Serie
DOCUMENTOS

MATEMATICA I

Administración de Empresas, Finanzas, Banca, Seguros y Agropecuaria

Novena Edición

Nidia Mercedes Jaimes Gómez

POLITECNICO GRANCOLOMBIANO
INSTITUCION UNIVERSITARIA

MATEMÁTICA I ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS, FINANZAS, BANCA, SEGUROS Y AGROPECUARIA

Novena Edición Enero de 2005
Ejemplares: 200

Edición POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO
Institución Universitaria
Calle 57 N. 3-00 Este
Teléfono: 346 88 00
Fax: 346 92 56
Bogotá, D.C. Colombia

Diseño y Diagramación: ED. PRECOLOMBI-DAVID REYES
Supervisión y corrección: DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Diseño de Carátula: DEPARTAMENTO EDITORIAL - POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO
Impresión: JAVEGRAF- Impresión Digital

Impreso en Colombia - Printed in Colombia

Bogotá D.C.

ISBN 958-8085-29-2

Agradecimientos:

Al Politécnico Grancolombiano
– Institución Universitaria,
por el apoyo ofrecido en la
publicación de este documento,
a los profesores del área,
especialmente a
Mª Mercedes Caycedo Borda
y Diana Yadira Fonseca Rincón
por su permanente colaboración
en la corrección de respuestas.

Tabla de contenido

Introducción 7

1 Presentación de los números reales 9
    Ubicación de un real en la recta numérica 10
2 Operaciones en el conjunto de los números reales 13
    Propiedades de las operaciones 13
    Potenciación 17
    Propiedades de las potencias con exponentes enteros 17
3 Factorización 20
    Factor común 20
    Diferencia de cuadrados 21
    Factorización de trinomios de la forma: $ax^2 + bx + c$ ... 22
    Operaciones entre racionales 24
    Simplificación de expresiones racionales 25
    Amplificación de expresiones racionales 25
    Suma de expresiones racionales 28
    Multiplicación y división de expresiones racionales 30
4 Sumatorias 38
    Propiedades. Interpretaciones 41
5 Relación de orden en el conjunto de los números reales .. 49
  Intervalos 51
  Inecuaciones 52
  Inecuaciones lineales 53
  Inecuaciones compuestas 57
  Inecuaciones racionales 61
  Inecuaciones cuadráticas 65
6 Ecuaciones 71
  ¿Qué significa resolver una ecuación? 71
  Ecuaciones lineales de una incognita 72
  Ecuaciones racionales 75
7 Ecuaciones cuadráticas 84
8 Radicales 91
    Definición 91
    Ecuaciones con radicales 92

9 Ecuaciones polinómicas 98
- División sintética 98
- Teorema del residuo 101
- Teorema del factor 101
- Ceros racionales de un polinomio 102

10 Logaritmos y exponenciales 106
- Propiedades de los logaritmos 107
- Ecuaciones logarítmicas y exponenciales 108

11 Funciones 113
- Generalidades 113
- Funciones reales 115
- Dominio de una función real 115
- Gráfica de una función 117
- Ceros de una función 122
- Intersección con el eje «y» 122

12 Algunas funciones especiales 128
- Función lineal 128
- Función constante 144
- Función cuadrática 144
- Función exponencial 157
- Función logaritmica 160
- Función polinómica 167
- Función compuesta 174

13 Razón de cambio promedio 175

14 Derivada 181
- Propiedades de la derivada de una función 182
- Regla de la cadena 187
- Recta tangente a una curva 190

15 Análisis marginal 200

Respuestas a algunos ejercicios 211

Bibliografia 234

Introducción

Este texto se ha escrito para el curso de Matemática I de las carreras Administrativas del Politécnico Grancolombiano–Institución Universitaria. El trabajo se orienta hacia el uso de funciones en la construcción de modelos que representen fenómenos o problemas del área de formación específica del estudiante.

Se inicia el proceso con una revisión del conjunto de los números reales en lo referente a operaciones definidas en dicho conjunto, y sus propiedades. A continuación se efectúa un estudio conciso de las relaciones de igualdad y desigualdad en los reales, a través de diversos tipos de ecuaciones e inecuaciones, y su utilidad en la solución de problemas.

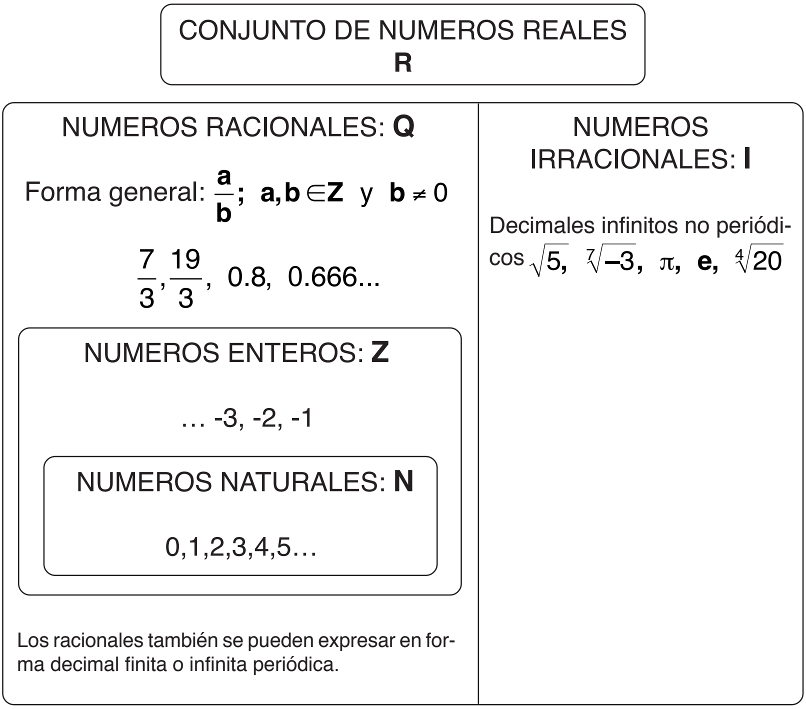
Fundamentalmente se insiste en la aplicabilidad de un concepto en contextos variados, sin perder por ello la riqueza que se deriva del estudio de los elementos que constituyen el concepto, o de las relaciones que se establezcan entre diversos conceptos.

Un supuesto del curso es el conocimiento sólido de conceptos de álgebra elemental, pues aunque se hace mención de algunas temáticas particulares, es necesario que el lector–estudiante reconozca el nivel de dominio de dichos conceptos y así determine el ritmo de trabajo a establecer en el desarrollo del curso.

Es importante asumir que, como texto orientador, este material constituye un apoyo para alcanzar los propósitos del curso, y en consecuencia se debe complementar el trabajo planteado con la bibliografía que se suministra al final, o con los ejercicios que se plantean en la clase en interacción profesor–estudiante.

Presentación de los números reales

Al hacer una introducción informal al conjunto de los números reales, se ofrece una representación gráfica de los subconjuntos que lo constituyen y de las relaciones existentes entre ellos.



CONJUNTO DE NUMEROS REALES
R

NUMEROS RACIONALES: **Q**

Forma general: $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$; **a,b** $\in$ **Z** y **b** $\neq 0$

$\frac{7}{3}, \frac{19}{3}$, 0.8, 0.666...

NUMEROS ENTEROS: **Z**

… -3, -2, -1

NUMEROS NATURALES: **N**

0,1,2,3,4,5…

Los racionales también se pueden expresar en forma decimal finita o infinita periódica.

NUMEROS IRRACIONALES: **I**

Decimales infinitos no periódicos $\sqrt{5}$, $\sqrt[7]{-3}$, π, **e**, $\sqrt[4]{20}$

❑ EJERCICIO N° 1

1) Escriba un número racional no entero.
2) Escriba un número entero que no sea natural.

3) ¿Es posible encontrar un número racional e irracional a la vez? Explique.
4) ¿Todo natural es entero? Explique.
5) ¿Todo racional es entero? Explique.
6) Dado el conjunto **A** de números reales:

$$A=\left\{-0.7,\sqrt{5},\sqrt{49},0,-3.666\ldots,\frac{50}{4},42,-\sqrt{16},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Completar en cada caso:

a) Los naturales que pertenecen al conjunto **A** son:

____

b) Los enteros que pertenecen al conjunto **A** son:

____

c) Los racionales que pertenecen al conjunto **A** son:

____

d) Los irracionales que pertenecen al conjunto **A** son:

____

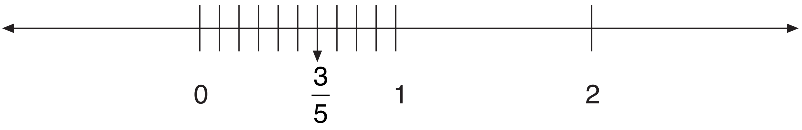
Ubicación de un real en la recta numérica

Para este curso se va a emplear la **aproximación** para ubicar un real en la recta numérica.

Ejemplo 1.

Ubicar en la recta real $\frac{3}{5}$.

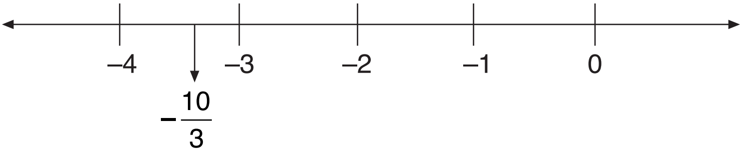
Como $\frac{3}{5} = 0.6,$ a partir de un punto de referencia 0 se ubica una unidad de trabajo. Como en este caso el real está entre los enteros 0 y 1, se divide este segmento en 10 partes iguales y se consideran 6 (ver gráfica).



Ejemplo 2.

Ubicar $-\frac{10}{3}$ en la recta real.

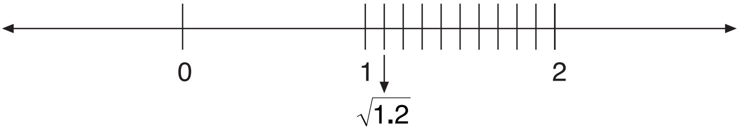
Como $-\frac{10}{3} = -3.3333\ldots$ se puede aproximar a –3.3. Este es un real que está entre los enteros –4 y –3; por lo tanto, este segmento se divide en 10 partes, de las cuales se consideran 3 (ver gráfica).



Ejemplo 3.

Ubicar $\sqrt{1.2}$ en la recta real.

$\sqrt{1.2} = 1.095445\ldots\ldots \approx 1.1$



❑ EJERCICIO Nº 2

1) Ubicar los siguientes reales en la recta numérica (utilizar aproximación a una cifra decimal).

a) 1.39 b) $\frac{50}{13}$ c) $-\frac{4}{7}$

d) $\sqrt[5]{-30}$ e) –7.06 f) 4.67

2) Dado el conjunto B = $\left\{1.7555\ldots, \frac{\sqrt[3]{8}}{2}, \frac{\sqrt[5]{2}}{3}, 1.23, -2.807, 4.0001\right\}$

a) Los elementos del conjunto **B** que son:
   Naturales
   Enteros
   Recionales
   Irracionales

b) Ubicar cada uno de los elementos del conjunto **B** en la recta numérica

3) Para cada situación, muestre tres ejemplos (si existen) de números que cumplan las condiciones dadas. Explique su respuesta.

   a) Racionales que sean decimales finitos.
   b) Racionales que no sean naturales, ni enteros.
   c) Naturales inferiores a 7.3.

4) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta.

   a) Todo entero es racional.
   b) Algún natural **no** es entero.
   c) Todo irracional es real.
   d) Algunos racionales **no** son reales.

5) Sea $\mathbf{A}=\left\{-0.28,-\pi,\sqrt{10},\sqrt{9},-7.4,-8.2\right\}$

   Escribir los elementos del conjunto A que cumplen:

   a) Son naturales
   b) Son racionales, pero no enteros.
   c) Son irracionales.
   d) Son enteros pero no naturales.
   e) Son racionales mayores que –1.

Operaciones en el conjunto de los números reales

En el conjunto de números reales existen dos operaciones: adición y multiplicación, tales que, para cada par de números reales **a** y **b**, la suma **a** + **b** y el producto **a** · **b** son números reales.

Ejemplo: Al multiplicar los reales $\sqrt[4]{5}$ y 2 el resultado es un único real, así, $\sqrt[4]{5} \cdot 2 \approx 2.99$ (verificar en la calculadora).

