conocimiento, normalmente son poco utilizadas en todos los ambientes de mantenimiento. Se reconoce la poca utilización de auditorías en las acciones internas, los mapas de información y conocimiento, realizándose diagramas de criticidad sólo en determinadas instalaciones o equipamiento fundamental para la actividad de la empresa.

Se detecta un mayor uso de las reuniones informales como medio de generación y transferencia del conocimiento, sobre todo, entre los grupos de técnicos operativos, con una menor cultura organizativa que los mandos o jefes de mantenimiento.

### **3. Planteamiento de un modelo de gestión del conocimiento en la ingeniería del mantenimiento industrial**

Tras el estudio preliminar donde se obtienen los datos que marcan las características de la relación “mantenimiento industrial-Gestión del conocimiento” cuyos datos y conclusiones son indicados en el libro anterior, se planteó un modelo aplicado experimental sobre una industria europea de primer nivel en un periodo de dos años. El modelo y los resultados están indicados en el libro de investigación “Planteamiento de un modelo de mantenimiento industrial basado en técnicas de gestión del conocimiento” [2], donde se indican cómo se ha abordado y que resultados se han obtenido. Algunas metas que persigue la investigación son las siguientes:

- Estudiar y analizar los flujos de conocimiento (en especial el tácito), investigando los mapas de conocimiento que afectan a los fines tácticos de la ingeniería de mantenimiento.



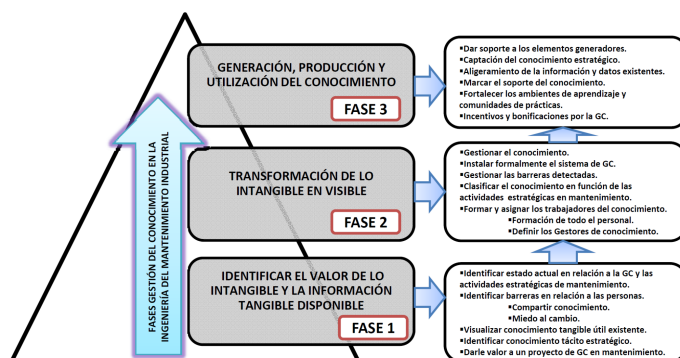
**Figura 3.** Aspectos estratégicos del mantenimiento y su relación con la gestión del conocimiento.

- Mejorar las condiciones de transmisión del conocimiento en la actividad de mantenimiento, que produzcan una mayor rapidez en el acoplamiento operativo de nuevo personal, o de técnicos pertenecientes a otras áreas.
- Unir las técnicas y herramientas operativas de la actividad de mantenimiento con la adecuada gestión del conocimiento, para mejora de la fiabilidad y respuesta ante fallo de los sistemas de la empresa.
- Unir las técnicas y herramientas operativas de la actividad de mantenimiento con la adecuada gestión del conocimiento, para mejora de la eficiencia energética de los sistemas técnicos de la empresa.

- Unir las técnicas y herramientas operativas de la actividad de mantenimiento con la adecuada gestión del conocimiento, para mejora de la mantenibilidad de la empresa.
- Utilizar las técnicas de gestión de conocimiento como sistema de auto-aprendizaje, decisión y sistema de reciclaje del personal, tanto de ubicación y características de las instalaciones, como de tipos de fallos y soluciones a adoptar ante fallos en las mismas.
- Utilizar la distribución del conocimiento en la adecuada planificación y control del proceso de mejora de las actuaciones de mantenimiento

Todos los objetivos arriba detallados están encaminados a conseguir un fin primordial: una efectiva acción de la actividad de mantenimiento por utilización de la gestión del conocimiento.

La evolución hacia un modelo de gestión del conocimiento aplicado al mantenimiento industrial debe pasar por tres fases fundamentales, desde la identificación del conocimiento intangible y tangible útil, detentando las barreras para su implantación, la transformación de lo intangible en tangible, finalizando en los procesos para la generación, producción y utilización del conocimiento (Figura 4).



**Figura 4.** Fases de la evolución de la gestión del conocimiento en mantenimiento industrial. Fuente: Elaboración propia.