Propiedades de las operaciones

Las operaciones definidas en el conjunto de los números reales satisfacen las siguientes propiedades:

Para **a**, **b**, **c** ∈ **R**; se cumple:

1) **PROPIEDAD CONMUTATIVA**

   a + **b** = **b** + **a** y **a** · **b** = **b** · **a**

2) **PROPIEDAD ASOCIATIVA**

   a + **b** + **c** = **a** + (**b** + **c**) = (**a** + **b**) + **c** y **a**·**b**·**c** = **a**·(**b**·**c**) = (**a**·**b**)·**c**

Efectuar 3.5 + 4 + (–1) + (–7.5)
Solución: 3.5 + 4 + (–1)+ (–7.5) Aplicando la propiedad asociativa:
= (3.5 + 4) + ((–1) + (–7.5))
= 7.5 + (–8.5)
= –1

3) **PROPIEDAD MODULATIVA**

   Para todo real **a** se cumple: **a** + 0 = **a** y 1·**a** = **a**

4) PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

$\mathbf{ab} + \mathbf{ac} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} + \mathbf{c})$. También $\mathbf{ba} + \mathbf{ca} = (\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a}$

Si observa la expresión de la parte izquierda de alguna de estas igualdades, se podrá dar cuenta que hay dos términos o sumandos, mientras que en la parte derecha hay dos factores, es decir, la expresión está **factorizada** (la expresión está en forma de producto).

Ejemplo 1

Utilizando la propiedad distributiva, factorizar la expresión:

$\mathbf{mn} + \mathbf{mbc} + \mathbf{m}$

Solución: Como **m** es un factor común a los tres términos de la suma, entonces:

$\mathbf{mn} + \mathbf{mbc} + \mathbf{m} = \mathbf{m}(\,\mathbf{n} + \mathbf{bc} + 1)$

Ejemplo 2

Comprobar la igualdad $r + r + r + r = 4r$

Solución: $r + r + r + r$ Utilizando la propiedad distributiva:
$= r\,(1+1+1+1)$
$= r \cdot 4$ Utilizando la propiedad conmutativa:
$= 4r$

5) PROPIEDAD INVERTIVA

a) Para todo $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$, existe $-\mathbf{a}$ llamado **OPUESTO** de **a** o **INVERSO ADITIVO** de **a**, tal que: $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0$

NOTA: $\mathbf{a} + (-\mathbf{a})$ se escribe en forma equivalente como: $a - a$

Ejemplo

El opuesto del real –4.56 es 4.56 porque $-4.56 + 4.56 = 0$

b) Para todo $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{a} \neq 0$, existe un único número real llamado **recíproco**, o **inverso multiplicativo**, notado por $\mathbf{a}^{-1}$, o, $\frac{1}{\mathbf{a}}$ tal que: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^{-1} = 1$

Ejemplo 1

El recíproco de $-\frac{3}{7}$ es $-\frac{7}{3}$ porque $\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{7}{3}\right) = 1$

Ejemplo 2:

El recíproco de $\mathbf{x} + 1$ es $\frac{1}{\mathbf{x}+1}$, $\mathbf{x} \neq -1$ ¿Por qué?

Aplicando las propiedades de números reales, se verifican las siguientes igualdades

1) $-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}$
2) $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$
3) $-(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$
4) $(-\mathbf{a})\mathbf{b} = -\mathbf{ab} = \mathbf{a}(-\mathbf{b})$
5) $(-\mathbf{a})(-\mathbf{b}) = \mathbf{ab}$

Si **a** y **b** son reales diferentes de cero

6) $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{-1} = \left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right)$
7) $(\mathbf{ab})^{-1} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}$
8) $\mathbf{a} \div \mathbf{b} = \mathbf{ab}^{-1}$
9) $(\mathbf{a}^{-1})^{-1} = \mathbf{a}$

❑ EJERCICIO Nº 3

1) Simplificar cada expresión utilizando las propiedades de las operaciones.

a) $3 - \{-5 + 5(2 + 3) - 2\} 5 + 1$
b) $20 - 7(3 + 4) -1.5 + 0.5$
c) $100 + 50(3 - (-7)) 2 - 1$

2) Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. Indicar las reglas que se infringen.

a) $\left[\frac{-(a-b)}{b}\right]^{-1}=\frac{b}{b-a},\ b\neq a,\ b\neq 0$

b) $\left[\frac{-(a-b)}{b}\right]^{-1}=\frac{a-b}{b},\ a\neq b,\ b\neq 0$

c) $\left(\frac{1\cdot x}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{x},\ x\neq 0$

d) $\left[x\div(2y+4)\right]^{-1}=\frac{2y}{x}+\frac{4}{x},\ y\neq -2,\ x\neq 0$

e) $\left[x\div(2y+4)\right]^{-1}=\frac{x}{2y+4},\ y\neq -2,\ x\neq 0$

f) $x^{-1}-y^{-1}=\frac{1}{x-y},\ x\neq y,\ x\neq 0,\ y\neq 0$

3) Utilizando las propiedades de los números reales, reducir:

a) $-(2x+3y)-(-2z-8x+y)$
b) $\{-(m+2n+p)\}+\{(m+n+p)\}$
c) $7-4(m+3)+(m-5)2+8$
d) $-(-(-5x))+(-(-x+y))$
e) $\{-(8x+3y-1)\}-\{(-7x+3)5\}$
f) $m+8(m+5)2-3+4.5m$
g) $21-9(-d+3)-(5-4d)2-3$
h) $-2\{-(x-y)-3(x+y)\}-x+y$
i) $(a-b)^2-(a+2b)(a+3b)$
j) $5(x-y)(x+2y)-(x-y)(x+y)+(2x-3y)^2$
k) $10-3\{(a+2b)^2-5+2(a+b)-(3a)^2\}2-1$

4) Encontrar el error en cada uno de los siguientes procedimientos y escribir la corrección respectiva

a) $-8m+5m+3y=-3m^2+3y$
b) $3(x+y)=3x+y$
c) $7+5(x+7)=12(x+7)=12x+84$

Potenciación

Definición:

$\mathbf{a}^n = \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \cdot \ldots\ldots \cdot \mathbf{a}}_{\text{n factores}}$, , donde **n** es un entero positivo y **a** es un número real. El número real **a** se llama base y el entero **n** se denomina exponente.

$\mathbf{a}^0 = 1$, si $\mathbf{a} \neq 0$

Ejemplos:

1) $\mathbf{p}^5 = \mathbf{p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p}$

2) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$

3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

Definición:

Si $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, **n** entero positivo, entonces

$$\mathbf{a}^{-n} = \frac{1}{\mathbf{a}^n}, \text{ o, también: } \mathbf{a}^{-n} = \left(\mathbf{a}^n\right)^{-1}$$

Propiedades de las potencias con exponentes enteros

Si **a**, **b** son reales diferentes de cero y **m**, **n** son enteros, se cumple que:

1) $\mathbf{a}^m \cdot \mathbf{a}^n = \mathbf{a}^{m+n}$

2) $(\mathbf{a}^m)^n = \mathbf{a}^{m \cdot n}$

3) $\frac{\mathbf{a}^m}{\mathbf{a}^n} = \mathbf{a}^{m-n}$

4) $(\mathbf{a \cdot b})^m = \mathbf{a}^m \cdot \mathbf{b}^m$

5) $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^m = \frac{\mathbf{a}^m}{\mathbf{b}^m}$

❑ EJERCICIO Nº 4

1) Determinar si las siguientes igualdades son ciertas o no y explicar.

a) $7(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = 7\mathbf{a}^2 + 7\mathbf{b}^2$

b) $2\mathbf{x}^{-2} = \frac{1}{2\mathbf{x}^2}$

c) $\mathbf{a}^3(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = (\mathbf{a}^3\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}^3\cdot\mathbf{c})$

d) $\mathbf{x}^{-1}+\mathbf{y}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{x}+\mathbf{y}}$

e) Si $\mathbf{m}=2\mathbf{n}$, $\mathbf{n}=\mathbf{r}^2$ entonces $\mathbf{m}^3-\mathbf{n}^3=7\mathbf{r}^6$

f) $\mathbf{a}(\mathbf{bm})^2 = \mathbf{a}(\mathbf{b}^2\mathbf{m}^2) = \mathbf{ab}^2+\mathbf{am}^2$

g) $(2\mathbf{m}-5\mathbf{n})^2+3\mathbf{m}^2+7\mathbf{m} = 4\mathbf{m}^2-25\mathbf{n}^2+10\mathbf{m}^3 = 14\mathbf{m}^5-25\mathbf{n}^2$

h) $(2\mathbf{m}-3)^2+2\mathbf{m}-7\mathbf{m}^2+10=19-3\mathbf{m}^2-10\mathbf{m}$

i) $\frac{-4^{-2}(\mathbf{mn})^{-2}}{4^3\mathbf{mn}^{-3}} = \frac{-\mathbf{n}}{4^5\mathbf{m}^3}$

2) Operar, expresando el resultado en forma simplificada y con exponentes positivos

a) $-2^3-(-5)^2$

b) $\mathbf{a}^{-2}(\mathbf{bac}^2)^2$

c) $\frac{-2(\mathbf{xy})^{-2}}{2^{-3}\mathbf{x}^2\mathbf{y}^{-3}}$

d) $2(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2+\mathbf{a}^2-\mathbf{ab}$

e) $(5\mathbf{x}^2)(3\mathbf{x}^3)(2\mathbf{xy})$

f) $-7m^2(-m^2n)^3(-5m^3)^2(-1)$

3) Si se sabe que $\mathbf{a}=2\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}=\mathbf{c}^2$, comprobar:

a) $\mathbf{a}^3\mathbf{c}^3-6\mathbf{a}^2\mathbf{c}^3\mathbf{b}+12\mathbf{ac}^3\mathbf{b}^2-8\mathbf{c}^3\mathbf{b}^3=0$

b) $4\mathbf{a}^2+12\mathbf{ab}+\mathbf{ab}=42\mathbf{c}^4$

c) $\mathbf{a}^2-\mathbf{ab}-2\mathbf{b}^2=0$

4) Si $\mathbf{p}=2\mathbf{b}^2$ y $\mathbf{b}=2\mathbf{m}$, comprobar:

$$2\mathbf{p}^2\mathbf{b}+5\mathbf{b}^5+2\mathbf{bm}^4 = 420\mathbf{m}^5$$

5) Para cada una de las siguientes expresiones calcular el valor numérico si

$\mathbf{x} = -1,\ \mathbf{y} = \frac{1}{2},\ \mathbf{z} = -2$

a) $2\mathbf{x}-\mathbf{y}^2-2\mathbf{z}^{-1}$
b) $3\mathbf{x}^2\mathbf{y}-3\mathbf{z}^2-\mathbf{y}^2$
c) $\mathbf{x}^{-1}-(-\mathbf{y})^{-1}+2\mathbf{z}$
d) $3(\mathbf{x}-1)-(\mathbf{y}+1)^2-(\mathbf{z}+2)^2$

6) Empleando las propiedades vistas hasta el momento, operar y reducir en cada caso:

a) $0.7(\mathbf{x} + 2)^2 + 3 (\mathbf{x} - 0.3)$
b) $3 - 5 (\mathbf{m} + 30 - 3.2\mathbf{m}) + 7\mathbf{m} (\mathbf{m} +6)$
c) $120(3\mathbf{b} - 2\mathbf{m}) - 8 + 9 (\mathbf{bm} +2) - (\mathbf{b} - \mathbf{m})^2$
d) $(\mathbf{x} + \mathbf{y})^3 - 6.8(\mathbf{x}^3 + 3.2 - \mathbf{y}^3)$
e) $1 - 5(\mathbf{w}^2 - \mathbf{n}^2) + 20 - 4(\mathbf{w} + 2\mathbf{n})^2$
f) $720 + 7[(\mathbf{b} - 3\mathbf{n}) + 2(5 - 3\mathbf{b}) + 1]3 + 1$

Factorización

Antes de realizar ejercicios de aplicación de las anteriores propiedades, hay que tener claro algunos casos básicos de factorización.

Un **polinomio** es una expresión de la forma general:

$\mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1\mathbf{x}+\mathbf{a}_2\mathbf{x}^2+\mathbf{a}_3\mathbf{x}^3+\ldots+\mathbf{a}_\mathbf{n}\mathbf{x}^\mathbf{n}$, con

$\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\ldots\ldots,\mathbf{a}_n \in \mathbf{R}$; $\mathbf{a}_\mathbf{n} \neq 0$ y **n** entero no negativo.

Al proceso de expresar este polinomio en forma de un producto, se le llama **factorización**.

Factor común

Al factorizar un polinomio se comprueba primero si los términos contienen factores comunes. De ser así, se escribe la expresión como el producto de los factores comunes y el polinomio apropiado, empleando la propiedad distributiva.

Ejemplo 1

$9\mathbf{x}^3\mathbf{y} - 27\mathbf{x}^4$

Como $9\mathbf{x}^3$ es factor común a los dos términos de la suma, entonces:
$9\mathbf{x}^3\mathbf{y} - 27\mathbf{x}^4 = 9\mathbf{x}^3(\ \mathbf{y} - 3\mathbf{x})$

Ejemplo 2

Factorizar $\mathbf{b}(\mathbf{a} - 2) - (\mathbf{a} - 2) + \mathbf{m}(\mathbf{a} - 2)$.

En este caso el factor común a los tres términos dados es $(\mathbf{a} - 2)$, es decir: $\mathbf{b}(\mathbf{a} - 2) - (\mathbf{a} - 2) + \mathbf{m}(\mathbf{a} - 2) = (\mathbf{a} - 2)(\mathbf{b} - 1 + \mathrm{m})$

Ejemplo 3

Factorizar $3\mathbf{x}^2 + 7\mathbf{x} - 6\mathbf{xy} - 14\mathbf{y}$

En este polinomio, no existe un factor común a los cuatro términos de la suma. Pero si se agrupan los términos adecuadamente, se puede lograr la factorización.

$3\mathbf{x}^2 + 7\mathbf{x} - 6\mathbf{xy} - 14\mathbf{y} = (3\mathbf{x}^2 + 7\mathbf{x}) + (-6\mathbf{xy} - 14\mathbf{y})$. Aplicando propiedad distributiva en cada uno de los términos, se tiene que:

$$\begin{aligned} 3\mathbf{x}^2 + 7\mathbf{x} - 6\mathbf{xy} - 14\mathbf{y} &= (3\mathbf{x}^2 + 7\mathbf{x}) + (-6\mathbf{xy} - 14\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}(3\mathbf{x} + 7) - 2\mathbf{y}(3\mathbf{x} + 7) \end{aligned}$$

Ahora el factor común es $3\mathbf{x} + 7$, luego:

$$= (3\mathbf{x} + 7)(\mathbf{x} - 2\mathbf{y})$$

Diferencia de cuadrados

Sean $\mathbf{x} + \mathbf{a}$ y $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ polinomios. Al efectuar el producto de estos dos polinomios se tiene: $(\mathbf{x} + \mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{x}^2 + \mathbf{ax} - \mathbf{ax} - \mathbf{a}^2 = \mathbf{x}^2 - \mathbf{a}^2$

Es decir**:** $\mathbf{x}^2 - \mathbf{a}^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a})(\mathbf{x} + \mathbf{a})$

Esta fórmula se utiliza para factorizar la diferencia de dos cuadrados.

Ejemplo 1

Factorizar $\mathbf{w}^8\mathbf{b}^{10} - \mathbf{m}^6$. Expresando cada término como un cuadrado:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^8\mathbf{b}^{10} - \mathbf{m}^6 &= (\mathbf{w}^4\mathbf{b}^5)^2 - (\mathbf{m}^3)^2 \\ &= (\mathbf{w}^4\mathbf{b}^5 - \mathbf{m}^3)(\mathbf{w}^4\mathbf{b}^5 + \mathbf{m}^3) \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Expresando cada término como un cuadrado, factorizar $x^{14} - 5$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{14} - 5 &= (\mathbf{x}^7)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 \\ &= (\mathbf{x}^7 - \sqrt{5})(\mathbf{x}^7 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Factorización de trinomios de la forma: $ax^2 + bx + c$

El trinomio $\mathbf{ax^2 + bx + c}$ se debe llevar a la forma: $\mathbf{s^2 + k(s) + d}$, la cual se factoriza así:

$\mathbf{s^2 + k(s) + d = (s + r_1)\ (s + r_2)}$; donde $\mathbf{r_1 + r_2 = k}$, **y**, $\mathbf{r_1 \cdot r_2 = d}$

Ejemplo 1

Factorizar $3x^2 + 8x + 4$

Solución:

$3\mathbf{x}^2 + 8\mathbf{x} + 4$ Amplificando el trinomio por 3;

$= \dfrac{3(3\mathbf{x}^2 + 8\mathbf{x} + 4)}{3}$ expresando en la forma general;

$= \dfrac{(3\mathbf{x})^2 + 8(3\mathbf{x}) + 12}{3}$ factorizando;

$= \dfrac{(3\mathbf{x} + 6)(3\mathbf{x} + 2)}{3}$ aplicando propiedad distributiva;

$= \dfrac{3(\mathbf{x} + 2)(3\mathbf{x} + 2)}{3}$ simplificando;

$= (\mathbf{x} + 2)(3x + 2)$

Ejemplo 2

Factorizar $\mathbf{x}^2 - 10\mathbf{x} + 25$.

Como este trinomio ya tiene la forma general requerida, entonces:

$\mathbf{x}^2 - 10\mathbf{x} + 25 = (\mathbf{x} - 5)(\mathbf{x} - 5) = (\mathbf{x} - 5)^2$

❑ EJERCICIO Nº 5

Factorizar completamente, si es posible:

1) $(a + 2b) + ma + 2bm$
2) $2xz + 2ax + z + a$
3) $3(a - b)^2 + 5\,(a - b)$
4) $(c + 3)^2 + 5c + 15 + 2ac + 6a$
5) $(2b + 2c)^2 + b + c$
6) $(am + 3an)^3 + (2m + 6n)^2$
7) $xy + 4x + ay + 4a - by - 4b$
8) $a^6 - \frac{1}{4}$
9) $x^2 - y^2 - 5x + 5y$
10) $2w^2 - 15w - 8$
11) $x^4 - 7$
12) $4^n x^{2n} - 9^m y^{2m}$
13) $x^2 y^3 - x^4 y^6$
14) $1 - \frac{1}{4} x^6$
15) $\frac{3}{4} - z^8$
16) $x^2 - x - 42$
17) $6t^3 - 7t^2 - 20t$
18) $15m^2 - 22m - 16$
19) $x^5 + 15x^4 + 56x^3$
20) $c^4 d^4 - 12\, c^2 d^2 + 20$
21) $4x^2 - y^2 + 4x - 2y$
22) $3(a - b)^2 + 5\,(a - b) + 2$
23) $a^4 - a^3 + a - 1$
24) $x^2 - 10$
25) $mp^{12} - m^5$
26) $-x^2 + 4x + 165$
27) $x^6 + x^5 - x^4 - x^3$
28) $36 + 3w - 5w^2$
29) $x^2 - y^2 - 6x + 9$
30) $6 - x^2$
31) $6x^2 + 11x - 10$
32) $x^2 + x + 1$
33) $12x^2 - 22x - 70$
34) $2x^2 - x - 1$
35) $a^2 - 2a - 2b + ab$
36) $x^2 - (a + b)^2$

37) $\frac{9}{4}\,\mathbf{z}^2 - \frac{3}{5}\,\mathbf{z} + \frac{1}{25}$

38) $35 + 6\mathbf{r} - 8\mathbf{r}^2$

39) $5\mathbf{x}^3 - 36\,\mathbf{x}^2 + 7\mathbf{x}$

40) $35\,\mathbf{x}^2 + 9\,\mathbf{x} - 2$

☐ Ejercicio complementario

Factorizar completamente, si es posible

a) $\mathbf{b}^3 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{b} - 1$

b) $(\,2\mathbf{t} - \mathbf{v})\mathbf{s} + 3\mathbf{u}(2\mathbf{t} - \mathbf{v})$

c) $\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{a}b$

d) $\mathbf{a}^2\mathbf{b}^4 - \mathbf{c}^2$

e) $3\mathbf{a}^4 - 27\mathbf{y}^4$

f) $\mathbf{b}^2 - (\mathbf{y} + \mathbf{a})^2$

g) $-5 + \mathbf{x}^2$

h) $\mathbf{ax}^2 + 4\mathbf{ax} + 4\mathbf{a}$

i) $8\mathbf{m}^2 + 6\mathbf{m} - 9$

j) $-3\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} + 10$

Operaciones entre racionales

☛ **RECUERDE QUE:**

Para, a,b,c,d (b,d≠0) reales se cumple:

1) $\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{bc}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, si, $\mathbf{c} \neq 0$

2) $\frac{-\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a}}{-\mathbf{b}}$

3) $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$, es equivalente a **ad=bc**

4) $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} + \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{\mathbf{b}}$

5) $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}}$

6) $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \div \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}}$; con $\mathbf{c} \neq 0$

Simplificación de expresiones racionales

Simplificar una expresión racional consiste en dividir por la misma expresión real (diferente de cero) tanto el numerador como el denominador de la fracción.

Una forma de simplificar una expresión racional es mediante la aplicación de la propiedad 1 antes mencionada. Para aplicar esta propiedad, es necesario factorizar completamente el numerador y el denominador de la expresión. Observe el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Simplificar la expresión racional $\frac{\mathbf{x}^4-9\mathbf{x}^2}{\mathbf{x}^3+3\mathbf{x}^2}$

Solución:

$\frac{\mathbf{x}^4-9\mathbf{x}^2}{\mathbf{x}^3+3\mathbf{x}^2}$ Aplicando factor común:

$=\frac{\mathbf{x}^2(\mathbf{x}^2-9)}{\mathbf{x}^2(\mathbf{x}+3)}$ Aplicando diferencia de cuadrados:

$=\frac{\mathbf{x}^2(\mathbf{x}-3)(\mathbf{x}+3)}{\mathbf{x}^2(\mathbf{x}+3)}$ Aplicando la propiedad 1

$=\mathbf{x}-3$ con $\mathbf{x}^2\neq 0$, **y**, $\mathbf{x}+3\neq 0$ equivalente a:

$=\mathbf{x}-3$ con $\mathbf{x}\neq 0$, **y**, $\mathbf{x}\neq -3$

Amplificación de expresiones racionales

Amplificar una expresión racional, consiste en multiplicar por la misma expresión real (diferente de cero) tanto el numerador como el denominador de la fracción (propiedad 1), es decir, esta operación es inversa a la simplificación.

Nota: Cuando una expresión racional se simplifica o se amplifica, las fracciones racionales que resultan en este proceso son **EQUIVALENTES** entre si.

Ejemplo 2

Utilizando amplificación, encontrar dos fracciones equivalentes a $\frac{5}{3\mathbf{x}-2}$

Solución:

- Se debe seleccionar una expresión diferente de cero para multiplicar tanto el numerador como el denominador de la fracción dada, para este caso consideremos la expresión $\mathbf{x}^2$, $\left(\mathbf{x}^2 \neq 0\right)$**,** luego:

$$\frac{5}{3\mathbf{x}-2} = \frac{5\cdot\mathbf{x}^2}{\left(3\mathbf{x}-2\right)\cdot\mathbf{x}^2} = \frac{5\mathbf{x}^2}{3\mathbf{x}^3-2\mathbf{x}^2} \quad \text{lo cual significa que :}$$

$$\frac{5}{3\mathbf{x}-2} \ \mathbf{y} \ \frac{5\mathbf{x}^2}{3\mathbf{x}^3-2\mathbf{x}^2} \text{ son equivalentes}$$

- Para encontrar la segunda fracción equivalente, amplificaremos por -1:

$$\frac{5}{3\mathbf{x}-2} = \frac{5(-1)}{(3\mathbf{x}-2)(-1)} = \frac{-5}{-3\mathbf{x}+2} \text{ , es decir:}$$

$$\frac{5}{3\mathbf{x}-2} \ \mathbf{y} \ \frac{-5}{-3\mathbf{x}+2} \text{ también son equivalentes}$$

Ejemplo 3

Dadas las fracciones algebraicas $\frac{5}{\mathbf{x}^2}$, $\frac{-3}{\mathbf{x}^4}$, $\frac{7}{\mathbf{x}^3}$ encontrar una fracción equivalente a cada una de ellas, de tal forma que todas tengan el mismo denominador.

Solución:

Como los denominadores $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^4$, $\mathbf{x}^3$ son potencias, se debe buscar una potencia múltiplo común a las tres, para así poder unificar el denominador.

Algunas potencias múltiplos comunes a los tres denominadores son: $\mathbf{x}^{12}$, $\mathbf{x}^{24}$, $\mathbf{x}^{36}$ (¿por qué?, ¿Existen más?). Seleccionando uno de estos múltiplos ej. $\mathbf{x}^{24}$ se puede determinar la expresión por la cual se debe amplificar cada fracción para así lograr el propósito.

$\frac{5}{\mathbf{x}^2}$ Se debe amplificar por $\mathbf{x}^{22}$ $(\mathbf{x} \neq 0)$

$\frac{-3}{\mathbf{x}^4}$ Se debe amplificar por $\mathbf{x}^{20}$ $(\mathbf{x} \neq 0)$

$\frac{7}{\mathbf{x}^3}$ Se debe amplificar por $\mathbf{x}^{21}$ $(\mathbf{x} \neq 0)$ ¿Por qué?

Así:

$$\frac{5}{\mathbf{x}^2} = \frac{5 \cdot \mathbf{x}^{22}}{\mathbf{x}^2 \cdot \mathbf{x}^{22}} = \frac{5\mathbf{x}^{22}}{\mathbf{x}^{24}}$$

$$\frac{-3}{\mathbf{x}^4} = \frac{-3 \cdot \mathbf{x}^{20}}{\mathbf{x}^4 \cdot \mathbf{x}^{20}} = \frac{-3\mathbf{x}^{20}}{\mathbf{x}^{24}}$$

$$\frac{7}{\mathbf{x}^3} = \frac{7 \cdot \mathbf{x}^{21}}{\mathbf{x}^3 \cdot \mathbf{x}^{21}} = \frac{7\mathbf{x}^{21}}{\mathbf{x}^{24}}$$

y todas las fracciones resultantes, equivalentes a las dadas, tienen el mismo denominador.