En una primera fase fundamental, se identifica el valor del conocimiento intangible (conocimiento tácito), así como la situación de la información tangible existente (planimetría, memorias, proyectos, manuales, etc.) para, en fases posteriores, desbrozar o resumir la información fundamental. Para ello se deberán identificar las barreras existentes para que los procesos de gestión del conocimiento sean fluidos y asumidos por la organización, así como formar y explicar de una manera clara a todos los miembros integrantes, lo que supone un proyecto de GC en mantenimiento, con el fin de motivar y marcar las mayores condiciones para el éxito de su implementación.

Posteriormente en una segunda fase, se formalizan los procedimientos y estrategias para el soporte del modelo de GC, donde se va transformando lo intangible en visible, para la utilización posterior de un banco común de sustentación del conocimiento, mediante cualquier tipo de herramienta (lo común es una herramienta informática, aunque no tiene porqué ser así), comenzándose a gestionar el conocimiento, superando las barreras detectadas, y clarificando el conocimiento en función de las actividades estratégicas de la empresa. Es en esta fase donde se deben definir las personas que harán las funciones de gestores de conocimiento, cuya misión es dar soporte, coordinación y generar pro-actividad entre todos los miembros de la organización, para llevar el proyecto de GC por una senda o dirección definida en la uniformidad en los procesos fundamentales de generación, transmisión y utilización del conocimiento.

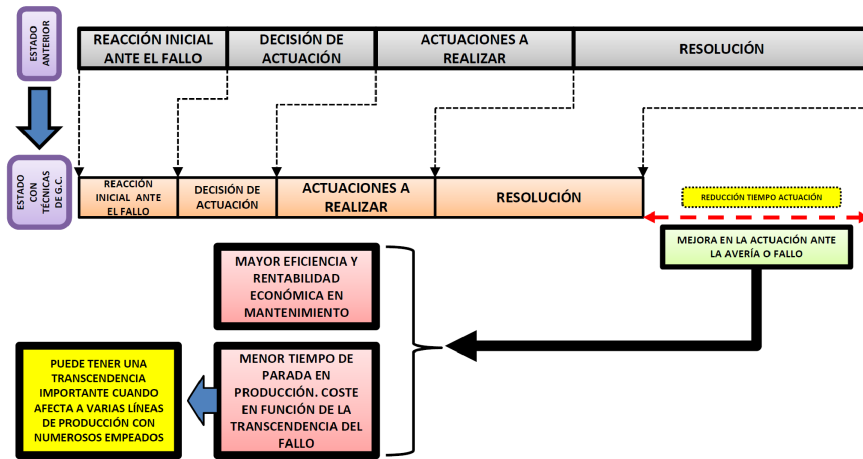
Esta segunda fase requiere un profundo estudio para extraer el conocimiento tácito implícito en el personal operativo de mantenimiento, así como el ali-geramamiento de la información explícita que existe en la organización, con el fin de articular la plataforma tecnológica que dará soporte al contenedor del conocimiento.

En la tercera fase, se produce el asentamiento y continuidad del sistema de GC, dando soporte a los elementos generadores con la captación del conocimiento estratégico y fortaleciendo los ambientes de aprendizaje y las comunidades de prácticas. El seguimiento debe ser continuo marcando estrategias de incentivos y bonificaciones para la correcta gestión del conocimiento. Cuando se llega a un nivel de difusión de la GC a nivel de la organización de mantenimiento, se producen transformaciones visibles en la forma en que se enfrentan a los problemas, averías y experiencias diarias, produciéndose una mayor eficiencia en los procesos, reduciendo tiempos de actuación, y reduciendo los periodos de acoplamiento de nuevos operarios. El sistema es utilizado como parte fundamental en el auto-aprendizaje de los operarios, teniendo en cuenta los criterios y punto de vista de ellos para tener éxito el sistema.

Para mejorar los procesos de gestión de conocimiento dentro de la actividad de mantenimiento, son adecuados los métodos que se han etiquetado como el de Kaizen, planteándolo como sistemas de planeación de eventos para identificar qué procesos sistemáticamente ocultan desperdicios y eliminarlos, por ejemplo, las actuaciones o reacciones ante averías o fallos críticos en las instalaciones y equipamiento de la empresa (Figura 5).