Suma de expresiones racionales

La propiedad 4 nos orienta sobre como sumar expresiones racionales. Si usted revisa esta propiedad, podrá darse cuenta que para su aplicación, las fracciones deben tener el mismo denominador.

¿Qué ocurre si las fracciones no tienen el mismo denominador?

Si las fracciones no tienen el mismo denominador, se deben encontrar expresiones equivalentes con el mismo denominador.

Como se vio en el ejemplo 3, existen muchas formas de expresar fracciones diferentes con el mismo denominador. Para sumar fracciones vamos a unificar el denominador utilizando el mínimo común múltiplo entre los denominadores, llamado **COMUN DENOMINADOR.**

☛ RECUERDE QUE:

El común denominador es el mínimo común múltiplo entre los denominadores de las expresiones racionales dadas

Ejemplo 4

Operar $\frac{1}{3\mathbf{x}^2} + \frac{5}{4\mathbf{x}^5}$

Solución:

Como las expresiones que se van a sumar tienen diferente denominador, se debe hallar el común denominador. Para el ejercicio, el mínimo común múltiplo entre $3\mathbf{x}^2$ y $4\mathbf{x}^5$ es $12\mathbf{x}^5$**,** por tanto:

$$\frac{1}{3\mathbf{x}^2}+\frac{5}{4\mathbf{x}^5}$$

Amplificando la primera fracción por $4\mathbf{x}^3$ y la segunda por 3:

$$=\frac{4\mathbf{x}^3}{12\mathbf{x}^5}+\frac{15}{12\mathbf{x}^5}$$

Aplicando la propiedad 4:

$$=\frac{4\mathbf{x}^3+15}{12\mathbf{x}^5}$$

Ejemplo 5

Operar y simplificar $\dfrac{5}{\mathbf{x}-7}-\dfrac{3}{\mathbf{x}^2-49}-\dfrac{1}{2\mathbf{x}+14}$

Solución:

Para hallar el mínimo común múltiplo entre los denominadores de las fracciones, es importante factorizar los diferentes denominadores, así:

$$\frac{5}{\mathbf{x}-7}-\frac{3}{\mathbf{x}^2-49}-\frac{1}{2\mathbf{x}+14}=\frac{5}{\mathbf{x}-7}-\frac{3}{(\mathbf{x}-7)(\mathbf{x}+7)}-\frac{1}{2(\mathbf{x}+7)}$$

El común denominador es $2(\mathbf{x}-7)(\mathbf{x}+7)$ ¿ Por qué ?

Este implica que la primera fracción debe ser amplificada por $2(\mathbf{x}+7)$, la segunda por 2 y la tercera por $(\mathbf{x}-7)$. Observe el desarrollo del ejercicio:

$$\frac{5}{\mathbf{x}-7}-\frac{3}{\mathbf{x}^2-49}-\frac{1}{2\mathbf{x}+14}$$

$$=\frac{5}{\mathbf{x}-7}-\frac{3}{(\mathbf{x}-7)(\mathbf{x}+7)}-\frac{1}{2(\mathbf{x}+7)}$$

$$=\frac{5\cdot 2(\mathbf{x}+7)}{(\mathbf{x}-7)\cdot 2(\mathbf{x}+7)}-\frac{3\cdot 2}{(\mathbf{x}-7)(\mathbf{x}+7)\cdot 2}-\frac{\mathbf{x}-7}{2(\mathbf{x}+7)(\mathbf{x}-7)}$$

$$=\frac{10(\mathbf{x}+7)}{2(\mathbf{x}-7)(\mathbf{x}+7)}-\frac{6}{2(\mathbf{x}-7)(\mathbf{x}+7)}-\frac{\mathbf{x}-7}{2(\mathbf{x}-7)(\mathbf{x}+7)}$$

$$=\frac{10(\mathbf{x}+7)-6-(\mathbf{x}-7)}{2(\mathbf{x}-7)(\mathbf{x}+7)}$$

$$=\frac{10\mathbf{x}+70-6-\mathbf{x}+7}{2(\mathbf{x}-7)(\mathbf{x}+7)}$$

$=\dfrac{9\mathbf{x}+71}{2(\mathbf{x}-7)(\mathbf{x}+7)}$ Como el numerador no es factorizable, no es posible simplificar, luego se resuelve la operación del denominador, quedando:

$$=\frac{9\mathbf{x}+71}{2\mathbf{x}^2-98}$$

Multiplicación y división de expresiones racionales

Para multiplicar o dividir expresiones racionales, es necesario considerar las propiedades 5 y 6 respectivamente.

Ejemplo 6

Operar y simplificar $\left(\frac{20\mathbf{x}^2-2\mathbf{x}}{4\mathbf{x}+20}\right)\left(\frac{2}{10\mathbf{x}-1}\right)-\frac{2}{\mathbf{x}+5}$

Solución:

$\left(\frac{20\mathbf{x}^2-2\mathbf{x}}{4\mathbf{x}+20}\right)\left(\frac{2}{10\mathbf{x}-1}\right)-\frac{2}{\mathbf{x}+5}$ Factorizando:

$=\left(\frac{2\mathbf{x}(10\mathbf{x}-1)}{4(\mathbf{x}+5)}\right)\left(\frac{2}{10\mathbf{x}-1}\right)-\frac{2}{\mathbf{x}+5}$ Aplicando la propiedad 5 (multiplicación entre fracciones):

$=\frac{4\mathbf{x}(10\mathbf{x}-1)}{4(\mathbf{x}+5)(10\mathbf{x}-1)}-\frac{2}{\mathbf{x}+5}$ Aplicando la propiedad 1 (Simplificación)

$=\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}+5}-\frac{2}{\mathbf{x}+5}$, $10\,\mathbf{x} - 1 \neq 0$ Aplicando la propiedad 4 (Suma de fracciones):

$=\frac{\mathbf{x}-2}{\mathbf{x}+5}$, con $10\,\mathbf{x} - 1 \neq 0$ (es decir: $\mathbf{X} \neq \frac{1}{10}$)

Ejemplo 7

Operar y simplificar $\frac{\mathbf{x}-(2\mathbf{x})^{-2}}{3\mathbf{x}^{-1}-1}$, $\mathbf{x} \neq 0$

Solución:

$$\frac{\mathbf{x}-(2\mathbf{x})^{-2}}{3\mathbf{x}^{-1}-1}$$

$$= \frac{x - \frac{1}{4x^2}}{3 \cdot \frac{1}{x} - 1} = \frac{\frac{4x^3}{4x^2} - \frac{1}{4x^2}}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{\frac{4x^3 - 1}{4x^2}}{\frac{3}{x} - \frac{x}{x}} = \frac{\frac{4x^3 - 1}{4x^2}}{\frac{3 - x}{x}} = \frac{(4x^3 - 1)x}{4x^2(3 - x)}$$

$$= \frac{4x^3 - 1}{4x(3 - x)},\ x \neq 0$$

$$= \frac{4x^3 - 1}{12x - 4x^2},\ \ x \neq 0$$

❑ EJERCICIO Nº 6

Para el desarrollo de los siguientes ejercicios, utilizar las reglas anteriores:

1) Simplificar, imponiendo las condiciones necesarias sobre la variable

a) $\frac{\mathbf{ax}-\mathbf{ay}}{\mathbf{by}-\mathbf{bx}}$ d) $\frac{\mathbf{x}^2(\mathbf{x}+3)^2}{\mathbf{x}(\mathbf{x}+3)}$ g) $\frac{\mathbf{x}-\mathbf{xy}}{\mathbf{x}^2-\mathbf{xy}}$

b) $\frac{\mathbf{x}^2\mathbf{n}-\mathbf{a}^2\mathbf{n}}{\mathbf{a}-\mathbf{x}}$ e) $\frac{(10\mathbf{x}^2\mathbf{y})^3}{(5\mathbf{xy})^2}$ h) $\frac{\mathbf{x}^2+5\mathbf{x}+6}{\mathbf{xy}+2\mathbf{x}+3\mathbf{y}+6}$

c) $\frac{4\mathbf{a}^4-64}{4\mathbf{a}^2-16\mathbf{a}+16}$ f) $\frac{2\mathbf{x}^2+\mathbf{x}-3}{\mathbf{x}^2-1}$ i) $\frac{\mathbf{a}-\mathbf{am}^4}{2\mathbf{a}(1-\mathbf{m}^2)}$

2) Busque el error (o errores) que se ha(n) cometido en cada uno de los siguientes procedimientos, indíquelos y luego realice la respectiva corrección.

a) $\frac{-\mathbf{a}^{-1}+\mathbf{b}^{-2}}{3^{-1}}=\frac{1}{3^{-1}}(-\mathbf{a}^{-1}+\mathbf{b}^{-2})=3\left(\frac{-1}{\mathbf{a}+\mathbf{b}^2}\right)$

b) $3+\frac{1}{2}(\mathbf{m}-0.2)=\frac{7}{2}\left(\mathbf{m}-\frac{2}{10}\right)=\frac{7}{2}\mathbf{m}-\frac{7}{10}=\frac{7\mathbf{m}-14}{10}=\frac{-13\mathbf{m}}{10}$

c) $5^{-3}+\left(\frac{3}{2}\right)^3=-5^3+\frac{3^3}{2^3}=-125+\frac{27}{8}=\frac{-125+27}{8}$

3) Operar y simplificar en cada caso, imponiendo las condiciones necesarias sobre las variables.

a) $\frac{\mathbf{a}^2-6\mathbf{a}+9}{\mathbf{a}^2-9}$

b) $2\dfrac{1+\dfrac{3}{5}}{\dfrac{2}{9}}$

c) $\left(\dfrac{2}{a}-\dfrac{7}{2a}+\dfrac{11}{3a}\right)^{-1}$

d) $\dfrac{7b}{2a-4}+\dfrac{b+1}{4a-8}-\dfrac{5}{3a-6}$

e) $\left(\left(\dfrac{1}{x-3}\right)\left(\dfrac{5}{x+3}\right)+\dfrac{4}{x^2-9}\right)\left(\dfrac{2}{x^2-9}\right)^{-1}$

f) $\left(\dfrac{1}{a-3}+3\right)^{-1}\left(\dfrac{a-3}{3a+8}\right)^{-1}+2a$

g) $(ab)^2+(ab)^{-2}$

h) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x+y}$

i) $\left(\dfrac{2}{3x}\right)^{-2}+\dfrac{9}{4x^{-2}}$

j) $\left[\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^2\right]\dfrac{(ax+b)^{-2}}{(cx+d)^4}$

k) $\left(\dfrac{x}{2x^2+3x-2}+\dfrac{1}{x^2-4}\right)\cdot\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{-1}$

l) $(5x)^{-2}-3x^{-3}-2(5x)^{-1}$

m) $2^{-1}+3\cdot 2^{-2}-5\cdot 2^{-3}$

n) $\left(\dfrac{25}{7}-\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$

o) $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - \frac{3}{\frac{2}{3} - 1}\right) + \frac{2}{3}$

p) $\left(\frac{4}{\mathbf{b} + 1} \div \frac{3}{2\mathbf{b} + 2}\right) + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b} + 1} + \frac{1 - \mathbf{b}}{2\mathbf{b} + 2}$

q) $\dfrac{\left(\frac{2\mathbf{a}^2}{2\mathbf{a} - 1} - \mathbf{a}\right) \div \frac{1}{8\mathbf{a} - 4} + 3}{4\mathbf{a} + 3} - 1$

r) $\left(\dfrac{\frac{\mathbf{x}}{2} + \frac{\mathbf{x}}{4} + \frac{\mathbf{x}}{8}}{\frac{\mathbf{x}}{2} - \frac{\mathbf{x}}{4} - \frac{\mathbf{x}}{8}}\right)^{-1}$

s) $\left(\frac{1}{\mathbf{x}} - \frac{3}{4\mathbf{x}^2}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{8\mathbf{x}}$

t) $\left(\frac{7}{2\mathbf{x}^2 - 7\mathbf{x} + 3} - \frac{1}{\mathbf{x} - 3}\right) \div \frac{1}{2\mathbf{x} - 1}$

u) $\left[\frac{3}{\mathbf{m}^2 + 2\mathbf{m}} - \frac{\mathbf{m}}{(\mathbf{m} + 2)^2}\right] \frac{2\mathbf{m} + 4}{\mathbf{m}^2 - 3\mathbf{m} - 6}$

v) $\left[\frac{1}{\mathbf{y}^2 - 3\mathbf{y} + 2} + \frac{3}{2\mathbf{y}^2 - 6\mathbf{y} + 4} - \frac{1}{\mathbf{y} - 2}\right]^{-1}$

TALLER Nº 1

1) Si **m** es el recíproco de **n**, **n** es el opuesto de **p** y **p** = $\frac{-3}{5}$ entonces:

a) $\mathbf{n} - 2\mathbf{p} + \mathbf{m}^2$ es igual a: ______________________________

b) $\dfrac{1}{\mathbf{p} - \frac{2}{\mathbf{n}}}$ es igual a: ______________________________

c) Comprobar que: $\mathbf{p}^2+\frac{1}{3}\mathbf{n}-\frac{1}{\mathbf{m}}=-\frac{1}{25}$

2) Operar y simplificar:

a) $(\mathbf{a}+2)^2\cdot 3-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-2\mathbf{a}\right)$

b) $0.2\left(\frac{1}{3}-\mathbf{b}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

3) Busque el error que se ha cometido en cada uno de los siguientes procedimientos, indíquelo y luego realice la respectiva corrección.

a) $$\frac{-7\mathbf{x}^{-1}+(2\mathbf{x})^{-2}}{\mathbf{x}}=\frac{\frac{-7}{\mathbf{x}}+\frac{1}{4\mathbf{x}^2}}{\mathbf{x}}=\frac{\frac{-27}{2\mathbf{x}^2}}{\mathbf{x}}=\frac{-27}{2\mathbf{x}}$$

b) $$\frac{4}{5\mathbf{x}^3}+\frac{7}{10\mathbf{x}^2}=\frac{\mathbf{x}+2}{5\mathbf{x}^2}$$

c) $$\frac{1}{2}-\frac{\mathbf{m}+2}{4}=\frac{2-\mathbf{m}+2}{4}=\frac{-\mathbf{m}}{4}$$

4) Operar y simplificar, imponiendo las condiciones necesarias:

a) $$\frac{\mathbf{x}-5}{\mathbf{x}^2+2\mathbf{x}-15}\cdot\frac{-3\mathbf{x}(-5-\mathbf{x})}{\mathbf{x}^2+5\mathbf{x}+6}\div\frac{6\mathbf{x}^3}{\mathbf{x}-3}$$

b) $$\frac{\mathbf{x}+3}{\mathbf{x}^2+\mathbf{x}-2}-\frac{\mathbf{x}-2}{\mathbf{x}^2+5\mathbf{x}+6}$$

c) $$\left(\frac{1}{\mathbf{a}-3}+3\right)^{-1}\left(\frac{\mathbf{a}-3}{3\mathbf{a}+8}\right)^{-1}$$

d) $$\frac{2}{3\mathbf{y}}+\frac{4}{\mathbf{y}+3}-\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{y}^2-9}$$

e) $\left[\dfrac{1}{2\mathbf{x}-4}-\dfrac{\mathbf{x}-3}{(\mathbf{x}-2)^2}\right]^{-1}\dfrac{1}{(\mathbf{x}-2)^2}$

f) $\left[\dfrac{2\mathbf{x}^2-11\mathbf{x}+15}{4\mathbf{x}^2-25}-\dfrac{3\mathbf{x}-1}{2\mathbf{x}+5}\right]\cdot\left[\dfrac{\mathbf{x}+1}{6\mathbf{x}+15}\right]^{-1}$

g) $\left(\dfrac{4}{\mathbf{x}+1}\div\dfrac{3}{2\mathbf{x}+2}\right)+\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}+1}+\left(\dfrac{2\mathbf{x}+2}{1-\mathbf{x}}\right)^{-1}$

Sumatorias

Si **a**, **b**, **c**, **d**,........,**m** $\in$ **R** *(esta es una forma general, en la cual se afirma que a, b, c,...m. pueden asumir cualquier valor real)* entonces la suma **a** + **b** + **c** +........+ **m** representa un único real. En este caso se presenta una suma un poco extensa que se puede abreviar mediante el símbolo de sumatoria: $\sum$. Además, es preferible emplear la siguiente notación para cada una de las variables:

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_1;\ \mathbf{b} = \mathbf{p}_2;\ \mathbf{c} = \mathbf{p}_3;\ \mathbf{d} = \mathbf{p}_4;\ \mathbf{e} = \mathbf{p}_5;..............;\mathbf{m} = \mathbf{p}_{13}$$

Nota: Se puede emplear cualquier letra para indicar estos elementos, pero el subíndice debe variar consecutivamente en el conjunto de los números naturales.

Hay que tener en cuenta que $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_{3,}$...... $\mathbf{p}_{13}$ son símbolos llamados variables, que en un momento determinado pueden ser reemplazados por números reales

Se tiene entonces:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + ...+ \mathbf{m} = \mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4+......+\mathbf{p}_{13}$$

y

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 + ... + \mathbf{p}_{13} = \sum_{\mathbf{k}=1}^{13} \mathbf{p}_\mathbf{k}$$

(Se lee: sumatoria de $\mathbf{p}_\mathbf{k}$ cuando **k** varía desde 1 hasta 13)

La sumatoria posee dos partes importantes: a) El **contador** que en este caso esta representado mediante la letra **k**, y varía en los enteros desde un límite inferior hasta un límite superior; estos se deben ubicar, respectivamente, en la parte inferior y superior del símbolo $\sum$. b) El **elemento genérico**, que puede ser constante o variable, representa la forma general de los términos de la suma. Para el caso anterior es $\mathbf{p}_\mathbf{k}$.

Ejemplo

Expresar mediante el símbolo de sumatoria la suma:

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\ldots\ldots\ldots+\frac{2}{50}$$

Es importante observar que el numerador de los fraccionarios dados es constante, mientras que los denominadores varían consecutivamente desde 3 hasta 50. Luego:

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\ldots\ldots\ldots+\frac{2}{50}=\sum_{\mathbf{m}=3}^{50}\frac{2}{\mathbf{m}}$$

❑ EJERCICIO Nº 7

1) Expresar mediante el símbolo de sumatoria.

a) $\mathbf{d}_{20}+\mathbf{d}_{21}+\mathbf{d}_{22}+\ldots\ldots\ldots+\mathbf{d}_{103}$

b) 3(4) + 3(5) + 3(6) + ...+3(21)

c) $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{23}{48}$

d) 2 * + 4 * + 6 * + 8 * + 10 * + 12 * + 14 *

e) $\Omega+\Omega^2+\Omega^3+\ldots\ldots\ldots+\Omega^n$

f) $\Delta+\frac{\Delta}{3}+\frac{\Delta}{5}+\frac{\Delta}{7}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\Delta}{823}$

g) $\underbrace{\nabla+\nabla+\nabla+\ldots\ldots+\nabla}_{28\ \textbf{sumandos}}$

h) $\mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1\mathbf{x}+\mathbf{a}_2\mathbf{x}^2+\mathbf{a}_3\mathbf{x}^3+\ldots\ldots\ldots+\mathbf{a}_n\mathbf{x}^{\mathbf{n}}$

2) Decidir si cada una de las siguientes igualdades es cierta o no y explicar la respuesta.

a) $\displaystyle\sum_{k=6}^{11} a_k = \sum_{r=6}^{11} a_r$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} a_{5k} = \sum_{k=1}^{7} a_{k5}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} a_k^2 = \left[\sum_{k=1}^{2} a_k\right]^2$

3) Expandir en cada caso y hallar el valor numérico, si es posible.

a) $\displaystyle\sum_{k=-4}^{-1} \frac{1}{k}$

b) $\displaystyle\sum_{j=-2}^{3} j$

c) $\displaystyle\sum_{m=5}^{7} \delta$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2}^{3} A_{ij}$

e) $\displaystyle\sum_{i=5}^{10} (-i+5)$

4) En cada caso determinar el error y corregirlo.

a) $X_5 + X_6 = X_{11}$

b) $X_3 X_2 + X_5 = X_6 + X_5$

c) $a_{33} + a_{33} = a_{33}^2$

❑ TALLER Nº 2

1) Expresar mediante el símbolo de sumatoria:

a) 3❋ + 5❋ + 7❋ + 9❋ + 11❋ + ...+27❋

b) $\displaystyle\frac{11}{2} + \frac{11}{3} + \frac{11}{4} + \frac{11}{5} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{11}{120}$

2) En cada uno de los siguientes casos expandir y calcular el valor siempre que sea posible.

a) $\displaystyle\sum_{k=-1}^{3} b^k$

b) $\displaystyle\sum_{m=-2}^{5} (-m+1)$

c) $\sum_{j=-1}^{3} \frac{2}{j+3}$ d) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=2}^{4} \frac{(-1)^i}{j}$

e) $\sum_{j=-3}^{2} -(-j)$

Propiedades. Interpretaciones

Con base en las propiedades de las operaciones de los números reales tratadas anteriormente, se definen las siguientes propiedades de sumatoria.

PROPIEDADES DE SUMATORIA

1) $\sum_{k=a}^{b} c = [(b-a)+1]c$

2) $\sum_{k=a}^{b} (m_k + n_k) = \sum_{k=a}^{b} m_k + \sum_{k=a}^{b} n_k$

3) $\sum_{k=a}^{b} ca_k = c\sum_{k=a}^{b} a_k$

Ejemplo

Aplicando las propiedades de sumatoria, calcular el valor de:

$\sum_{k=2}^{9} (7a_k + 5)$ si $\sum_{k=2}^{9} a_k = -3$

Solución:

$$\sum_{k=2}^{9} (7a_k + 5)$$

$$= \sum_{k=2}^{9} 7a_k + \sum_{k=2}^{9} 5$$ Propiedad 2

$$= 7\sum_{k=2}^{9} a_k + (8)(5)$$ Propiedades 3 y 1

$$= (7)(-3) + 40$$ Empleando la información dada

$$= -21 + 40$$

$$= 19$$

❑ EJERCICIO Nº 8

1) Determinar el error en cada uno de los siguientes procedimientos y realizar la respectiva corrección:

a) $\sum_{k=6}^{15} 2 = 15(2) = 30$

b) Si $\sum_{k=1}^{6} b_k = 100$ entonces:

$$\sum_{k=1}^{6} (3b_k - 1) = \sum_{k=1}^{6} (3 \cdot 100 - 1) = \sum_{k=1}^{6} 299 = 6(299) = 1794$$

2) Aplicando las propiedades de la sumatoria, calcular en cada caso, siempre que sea posible

a) $\sum_{m=o}^{100} (-4)$

b) $\sum_{i=1}^{5} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$

c) $\sum_{j=0}^{3} \left(3 \cdot 2^j - 2^{j-1}\right)$

d) $\sum_{i=1}^{3} 3i^2$

e) $\sum_{k=-1}^{2} (3k)^2$

f) $\left(\sum_{j=-2}^{4} 3j\right)^2$

3) Suponiendo que: $\sum_{i=1}^{10} a_i = \frac{5}{7}; \sum_{j=1}^{10} b_j = -\frac{1}{14}$, calcular:

a) $\sum_{k=1}^{10}(-a_k+b_k)$

b) $\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{1}{2}a_j+8\right)$

c) $\sum_{i=1}^{10}\left(b_i-3a_i-\sqrt{2}\right)$

d) $\left(\sum_{j=1}^{10}a_j\right)^{-1}$

e) $\left(\sum_{i=1}^{10}(4a_i+5b_j-1)\right)^{-1}$

4) Si a_1, a_2, a_3, ..., a_n representa el salario mensual de **n** personas, cual es el significado de cada una de las siguientes expresiones:

a) $\sum_{i=1}^{n}a_i$

b) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}$

c) $\sum_{i=1}^{n}(a_i+30\%a_i)$

d) $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{3}\right)$

5) Aplicando las propiedades de sumatoria, calcular:

a) Si $\sum_{i=1}^{3}a_i=-3$ **y** $\sum_{j=1}^{3}b_j=2$, el valor de: $\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}a_ib_j+j\right)$

b) $\sum_{m=1}^{3}(m-1)!$

c) $\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{2}{j}\right)^{-1}$

d) $\sum_{i=-1}^{4}\left(2^{-3}+\sum_{n=-1}^{3}2^{n-1}\right)^{-1}$

e) $\sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{i=0}^{4}i!-1\right)$

f) $\sum_{k=-1}^{2}\sum_{m=2}^{4}mk$

g) $\frac{1}{4}+\left(\sum_{j=1}^{4}\frac{2}{j}\right)^{-1}$

h) $\sum_{k=-2}^{2}(-2k+320)$

i) $\sum_{j=0}^{3}\left(j+\frac{2}{3}\right)^{-j}$

6) Un estudio del servicio de asesorías en una entidad arrojó los siguientes resultados:

Cantidad de asesorías realizadas

J: Fecha	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**
K: Profesor	X_{k1}	X_{k2}	X_{k3}	X_{k4}	X_{k5}
1: Rocío	320	250	200	150	180
2: Gabriel	160	140	150	145	160
3: Angela	40	120	100	120	130
4: Pablo	200	150	130	100	110
5: Martín	100	70	90	100	115
6: Lucía	100	300	150	110	120

Con base en los resultados tabulados:

a) Escriba el significado de X_{kj}

b) Interpretar y calcular: $\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{5} X_{kj}$

c) Expresar, mediante la notación de sumatoria, el total de asesorías realizadas por todos los profesores en 1997.