## 4. Conclusiones

En el presente artículo se han reseñado los dos libros donde se indican los resultados de una investigación, en donde se presenta un modelo para el mantenimiento basado en técnicas de gestión de conocimiento [2], incidente en sus aspectos estratégicos fundamentales que desarrolla en la empresa. Para ello se ha realizado un estudio exploratorio para definir y extraer las características de los procesos que se dan en el desempeño en esta actividad, extrayéndose las barreras y condicionantes con que se encuentran dichos departamentos y los facilitadores



**Figura 5.** Diagrama Yamazumi con reducción de desperdicios en la actuación ante averías.

fundamentales para vencerlos. Con base en ello, y basado en la literatura existente sobre gestión del conocimiento, se han definido los principios y desarrollado un modelo para su aplicación al mantenimiento. Se ha realizado una investigación de campo en el entorno de una industria del sector alimentario durante un proceso de tres años, obteniendo unos resultados que confirman la bonanza del modelo.

Las aportaciones más relevantes se centran en cómo se muestran las características del uso del conocimiento en mantenimiento en gran parte de las empresas, y la cuantificación de las mejoras que se obtienen con la mejora de esa información y conocimiento estratégico, que normalmente y pese a tener un alto valor intangible, no está custodiado y en poder de la empresa, sino que se encuentra en gran medida en forma tácita entre los operarios de mantenimiento.

En el libro de investigación titulado “La gestión del conocimiento en la ingeniería del mantenimiento industrial: investigación sobre la incidencia en sus actividades estratégicas” [1], se realizó una descripción del estado de la situación y los principios básicos de la gestión del conocimiento y de la ingeniería del mantenimiento, estudiándolo dentro de las áreas de explotación y mantenimiento, con el fin de conocer las barreras y facilitadores, que dicho personal implicado encuentra para que se produzca una adecuada transmisión y utilización de dicho conocimiento fundamental, definiéndose las actividades estratégicas que realizan los departamentos de mantenimiento, y la manera en que repercuten en la empresa.

## Referencias

1. Cárcel Carrasco, Francisco Javier. (2014). “La gestión del conocimiento en la ingeniería del mantenimiento industrial: Investigación sobre la incidencia en sus

- actividades estratégicas”. Omnia Science, 2014. ISSN 978-84-941872-7-8. DOI: <http://dx.doi.org/10.3926/oms.197>.
2. Cárcel Carrasco, Francisco Javier. (2014). “Planteamiento de un modelo de mantenimiento industrial basado en técnicas de gestión del conocimiento”. Omnia Science, 2014. ISSN 978-84-941872-8-5. DOI: <http://dx.doi.org/10.3926/oms.198>.

# REVISTA ELEMENTOS

## Información para los autores

Las instrucciones que a continuación se presentan tienen el propósito de estandarizar la presentación de artículos para ser sometidos al proceso de evaluación del comité editorial. Pretenden establecer una coherencia en la presentación que dé identidad y estructura a la publicación y, además, tener presente variables importantes en el momento de evaluar la calidad de los artículos por autoridades externas.

Se publicarán artículos de investigación científica y tecnológica, de reflexión y de revisión, en su mayoría. Los mismos serán escritos tanto por investigadores de la institución como por profesionales externos. Aunque se pueden publicar artículos de cualquiera de los once tipos existentes, el mayor énfasis se hará en artículos de los tipos: 1, 2 y 3, de acuerdo con las definiciones dadas por Colciencias para su proceso de indexación. A saber:

1. **Artículo de investigación científica y tecnológica.** Documento que presenta de manera detallada los resultados originales de un proyecto de investigación. La estructura por lo general utilizada contiene cuatro apartes importantes: introducción, metodología, resultados y discusión.
2. **Artículo de reflexión.** Documento que presenta resultados de investigación, desde una perspectiva analítica, interpretativa o crítica del autor, sobre un tema específico, recurriendo a fuentes originales.
3. **Artículo de revisión.** Documento que surge de una investigación en la que se analizan, sistematizan e integran los resultados de investigaciones, publicadas o no, sobre un campo en ciencia o tecnología con el fin de dar cuenta de los avances y las tendencias de desarrollo. Se caracteriza por presentar una cuidadosa revisión bibliográfica de por lo menos cincuenta referencias.
4. **Artículo corto.** Documento breve que presenta resultados originales, preliminares o parciales, de una investigación científica o tecnológica, que por lo general requiere de una pronta difusión.
5. **Reporte de caso.** Documento que presenta los resultados de un estudio sobre una situación particular, con el fin de dar a conocer las experiencias técnicas y metodológicas consideradas en un caso específico. Incluye una revisión sistemática comentada de la literatura sobre casos análogos.
6. **Revisión de tema.** Documento que resulta de la revisión crítica de literatura sobre un tema en particular.
7. **Cartas al editor.** Posiciones críticas, analíticas o interpretativas sobre los documentos publicados en la revista que, a juicio del comité editorial, constituyen un aporte a la discusión del tema por parte de la comunidad científica de referencia.
8. **Editorial.** Documento escrito por el editor, un miembro del comité editorial o un investigador invitado, sobre orientaciones en el dominio temático de la revista.
9. **Traducción.** Traducciones de textos clásicos o de actualidad, o transcripciones de documentos históricos o de interés particular en el dominio de publicación de la revista.
10. **Documento de reflexión que no es producto de una investigación.**
11. **Reseña bibliográfica.**
12. **Otros.**

## Temáticas

ELEMENTOS recibirá artículos escritos principalmente por docentes, investigadores, empresarios, investigadores externos (nacionales y extranjeros) y semilleros de investigación, quienes aportarán a los campos de conocimiento de la Ingeniería y Ciencias Básicas. Los textos pueden referirse, entre otros, a los siguientes temas de las disciplinas de Computación e Informática, Ingeniería Industrial, Ingeniería de Telecomunicaciones y Ciencias Básicas:

Infraestructura de *hardware* y *software*.  
Desarrollo y construcción de *software*.  
Análisis y diseño de algoritmos.  
Informática y sociedad.  
Nuevas tecnologías: NGN, *cloud computing*, virtualización, etc.  
Matemáticas puras (álgebra, análisis, topología, lógica)  
Matemáticas aplicadas (criptografía, procesamiento de señales, computación gráfica, bioinformática, etc)  
Matemáticas discretas.

Análisis multivariado y factorial.  
Series de tiempo.  
Educación matemática.  
Investigación de operaciones.  
Optimización.  
Minería de datos.  
Modelamiento, simulación y gestión de producción y de procesos.  
Cadenas productivas.  
Instrumentación virtual.  
Matemáticas financieras.  
Análisis de riesgo.

# Presentación de los artículos

## Originalidad de los textos

Los trabajos presentados deben ser inéditos y no pueden ser sometidos simultáneamente a consideración por parte de otras revistas. De la misma manera, no se recibirá ningún texto que haya sido publicado total o parcialmente en otra revista. El proceso editorial correspondiente sólo iniciará cuando se haga entrega del formato de presentación de artículos (disponible en [www.poligran.edu.co/editorial](http://www.poligran.edu.co/editorial)), en el cual los autores avalan su publicación en ELEMENTOS y asumen la autoría del mismo.

## Arbitraje

Los textos que han atravesado el proceso de entrega serán sometidos a un proceso de evaluación por parte de expertos (árbitros o pares académicos) bajo la modalidad doble ciego. Así como el par desconoce la identidad del autor, este desconoce la identidad sus evaluadores. Los árbitros son expertos en el área, seleccionados por el comité editorial y científico, que revisarán cada artículo y emitirán un dictamen sobre la viabilidad de su publicación.

Los autores serán notificados sobre los resultados de la evaluación y se les brindará un plazo para la entrega de los ajustes, determinado por el comité editorial. Este plazo puede variar de acuerdo a la cantidad de correcciones que requiera el texto. En caso de ser aceptado, los autores conocerán la decisión sobre el artículo y se adelantará el proceso editorial correspondiente.