7) Sea C_{kj} la Cantidad de estudiantes en la carrera **k** de la universidad **j**

k = 0,1,2,3

0: Ingeniería de Sistemas
1: Finanzas
2: Matemáticas
3: Comunicación

j = 1,2,3,4

1: Politécnico Grancolombiano
2: Nacional
3: Javeriana
4: Andes

Interpretar:

a) $C_{0\,2}$

b) $C_{3\,1}$

c) $\sum_{k=0}^{3} C_{k2}$

d) $\sum_{i=1}^{4} C_{1j}$

e) $\sum_{k=2}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{kj}$

8) Sea $\mathbf{P}_{mk}$ = Precio de venta de **m** unidades del artículo **k**.
m = 50,51,52,........,60. **k** = 1,2,3.
1: Pocillo 2: Plato 3: Salero.

Interpretar:

a) $\mathbf{P}_{55\ 3}$ b) $\mathbf{P}_{50\ 2}$ c) $\sum_{\mathbf{k}=1}^{3} (25\%\mathbf{P}_{50\mathbf{k}})$ d) $\sum_{\mathbf{m}=56}^{60} \mathbf{P}_{\mathbf{m}\ 3}$

9) La siguiente información es tomada de la revista Dinero Nº 64 del 30 de junio de 1998)

DINERO (EN MILLONES DE DÓLARES)
DE LOS CINCO MAYORES BILLONARIOS DE
AMERICA DEL NORTE

J: Fecha	**1998**	**1997**	**1996**
K: Nombre	$\mathbf{X}_{\mathbf{k}1}$	$\mathbf{X}_{\mathbf{k}2}$	$\mathbf{X}_{\mathbf{k}3}$
1: William Gates	51	36.4	18.5
2: Familia Walton	48	27.6	23.7
3: W. E. Buffett	33	23.2	15
4: P. Gardner	21	15.3	3.0
5: Jay Pritzker	13	6.0	6.0

a) Interpretar y hallar el valor de: $\sum_{\mathbf{k}=1}^{5} \sum_{\mathbf{j}=1}^{3} \mathbf{X}_{\mathbf{kj}}$

b) Expresar $\sum_{\mathbf{k}=1}^{5} \mathbf{X}_{\mathbf{k}3}$ en pesos

❑ TALLER Nº 3

1) Sea $\mathbf{T}_{ij}$ la cantidad de libros de la editorial **i** que se encuentran en el estante **j** de cierta biblioteca.

Con: **i** = 1,2,3,4,5,6
j = 1,........, 10

$\sum_{\mathbf{j}=1}^{10} \mathbf{T}_{\mathbf{ij}}$ indica la cantidad de libros de la editorial **i** que hay en la biblioteca.

a) Escriba una expresión que indique la totalidad de libros de la editorial 2.

b) Escriba una expresión que indique la totalidad de libros de las editoriales 3, 4 y 5.

c) Escriba una expresión que indique la totalidad de libros de la editorial **i**.

d) Escribir el significado de cada una de las siguientes expresiones

a. $\sum_{i=1}^{6} T_{i2}$

b. $\sum_{i=1}^{6} T_{i1} + \sum_{i=1}^{6} T_{i2}$

c. $\sum_{i=1}^{3} T_{i2}$

d. $\sum_{j=1}^{10} \sum_{i=1}^{6} T_{ij}$

2) Sea $\mathbf{C}_{kj}$ = cantidad de estudiantes de la carrera **k** de la jornada **j**, donde:

k = 1,2,3,...,8; 1: Mercadeo 4: Contaduría 7: Banca
2: Sistemas 5: Agropecuaría 8: Comunicación
3: Finanzas 6: Seguros

J = 1, 2, 3; 1: Mañana 2: Tarde 3: Noche

Representar mediante el símbolo de sumatoria las siguientes cantidades:

a) Total de estudiantes de Seguros en la jornada de la mañana.
b) Total de estudiantes de Finanzas o Contaduría en la jornada de la noche.
c) Total de estudiantes de Mercadeo, Sistemas o Finanzas en las tres jornadas.
d) Total de estudiantes de las tres jornadas.
e) Total de estudiantes de Comunicación en las tres jornadas.
f) Total de estudiantes de la jornada nocturna.

3) Sea, $\mathbf{A}_{ij}$ la cantidad de palabras que tienen **i** letras, y que están en la página **j** de un libro. Si el libro tiene 120 páginas y en ellas se encuentran palabras con
i = 1,2,3,………,10 letras, interpretar:

a) $\mathbf{A}_{5\ 100}$ b) $\sum_{i=1}^{9} \mathbf{A}_{i\ 16}$

4) $\mathbf{C}_{ij}$ representa la cantidad de carros cuya placa termina en el dígito **i**, que se venden en Cali durante el mes **j** de 1999.
i = 0,1,2,……..,9 **j** = 1,2,3,………………,12
1: Enero. 2: Febrero……12: Diciembre.

a) Escribir en símbolos de sumatoria la cantidad total de carros vendidos en el primer bimestre de 1999, cuya placa termina en un dígito menor que 4.

b) Interpretar: $\sum_{i=6}^{9} \sum_{j=7}^{9} \mathbf{C}_{ij}$

5) Dada la tabla:

VALOR PROMEDIO ACCION ($)

(Datos tomados de la revista Dinero Nº 67 del 18 de agosto de 1998)

	Dic. 96	**Jun 97**	**Dic 97**	**May 98**	**Jun 98**
J: Fecha **K: Entidad**	$\mathbf{x}_{k\,1}$	$\mathbf{x}_{k\,2}$	$\mathbf{X}_{k\,3}$	$\mathbf{x}_{k\,4}$	$\mathbf{x}_{k\,5}$
1: Banco Anglo	54	55	53	54	55
2: Ban. Bogotá	5.873	6.744	6.569	5.423	4.335
3: Ban. Santander	2.273	3.078	3.487	2.001	2.131
4: Ban. Ganadero	251	399	528	486	458
5: Bavaria	4.063	7.849	13.199	8.292	7.828
6: Cadenalco	834	848	1.352	1.301	1.110
7: Noel	2.868	5.710	4.456	2.560	2.578

a) Interpretar: $\mathbf{X}_{k\ j,}$ con **j** = 1,2,3,4,5; $\mathbf{X}_{3\,2}$; $\mathbf{X}_{6\,5}$

b) Calcular e interpretar cada una de las siguientes sumatorias:

$$\frac{\sum_{k=1}^{7} X_{k3}}{7}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{5} X_{7j}}{5}$$

c) Calcular cada una de las siguientes sumatorias:

$$\sum_{k=1}^{3} (X_{k1} - X_{k5})$$

$$\left(\sum_{j=1}^{4} X_{3j} \right)^2$$

$$\sum_{j=1}^{4} (X_{3j})^2$$

Relación de orden en el conjunto de los números reales

Si se consideran dos números reales cualesquiera **a**, **b** se puede establecer sólo UNA de las siguientes relaciones:

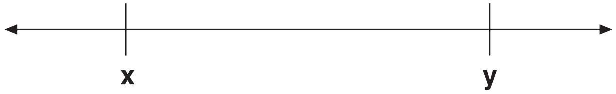
i) **a** menor que **b** (se simboliza: **a < b**)
ii) **a** mayor que **b** (se simboliza: **a > b**)
iii) **a** igual **a b** (se simboliza: **a** = **b**)

NOTA: La afirmación "**a** menor que **b**", es equivalente, a la afirmación "**b** mayor que **a**", es decir: $a < b \Leftrightarrow b > a$

DEFINICION: Si **x** es menor que **y**, entonces **y** – **x** es positivo, o viceversa, si **y** – **x** es positivo entonces **x** < **y**, es decir:

$x < y$, si y solamente si $y - x$ es positivo

Geométricamente, si **x**, **y** son reales, **x** < **y** significa que **x** está ubicado a la izquierda de **y** en la recta real.



Ejemplos:

$-7 < -2$ porque $(-2) - (-7) = -2 + 7 = 5$ es un real positivo

$-20 < 0$ porque $0 - (-20) = 0 + 20 = 20$ es un real positivo

☛ RECUERDE LAS PROPIEDADES:

1) Si **x, y** son números reales, se cumple una y sólo una de las siguientes propiedades:

   $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ o $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ o $\mathbf{x} > \mathbf{y}$

2) Si $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, y, $\mathbf{y} < \mathbf{z}$, entonces, $\mathbf{x} < \mathbf{z}$
3) $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ si y solamente si $\mathbf{x} + \mathbf{z} < \mathbf{y} + \mathbf{z}$
4) Si **z** es positivo y $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ entonces $\mathbf{xz} < \mathbf{yz}$
5) Si **z** es negativo y $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ entonces $\mathbf{xz} > \mathbf{yz}$.

Tomando como punto de referencia al real cero, los números reales se pueden separar en tres conjuntos disyuntos (no tienen elementos en común), a saber: el conjunto de los reales positivos, el conjunto de los reales negativos y el conjunto cuyo único elemento es cero.

☛ RECUERDE QUE:

Si **m** es un real positivo, se simboliza $m > 0$
Si **m** es un real negativo se simboliza $m < 0$
Si **m** es el real cero, se simboliza $m = 0$

❑ EJERCICIO Nº 9

1) Decidir si las siguientes desigualdades son verdaderas o falsas y justificar las respuestas.

   a) $-2<-20$
   b) $-3 < \frac{5}{9}$
   c) $\frac{6}{7} < \frac{34}{39}$
   d) $1>-39$
   e) $-4>-16$
   f) $\frac{-5}{7} < \frac{-44}{59}$

2) ¿Cuáles de las siguientes expresiones son correctas dado que $\mathbf{a} < \mathbf{b}$?

   a) $\mathbf{a} - 4 < \mathbf{b} - 4$
   b) $\mathbf{a}^2 < \mathbf{ab}$
   c) $-\mathbf{a} < -\mathbf{b}$
   d) $\mathbf{a}^3 < \mathbf{a}^2\mathbf{b}$

3) Si $\mathbf{a} < \mathbf{b} < 0$, para cada una de las siguientes afirmaciones, decidir si es verdadera o es falsa. Justificar.

a) $2\mathbf{a} > \mathbf{b}$ b) $\mathbf{a} + \mathbf{b} > 0$ c) $-b < 0$

d) $b(-a) < 0$ e) $\mathbf{a}^2 < 0$ f) $\frac{\mathbf{b}}{2} < \mathbf{a}$

g) $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} > 0$ h) $\frac{7}{9}\mathbf{b} > 0$

Intervalos

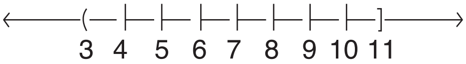
Clases de intervalos

$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$	
$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$	
$[\mathbf{a},\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} \le \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$	
$(\mathbf{a},\mathbf{b}] = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} < \mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$	
$(-\infty,\mathbf{b}] = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$	
$(-\infty,\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$	
$(\mathbf{a},\infty) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} > \mathbf{a}\}$	
$[\mathbf{a},\infty) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \ge \mathbf{a}\}$	
$\mathbf{R} = (-\infty,\infty)$	

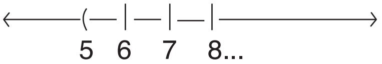
Nota: La relación de orden ≤ (que se lee «es menor o igual que») se define como $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ o $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Es decir: $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ es positivo o cero.

Ejemplo

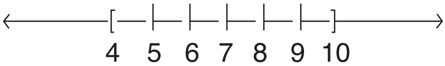
Usar la notación de intervalo para describir cada situación planteada.

a.


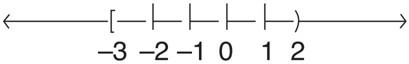
R/. (3, 11]

b.


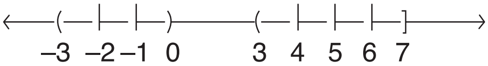
R/. $(5,\infty)$

c.


R/. [4, 10]

d.


R/. [–3, 2)

e.


R/. $(-3, 0) \cup (3, 7]$

Inecuaciones

¿Qué es una inecuación?

Una inecuación es una desigualdad (<, >, ≤, ≥) de expresiones reales con por lo menos una variable o incógnita.

Ejemplos

Son inecuaciones con una variable:

$$\frac{3\mathbf{x}+2}{5} \leq \mathbf{x}, \qquad 5\mathbf{y} - 3 > 3\mathbf{y} + 1, \qquad \mathbf{m}^2 + 5\mathbf{m} < 3, \qquad \frac{-12}{\mathbf{t}+6} \geq 1$$

¿Qué significa solucionar una inecuación?

Solucionar una inecuación es encontrar el conjunto de todos los números reales que hacen la desigualdad verdadera, a este conjunto se le denomina CONJUNTO SOLUCION. Si la solución es vacía, se dice que hay inconsistencia y se representa mediante el símbolo ϕ,o, $\{\,\}$ y si es diferente de vacío se representa por medio de un intervalo.

Las inecuaciones se pueden clasificar de acuerdo con la forma de las expresiones algebraicas que intervienen en la relación, por ejemplo:

$\frac{4}{\mathbf{x}+1} < \frac{1}{\mathbf{x}}$	es una inecuación racional
$7\mathbf{w} - 3 \geq 5$	es una inecuación lineal
$\mathbf{m}^2 + 5 > 0$	es una inecuación cuadrática
$\sqrt{\mathbf{t}+1} \leq 14$	es una inecuación radical

A continuación se estudiará como encontrar el conjunto solución de una inecuación lineal y posteriormente como solucionar las inecuaciones cuadráticas y racionales.

Inecuaciones lineales

Dependiendo de la relación que se establezca (<, >, ≤, ≥), se consideran las siguientes formas generales para una inecuación lineal:

$\mathbf{a\,x + b < 0}$, $\mathbf{a\,x + b > 0}$, $\mathbf{a\,x + b \leq 0}$, $\mathbf{a\,x + b \geq 0}$; donde **x** es la variable y **a, b** son reales

El conjunto solución de este tipo de inecuación, se puede encontrar mediante la aplicación de las propiedades 3, 4 y 5 (estas propiedades satisfacen también las relaciones ≤, ≥) antes mencionadas. Observe los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Solucionar $\frac{3}{5}\mathbf{w}-\frac{1}{2}>7$

Solución:

$$\frac{3}{5}\mathbf{w}-\frac{1}{2}>7$$

Por la propiedad 3 si se suma la misma cantidad en los dos lados de la inecuación, la relación se mantiene:

$$\frac{3}{5}\mathbf{w}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}>7+\frac{1}{2}$$

Operando:

$$\frac{3}{5}\mathbf{w}+0>\frac{15}{2}$$

$$\frac{3}{5}\mathbf{w}>\frac{15}{2}$$

Aplicando la propiedad 5, es conveniente multiplicar por $\frac{5}{3}$ (¿por qué?)

$$\left(\frac{5}{3}\right)\frac{3}{5}\mathbf{w}>\left(\frac{5}{3}\right)\frac{15}{2}$$

Operando:

$$\mathbf{w}>\frac{75}{6}$$

Luego el conjunto solución es el intervalo $\left(\frac{75}{6},\rightarrow\right)$**,** lo cual significa que cualquier real mayor que $\frac{75}{6}$ hace verdadera la desigualdad $\frac{3}{5}\mathbf{w}-\frac{1}{2}>7$

Ejemplo 2

Solucionar $-3\mathbf{m} + 2 \leq 10$

Solución:

$-3\mathbf{m} + 2 \leq 10$ Aplicando la propiedad 3:

$-3\mathbf{m} + 2 - \mathbf{2} \leq 10 - \mathbf{2}$ Operando:

$-3\mathbf{m} + 0 \leq 8$

$-3\mathbf{m} \leq 8$ Aplicando la propiedad 5, es conveniente multiplicar por $\frac{-1}{3}$ (Tenga en cuenta que la relación cambia de ≤ **a** ≥):

$\left(\frac{-1}{3}\right)(-3\mathbf{m}) \geq \left(\frac{-1}{3}\right) 8$ Operando:

$\mathbf{m} \geq \frac{-8}{3}$ luego el conjunto solución es el intervalo: $\left[\frac{-8}{3}, \rightarrow\right)$ lo cual significa que cualquier valor mayor o igual a $\frac{-8}{3}$ hace verdadera la desigualdad $-3\mathbf{m} + 2 \leq 10$

Ejemplo 3

Solucionar

$4\mathbf{x} - 7 < 3\mathbf{x} + 5$

Comparando con cero, se tiene que:

$4\mathbf{x} - 7 - 3\mathbf{x} - 5 < 0$ *A ambos lados de la inecuación se suma la cantidad*: $-3\mathbf{x} - 5$.

$\mathbf{x} - 12 < 0$	*Sumando los términos semejantes.*
$\mathbf{x} < 12$	*Luego el intervalo solución es (←,12), es decir que cualquier real menor que 12 hace verdadera la desigualdad 4**x**–7<3**x**+5*

Ejemplo 4

Determinar los valores de **x** que hacen positiva la expresión 1–5**x**. Como la condición es que la expresión 1–5**x** sea positiva entonces 1–5**x** > 0

PRIMERA MANERA:

$1 - 5\mathbf{x} > 0$	*Sumando a ambos miembros de la desigualdad la cantidad 5**x**:*
$1 > 5\mathbf{x}$	*Multiplicando a ambos miembros*
$\frac{1}{5} > \mathbf{x}$	*de la desigualdad por* $\frac{1}{5}$.

Ahora, como $\frac{1}{5} > \mathbf{x}$ es equivalente a $\mathbf{x} < \frac{1}{5}$,

la solución de la desigualdad dada está conformada por los valores reales de X que son menores que $\frac{1}{5}$.

La solución en notación de intervalo es: $\left(\leftarrow, \frac{1}{5}\right)$.

SEGUNDA MANERA:

$1 - 5\mathbf{x} > 0$	*Sumando –1 a ambos lados de la desigualdad:*

$-5x > -1$ *Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por la cantidad* $\frac{-1}{5}$

$x < \frac{1}{5}$ *Recuerde que esta propiedad indica que al multiplicar ambos miembros de una desigualdad por una cantidad negativa, la desigualdad cambia de sentido*.

Nuevamente, puede observarse que el conjunto solución de la desigualdad $1-5x > 0$ corresponde a los valores reales de **x** que se encuentran a la izquierda de $\frac{1}{5}$.

Inecuaciones compuestas

Una inecuación compuesta es un conjunto de inecuaciones relacionadas mediante las conectivas "**o**", o, " **y**" .

- Si están relacionadas con la conectiva "o", el conjunto solución es la unión de las soluciones respectivas de cada una de las inecuaciones que interviene.
- Si están relacionadas mediante la conectiva "**y**", el conjunto solución es la intersección (elementos comunes) de los conjuntos solución de cada una de las inecuaciones que interviene.

☛ **RECUERDE QUE:**

$X < Y < Z$ es equivalente a: $X < Y$ y $Y < Z$

Ejemplo 5

Solucionar $-5\mathbf{x} \le 7$ o $\dfrac{3\mathbf{x}-1}{2} > 10$

Solución:

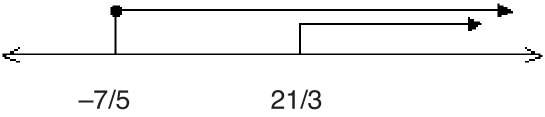
$$-5\mathbf{x} \le 7 \quad \text{o} \quad \frac{3\mathbf{x}-1}{2} > 10$$

$$\left(\frac{-1}{5}\right)(-5\mathbf{x}) \ge \left(\frac{-1}{5}\right)7 \quad \text{o} \quad 2\left(\frac{3\mathbf{x}-1}{2}\right) > 2(10)$$

$$\mathbf{x} \ge \frac{-7}{5} \quad \text{o} \quad 3\mathbf{x}-1 > 20$$

$$\mathbf{x} \ge \frac{-7}{5} \quad \text{o} \quad \mathbf{x} > \frac{21}{3}$$

Gráficamente:



Cuya solución general corresponde a la unión del intervalo $\left[\frac{-7}{5}, \rightarrow\right)$ con el intervalo $\left(\frac{21}{3}, \rightarrow\right)$ es decir:

Solución general = $\left[\frac{-7}{5}, \rightarrow\right) \cup \left(\frac{21}{3}, \rightarrow\right) = \left[\frac{-7}{5}, \rightarrow\right)$ lo cual significa que cualquier valor real en el intervalo $\left[\frac{-7}{5}, \rightarrow\right)$ satisface la inecuación

$-5\mathbf{x} \leq 7$ o la inecuación $\frac{3\mathbf{x}-1}{2} > 10$

Ejemplo 6

Solucionar $-3 < 5\mathbf{x} + 4 \leq 5\mathbf{x} + 1$

Solución:

La inecuación dada es equivalente a:

$-3 < 5\mathbf{x} + 4$ y $5\mathbf{x} + 4 \leq 5\mathbf{x} + 1$

$-3 - 4 < 5\mathbf{x} + 4 - 4$ y $5\mathbf{x} + 4 - 1 \leq 5\mathbf{x} + 1 - 1$

$-7 < 5\mathbf{x}$ y $5\mathbf{x} + 3 \leq 5\mathbf{x}$

$-7\left(\frac{1}{5}\right) < \left(\frac{1}{5}\right)(5\mathbf{x})$ y $5\mathbf{x} + 3 - \mathbf{5x} \leq 5\mathbf{x} - 5\mathbf{x}$

$\frac{-7}{5} < \mathbf{x}$ y $3 < 0$ (inconsistencia)

Recuerde que la solución general es la intersección entre el conjunto $\left(\frac{-7}{5}, \rightarrow\right)$ y ϕ, por tanto:

Solución general = $\left(\frac{-7}{5}, \rightarrow\right) \cap \phi = \phi$, lo cual significa que ningún real satisface la inecuación compuesta dada.

❑ EJERCICIO Nº 10

1) Para cada una de las siguientes inecuaciones encontrar el conjunto solución y expresarlo en notación de intervalo, si es posible

a) $7\mathbf{x} - 1 \leq 10\mathbf{x} + 4$

b) $-\mathbf{x} - \frac{2}{5}\mathbf{x} + 12 > 0$

c) $-6 < 2\mathbf{x} + 3 \leq -1$

d) $-3\mathbf{x} - 1 > 0$

e) $3\mathbf{x}^2 - 11x - 4 \leq 3(\mathbf{x} - 5)^2$

f) $-7\mathbf{x} > \frac{1}{2}$, o, $-\mathbf{x} > 0$

g) $-7.5 + 2.5(\mathbf{x} + 0.3) > 3.4\mathbf{x}$

h) $\dfrac{-7\mathbf{x} + \frac{1}{10}}{3} \leq \left(\dfrac{7}{4}\right)^{-1}$

i) $\frac{7}{2} < 3\mathbf{x} + \frac{1}{3}$

j) $-3 < -5\mathbf{x} + 4 < 7$

k) $\frac{2}{5} \leq -7\mathbf{x} + \frac{1}{2} < 6$

l) $-10\mathbf{x}<0$, o, $-8\mathbf{x}+3\leq 2^{-2}$

2) Determinar los valores reales que debe asumir la variable **x**, para que cada una de las siguientes expresiones sea positiva

a) $-7\mathbf{x} - 5$

b) $\frac{2}{3}(\mathbf{x} + 1) + 2\mathbf{x}$

c) $\frac{3}{5}(-\mathbf{x} - 1)2 - 3$

d) $\dfrac{3\mathbf{x} + \frac{1}{2}}{-4}$

e) $\dfrac{\frac{-3}{4}\mathbf{x} - 1}{2} + 5$

f) $\frac{\mathbf{x}}{4} + \frac{\mathbf{x}}{5} - 6\mathbf{x} - \frac{1}{4}$

3) Determinar los valores reales que debe asumir la variable **x**, para que cada una de las siguientes expresiones sea negativa

a) $\frac{-4}{7}\mathbf{x}$

b) $\frac{-6\mathbf{x}-1}{-5}$

c) $\frac{5}{2}\mathbf{x}-\frac{13}{4}(2\mathbf{x}-3)$

d) $\frac{1-\frac{\mathbf{x}}{2}+\frac{3\mathbf{x}}{4}}{\frac{1}{3}}$

e) $\frac{4}{10}+\frac{3}{10}\left(\frac{\mathbf{x}}{2}-10\right)\frac{2}{3}$

f) $1-\frac{3\mathbf{x}+1}{\frac{-2}{7}}$

Inecuaciones racionales

Una inecuación racional se caracteriza porque la variable o incógnita aparece en el denominador de una expresión racional.

Para solucionar una inecuación racional es importante tener en cuenta las siguientes propiedades.

1) Si $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} > 0$ entonces ($\mathbf{a} > 0$ y $\mathbf{b} > 0$) ó ($\mathbf{a} < 0$ y $\mathbf{b} < 0$)

2) Si $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} < 0$ entonces ($\mathbf{a} < 0$ y $\mathbf{b} > 0$) ó ($\mathbf{a} > 0$ y $\mathbf{b} < 0$)

3) Si $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \geq 0$ entonces ($\mathbf{a} \geq 0$ y $\mathbf{b} > 0$) ó ($\mathbf{a} \leq 0$ y $\mathbf{b} < 0$)

4) Si $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \leq 0$ entonces ($\mathbf{a} \leq 0$ y $\mathbf{b} > 0$) ó ($\mathbf{a} \geq 0$ y $\mathbf{b} < 0$)

Ejemplo 1

Resolver la inecuación: $\frac{1}{\mathbf{x}} > 5$

$$\frac{1}{\mathbf{x}} - 5 > 0$$

Para aplicar una de las p;ropiedades antes mencionadas, se debe trabajar respecto a cero.

$$\frac{1-5\mathbf{x}}{\mathbf{x}} > 0$$

Se tiene ahora $\frac{1-5\mathbf{x}}{\mathbf{x}} > 0$, que significa que se debe encontrar un conjunto de números reales tales que hagan que al efectuar la operación 1–5**x** dividido entre **x**, se obtenga un cociente positivo. Esta situación podemos reescribirla de manera equivalente como:

$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} > 0$, en donde, **a** = 1–5**x** y **b** = **x**.