**Recepción de artículos:** proceso abierto durante todo el año.

## Cierre editorial

Los artículos pueden ser entregados en la facultad a la que pertenece o pertenecen los respectivos docentes. En caso de que sean el resultado de una investigación institucional, serán recibidos en el Departamento de Investigación, si el artículo es de un autor externo se debe remitir a:

Departamento Editorial del Politécnico Grancolombiano  
Calle 57 No. 3-00 este  
Bloque A, primer piso  
Bogotá, Colombia  
Correo electrónico: [ednorman@poligran.edu.co](mailto:ednorman@poligran.edu.co), [elementos@poli.edu.co](mailto:elementos@poli.edu.co).

La editorial solo iniciará el proceso de edición con los artículos que cumplan con las características incluidas en este documento. En caso de que un artículo no clasifique, el editor enviará una comunicación formal al autor o a los autores por correo electrónico o carta impresa.

## Características de recepción de los artículos

1. Los trabajos que se propongan deben presentar resultados de investigación originales o reportes con experiencias relevantes y no deben estar publicados ni en proceso de evaluación para otras revistas.
2. Se recibirán artículos preferiblemente en formato  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X } 2_{\epsilon}$ . Se debe usar la plantilla **LNCS** de Springer disponible en <http://www.springer.com/computer/lncs?SGWID=0-164-6-793341-0> donde también se encuentran plantillas de MS-Word para la presentación de los artículos.
3. Los artículos deben ser enviados en formato **tex** o **doc** y también su versión en **pdf**, al correo electrónico [elementos@poli.edu.co](mailto:elementos@poli.edu.co).
4. En la primera página debe estar la siguiente información: título del artículo (en español), datos del autor o los autores con los nombres y apellidos completos, fecha de recepción y aceptación del artículo, una corta reseña del autor o de los autores con una extensión máxima de 700 caracteres, correo electrónico del autor o de los autores, dirección, teléfono fijo, celular y filiación institucional.
5. En caso de contener mapas, cuadros, tablas, fórmulas o ilustraciones deben estar claramente descritas, y en orden. Se prefiere la entrega de gráficas externas en formatos vectoriales como **pdf** o **eps**, o también en formato **jpg** o **png**. Tener en cuenta que la revista es en blanco y negro y por tanto se debe usar escala de grises o convenciones adecuadas para este perfil. La información de texto, gráficos e imágenes debe ser presentada en una sola tinta y presentar la correspondiente autorización para su publicación. Los cuadros se enumerarán en forma consecutiva y lo mismo se hará con las figuras, que deben llevar una enumeración independiente.
6. El artículo debe traer un resumen en español con una extensión máxima de 700 caracteres, en el que se sinteticen los objetivos, métodos de estudio, resultados y conclusiones. Se deben adicionar las palabras clave (de 4 a 6).
7. Además, se debe presentar el resumen (*Abstract*) y las palabras clave (*Key Words*) en inglés. En caso de no contener esto, la editorial procederá a realizar la traducción por medio del Departamento Académico de Idiomas de la institución.
8. Se recibirán artículos presentados con el sistema de referencias correspondiente al ejemplo de uso **typeinst.zip** de la plantilla **LNCS** de Springer disponible en <http://www.springer.com/computer/lncs?SGWID=0-164-6-793341-0>. A continuación se ilustra dicho tipo de referencia:
  1. Foster, I., Kesselman, C.: The Grid: Blueprint for a New Computing Infrastructure. Morgan Kaufmann, San Francisco (1999)

# ELEMENTOS MAGAZINE

## Information for authors

The instructions presented below are intended to standardize the presentation of articles to be evaluated by the editorial committee. These instructions establish coherence in the presentation that provides the publication with identity and structure. Also, they establish important variables when external authorities evaluate the quality of articles.

Mostly, articles of scientific and technological research, reflection and revision will be published. These will be written not only by researches of the institution, but also by external professionals. Although articles of any of the eleven existing types can be published, the biggest emphasis will be made in articles of 1, 2, and 3 types, according to the definitions given by Colciencias for its indexation process. As follows:

1. **Scientific and Technological Research Article.** Document that presents, in detail, the original results of the research projects that were finished. Generally, the structure used has four important parts: introduction, methodology, results, and discussion.
2. **Reflection Article.** Document that presents the results of a research that was finished from an analytical, interpretative, or critical point of view of the author on a specific topic, based on original sources.
3. **Review Article.** Document that is the result of a finished research where the results of published and unpublished researches about science or technology are analyzed and systematized. This is in order to report development advances and tendencies. It is characterized by presenting a thorough bibliographic review of at least fifty references.
4. **Short Article.** Brief document that presents original, preliminary, or partial results of scientific or technological research that usually requires a quick spreading.
5. **Case Study.** Document that presents the results of a study about a particular situation in order to present the methodological and technical experiences considered in a specific case. It includes a commented systematic review of the literature about analog cases.
6. **Topic Review.** Document that results from the critical review of the literature of a specific topic.
7. **Letters to the Editor.** Critical, analytical, or interpretative positions about the documents published in the magazine, and that, according to the editorial committee, contribute to the discussion of the topic by the scientific community being referred to.
8. **Editorial.** Document written by the editor, a member of the editorial committee, or a guest researcher about orientations related to the thematic command of the magazine.
9. **Translation.** Translations of classic or current texts, or transcriptions of historical or of particular interest documents related to the publishing command of the magazine.
10. **Reflection document that is not product of a research.**
11. **Bibliographic Review.**
12. **Others.**

## Topics

ELEMENTOS will receive articles written mainly by teachers, researches, entrepreneurs, external researches (national and foreigner) and research seedbed, who will contribute to the knowledge fields of Engineering and Basic Sciences. The texts can refer, among others, to the following topics of Computing and Computer Science, Industrial Engineering, Telecommunication Engineering, and Basic Sciences:

Hardware and Software Infrastructure.  
Software Development and Construction.  
Algorithm Analysis and Design.  
Computer Science and Society.  
New Technologies: NGN, cloud computing, virtualization, etc.  
Pure Mathematics (algebra, analysis, topology, logic).  
Applied Mathematics (cryptography, sign processing, graphic computing, bioinformatics, etc.)  
Discrete Mathematics.  
Multi-varied and factorial analysis.

Time Series.  
Mathematical Education.  
Operation Research.  
Optimization.  
Data Mining.  
Production and Process Modeling, Simulation, and Management.  
Productive Chains.  
Virtual Implementation.  
Financial Mathematics.  
Risk Analysis

## Presentation of the articles

### Originality of the Text

All submitted papers must be unpublished and cannot be simultaneously submitted for consideration in other magazines. Similarly, ELEMENTOS will not receive any papers that have been whole or partially published in another journal. The respective editorial process will only start when the Article Presentation Form is received (available at: [www.poligran.edu.co/editorial](http://www.poligran.edu.co/editorial)). In this form, the authors approve the publication of the paper in the magazine and assume their authorship.

### Peer Review

Papers that have been delivered will be reviewed by experts (judges or academic peers) under the blind experiment mode. Both the peer and the author are unaware of each other's identity.

Judges are experts in the area, selected by the editorial and scientific committee. They review each paper and decide on the viability of its publication.

Authors will be notified about the results of the evaluation and will be given a deadline for delivering the adjustments. This term may vary according to the number of corrections required. If accepted, authors will be notified about the decision on the article and the editorial process will be carried out accordingly.

### Reception of the Articles

This process is open throughout the year.

### Editorial Closing Date

The articles can be handed in the school the respective teacher or teachers belong to. If they are the result of an institutional research, they will be received at the Research Department. If the article belongs to an external author, it should be sent to:

Departamento Editorial del Politécnico Grancolombiano  
Calle 57 No. 3-00 este  
Bloque A, primer piso  
Bogotá, Colombia  
Correo electrónico: [ednorman@poligran.edu.co](mailto:ednorman@poligran.edu.co), [elementos@poli.edu.co](mailto:elementos@poli.edu.co).

The editorial will start the editing process with the articles that fulfill all the characteristics included in this document. If an article is not classified, the editor will send a formal communication to the author or authors by email or printed letter.

## Reception characteristics of the articles

1. The articles to be proposed must present original research results or reports with relevant experiences and must not be published or being evaluated by other magazines.
2. Articles in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub> format will be preferred. For this, it is necessary to use the Springer LNCS template, available at <http://www.springer.com/computer/lncs?SGWID=0-164-6-793341-0> where MS-Word templates can also be downloaded.
3. The articles must be sent in tex or doc format along with their pdf version to the email [elementos@poli.edu.co](mailto:elementos@poli.edu.co).
4. The following information should be on the first page: title of the article (in Spanish), data of the author or authors with the full name, reception date, and article acceptance, a brief review of the author or authors with a maximum extension of 700 characters, email of the author or authors, address, landline number, cell phone number, and institutional relationship.
5. If the article has maps, charts, formulas, or drawings, they must be clearly described and in order. We prefer the delivery of external graphics in vectorial formats, such as pdf or eps, or also in jpg or png format. Keep into account that the magazine is black and white and for this reason, you should use gray scale or conventions suitable for this profile. The information of text, graphics, and images must be presented in one ink along with its corresponding publishing authorization. The charts and the figures will be numbered consecutively, but the latter will also have to have an independent numbering.
6. The article must have an abstract in Spanish with a maximum extension of 700 characters, where the objectives, study methods, results, and conclusions are synthesized. Keywords must be added (from 4 to 6.)
7. Also, the abstract and the keywords must be presented in English. If the article does not have this, the editorial will translate it through the Academic Language Department of the institution.
8. Articles presented with the reference system corresponding to the typeinst.zip use example of the Springer LNCS template, available at <http://www.springer.com/computer/lncs?SGWID=0-164-6-793341-0>, will be received. This type of reference is illustrated below:
  1. Foster, I., Kesselman, C.: The Grid: Blueprint for a New Computing Infrastructure. Morgan Kaufmann, San Francisco (1999)



METABOLITOS AISLADOS DE *RAPUTIA HEPTAPHYLLA* Y  
*ESENBECKIA ALATA* (RUTACEAE) Y SÍNTESIS DE PRECUR-  
SORES DE ANÁLOGOS DE ALCALOIDES QUINOLÍNICOS

CARLOS A. COY BARRERA, LUIS E. CUCA SUÁREZ

PLANTEAMIENTO DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL  
DE PRIMER ORDEN QUE MODELA UN PROBLEMA DE MEZ-  
CLAS: UNA DIFICULTAD EN LA MOVILIZACIÓN ENTRE RE-  
GISTROS DE REPRESENTACIÓN, LENGUA NATURAL Y ALGE-  
BRAICO

LUIS ALBERTO JAIMES CONTRERAS, RAFAEL FELIPE CHAVES ESCOBAR, CÉSAR  
AUGUSTO HERNÁNDEZ SUÁREZ

FABRICACIÓN DE PELÍCULAS DELGADAS DE  $\text{TiO}_2$  UTILI-  
ZANDO EL MÉTODO *DOCTOR BLADE* Y *SPIN COATING*

CARLOS E. DÍAZ-URIBE, WILLIAM A. VALLEJO, KAREN NAVARRO

EL PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A LA ECUACIÓN NO  
LINEAL DE SCHRÖDINGER FORZADA PARAMÉTRICAMENTE

LUISA FERNANDA MARTÍNEZ ROJAS

DISEÑO DE HERRAMIENTAS QUE FOMENTEN EL APRENDIZA-  
JE DE MATEMÁTICAS CON AYUDA DE MATHEMATICA 10

CAMILO ANDRÉS RAMÍREZ

MÉTODO PARA CALCULAR LA EFICIENCIA CUÁNTICA Y LA  
RESPUESTA ESPECTRAL DE CELDAS SOLARES USANDO LAB-  
VIEW

ANDRÉS JULIÁN ARISTIZÁBAL CARDONA

PRODUCCIÓN DE HIDRÓGENO A PARTIR DE ENERGÍA  
SOLAR. PANORAMA EN COLOMBIA

ANDREA LACHE MUÑOZ

ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN DEL TAMAÑO DE PARTÍCULA  
DE AGREGADOS DE

PORFIRINAS POR DISPERSIÓN DINÁMICA DE LUZ

CARLOS E. DÍAZ-URIBE, WILLIAM A. VALLEJO

INGENIERÍA DEL MANTENIMIENTO INDUSTRIAL Y GESTIÓN  
DE CONOCIMIENTO:

MEJORA EN LA EFICIENCIA DE LAS EMPRESAS

FRANCISCO JAVIER CÁRCEL-CARRASCO