¿Cuándo ocurre que $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ *es positivo?*

Decimos que $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} > 0$, si $\begin{cases} \mathbf{a} > 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{b} > 0 \\ \qquad\quad \text{o} \\ \mathbf{a} < 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{b} < 0 \end{cases}$

Ahora, retomando el anterior análisis, tenemos:

$$\frac{1-5\mathbf{x}}{\mathbf{x}} > 0 \quad , \quad \text{si} \begin{cases} 1-5\mathbf{x} > 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{x} > 0 \\ \qquad\qquad \text{o} \\ 1-5\mathbf{x} < 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{x} < 0 \end{cases}$$

$$\text{de donde,} \quad \begin{cases} -5\mathbf{x} > -1 \quad \text{y} \quad \mathbf{x} > 0 \\ \qquad\qquad \text{o} \\ -5\mathbf{x} < -1 \quad \text{y} \quad \mathbf{x} < 0 \end{cases}$$

$$\text{luego,} \begin{cases} \mathbf{x} < \frac{1}{5} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} > 0 \\ \qquad\quad \text{o} \\ \mathbf{x} > \frac{1}{5} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} < 0 \end{cases}$$

El siguiente paso en el desarrollo, consiste en hacer la gráfica de cada una de las correspondientes condiciones analizadas. La gráfica correspondiente para la condición $\mathbf{x} < \frac{1}{5}$ y $\mathbf{x} > 0$ es:

←//////////////////////////////)⟶ y ⟵(IIIIIIIIIIIIIIIIIIIII⟶

$\frac{1}{5}$ 0

$\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)$ $(0,\infty)$

Escribiendo esta información en una única gráfica, se tiene que:

←/////////////(I/I/I/I/I/I/I/I/I/I/I/I/I/I/I/I/I/I/)IIIIIIIII→

0 $\frac{1}{5}$

Obsérvese que aparece un segmento doblemente rayado: $\left(0,\frac{1}{5}\right)$,

que corresponde a la intersección de los conjuntos $\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)$ y $(0,\infty)$.

De igual manera, realizamos la gráfica para la condición:

$\mathbf{x} > \frac{1}{5}$ y $\mathbf{x} < 0$:

←IIIIIIIIIIIIIII)————(///////////////////→

0 $\frac{1}{5}$

Como los conjuntos $(-\infty,0)$ y $\left(\frac{1}{5}\ ,\ \infty\right)$ no poseen elementos en común,8 su intersección es vacía.

Reuniendo ahora los resultados obtenidos del anterior análisis, es decir: $\left(0,\frac{1}{5}\right) \cup \varnothing$, obtenemos la solución buscada, que para el caso es el intervalo: $\left(0,\frac{1}{5}\right)$.

Ejemplo 2

Solucionar $\frac{-15}{3-8\mathbf{x}} < 0$

Solución:

Como el numerador de la expresión es negativo, necesariamente el denominador debe ser positivo, es decir:

$3 - 8\,\mathbf{x} > 0$ equivalente a:

$-8\,\mathbf{x} > -3$

$\mathbf{x} < \frac{3}{8}$ luego el conjunto solución es el intervalo $\left(\leftarrow, \frac{3}{8}\right)$, lo cual significa que cualquier valor de este intervalo hace que la expresión $\frac{-15}{3-8\mathbf{x}}$ sea negativa.

Ejemplo 3

Encontrar el conjunto solución: $\frac{2\mathbf{x}-5}{\mathbf{x}-2} \le 1$

Solución:

$$\frac{2\mathbf{x}-5}{\mathbf{x}-2} \le 1$$ *Sumando –1:*

$$\frac{2\mathbf{x}-5}{\mathbf{x}-2} - 1 \le 0$$

$$\frac{2\mathbf{x}-5-(\mathbf{x}-2)}{\mathbf{x}-2} \le 0$$

Estamos ahora ante la situación:

$$\frac{\mathbf{x}-3}{\mathbf{x}-2} \le 0$$

$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \le 0$, *en donde es claro que* **b** *no puede ser igual a cero.*

Luego,

$$\begin{cases} \mathbf{x}-3\geq 0 \;\; \text{y} \;\; \mathbf{x}-2<0 \\ \qquad\qquad \text{o} \\ \mathbf{x}-3\leq 0 \;\; \text{y} \;\; \mathbf{x}-2>0 \end{cases}$$

Al trabajarse de igual manera que en los ejemplos anteriores, se genera el intervalo solución: (2,3]

Inecuaciones cuadráticas

Dependiendo de la relación que se establezca (<, > , ≤ , ≥), se consideran las siguientes formas generales para una inecuación cuadrática:

$\mathbf{ax}^2+\mathbf{bx}+\mathbf{c}<0$, $\mathbf{ax}^2+\mathbf{bx}+\mathbf{c}>0$, $\mathbf{ax}^2+\mathbf{bx}+\mathbf{c}\leq 0$, $\mathbf{ax}^2+\mathbf{bx}+\mathbf{c}\geq 0$; donde x es la variable y a,b,c son reales, a diferente de cero.

Para encontrar la solución de una inecuación cuadrática es importante tener en cuenta las siguientes propiedades:

1) Si $\mathbf{ab}\leq 0$ entonces ($\mathbf{a}\leq 0$ y $\mathbf{b}\geq 0$) o ($\mathbf{a}\geq 0$ y $\mathbf{b}\leq 0$)
2) Si $\mathbf{ab}\geq 0$ entonces ($\mathbf{a}\geq 0$ y $\mathbf{b}\geq 0$) o ($\mathbf{a}\leq 0$ y $\mathbf{b}\leq 0$)

Ejemplo

Solucionar para x: $\mathbf{x}^2+\mathbf{x}-2<0$

$(\mathbf{x}-1)(\mathbf{x}+2)<0$ *Factorizando la expresión polinómica*

Luego,

$$\begin{cases} \mathbf{x}-1>0 \quad \text{y} \quad \mathbf{x}+2<0 \\ \qquad\qquad \text{o} \\ \mathbf{x}-1<0 \quad \text{y} \quad \mathbf{x}+2>0 \end{cases}$$

Son las condiciones que de allí se desprenden

$$\begin{cases} \mathbf{x} > 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{x} < -2 \\ \qquad\quad \text{o} \\ \mathbf{x} < 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{x} > -2 \end{cases}$$ *Despejando la variable en cada caso*

La solución es el intervalo: $(-2,1)$ **.**

❑ EJERCICIO Nº 11

1) Para cada una de las siguientes inecuaciones encontrar el conjunto solución y expresarlo en notación de intervalo, si es posible

a) $7\mathbf{x} - 1 \le -10\mathbf{x} + 4$

b) $-6 < 2\mathbf{x}^2 + 3$

c) $3\mathbf{x}^2 - 11\mathbf{x} - 4 \le 0$

d) $\dfrac{\mathbf{x}+5}{2\mathbf{x}-1} \le 0$

e) $\dfrac{7}{2\mathbf{x}} < 3$

f) $\mathbf{x}(\mathbf{x} - 3)(\mathbf{x} + 4) > 0$

m) $\dfrac{-20\mathbf{x}+1}{3\mathbf{x}+2} < 2$

g) $-\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} + 12 > 0$

h) $(2\mathbf{x} + 3)(3\mathbf{x} - 1) > 0$

i) $-7\mathbf{x} > \dfrac{1}{2}$, o, $-\mathbf{x}^2 - 1 > 0$

j) $\mathbf{x}^2 \le 4$

k) $\dfrac{-7}{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 6} > 0$

l) $-\mathbf{x}(\mathbf{x}^2 - 3)(\mathbf{x} - 7) < 0$

n) $\dfrac{-7}{5\mathbf{x}-1} > -1$

2) Plantear y dar solución a cada uno de los siguientes problemas:

a) Si **x** unidades pueden venderse diariamente al precio de $**p** cada una, donde **p** = 60 –**x**, ¿cuántas unidades deben venderse para obtener un ingreso diario de al menos $ 800?

b) Un fabricante puede vender x unidades de un producto diariamente al precio de **p** pesos por unidad, en donde **p** = 200 – **x**, ¿qué número de unidades deberá venderse diariamente para obtener ingresos mínimos de $9900?

c) Un fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produce, a $ 60000 cada artículo. Gasta $ 40000 en materia prima y mano de obra al producir cada artículo, y tiene costos fijos de $ 3 000000 a la semana en la operación de la planta. Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de al menos $ 1 000000 a la semana

d) El dueño de una fábrica puede vender todas las unidades de un artículo que produce a $ 7600 cada una. Si tiene unos costos fijos de $ 4 700.000 y unos costos variables por unidad de $ 4400. ¿Cuántos artículos debe producir para obtener utilidades?

e) El costo C de producir x artículos, incluyendo los costos fijos y los costos variables, está dado por la fórmula **C** = 20x + 16000. ¿Cuántos artículos se deben producir para que el costo sea menor que $17100?

f) Un fabricante de chaquetas ha determinado que la demanda es tal que el precio unitario **p** (en pesos) viene dado por la fórmula **p** = 263 – 0.5**x**. ¿Cuántas chaquetas deben venderse para que el precio unitario sea: mayor que $165? ¿Menor que $190? ¿Cuál es el precio unitario si se venden 120 chaquetas?

g) Suponga que el costo **C** (en pesos) de producir x artículos, incluyendo los costos fijos y los costos variables, está dado por la fórmula **C** = 10x + 8000. ¿Cuántos artículos se pueden producir si el costo debe ser inferior a: $ 8550? ¿a $ 11775?

❑ TALLER Nº 4

PRERREQUISITOS

Operar correctamente racionales.
Manejar el concepto de opuesto y recíproco.
Tener claridad sobre las propiedades de las desigualdades.
Diferenciar las inecuaciones: lineal, cuadrática y racional; y las formas de solucionarlas.

1) En cada caso encontrar el conjunto solución, dando la respuesta como intervalo si es posible.

a) $-\frac{5}{3}\mathbf{d} \leq \frac{1}{9}$ b) $-7\left(\mathbf{w} + \frac{1}{3}\right) \geq -\left(0.3 + \frac{\mathbf{w}}{2}\right)$

2) Definir las variables, plantear y dar solución a:

Un fabricante puede vender todo lo que produce al precio de \$ 1500 por unidad. Los costos de materiales y mano de obra por unidad son \$ 800 y además existen costos fijos de \$ 4900 por semana ¿Cuántas unidades deberá producir y vender si desea obtener semanalmente una utilidad superior a \$ 300000?

3) Si $\mathbf{a} > 0$ y $\mathbf{b} < 0$, analizar la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes desigualdades, sustentando la respuesta en cada caso.

a) $-\frac{2.7}{\mathbf{a}} > 0$ b) $\mathbf{ab} > 0$ c) $\mathbf{a} + \mathbf{b} > 0$

d) $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} > 0$ e) $\mathbf{ab}^2 < 0$ f) $\mathbf{a} + 10 > 0$

g) $\mathbf{b} - 5 < -5$ h) $-\mathbf{b} < 0$ i) $\frac{-3}{4}\mathbf{b} < 0$

4) Definir las variables, plantear y dar solución a cada uno de los siguientes problemas:

   a) Una compañía de bolsos vende cada bolso al precio unitario p = (12 – 0.01**x**) miles de pesos, donde **x** es el número de bolsos vendidos. ¿Cuántos bolsos deben venderse para que el ingreso por la venta sobrepase los 2000 miles de pesos?

   b) La ecuación de costo total semanal para cierta empresa está dada por $\mathbf{C} = \mathbf{x}^2 - 30\mathbf{x} + 18000$ y la ecuación de ingreso semanal por $\mathbf{I} = 600\mathbf{x}$, donde *x* representa el número de unidades producidas y vendidas. Determinar el intervalo de producción y venta donde se incurre en pérdidas.

5) En cada uno de los siguientes casos determinar el conjunto solución y escribir la respuesta como intervalo, siempre que sea posible.

a) $\dfrac{\mathbf{a}}{3-\mathbf{a}} > 0$

b) $\mathbf{b}^2 \leq \dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{-230}{7-3\mathbf{b}} < 0$

d) $\mathbf{x}^2 + 13\mathbf{x} \geq -30$

e) $\dfrac{1}{8\mathbf{x}+4} \geq \dfrac{-3}{4\mathbf{x}+2}$

f) $\dfrac{25\mathbf{x}}{\mathbf{x}-1} < 20$

g) $\dfrac{1}{\mathbf{x}^2} < \dfrac{1}{\mathbf{x}}$

h) $\dfrac{3\mathbf{x}}{5\mathbf{x}^2} < -2$

6) Dada la tabla:

DISTRIBUCION PORCENTUAL DE LA POBLACIÓN COLOMBIANA POR EDAD (Censo 1993)

EDAD: E	PORCENTAJE
$0 < E < 5$	10.95%
$5 \leq E < 10$	11.32%
$10 \leq E < 15$	11.50%
$15 \leq E < 20$	10.12%
$20 \leq E < 25$	9.64%
$25 \leq E < 30$	9.09%
$30 \leq E < 35$	8.26%
$35 \leq E < 40$	6.76%
$40 \leq E < 45$	5.30%
$45 \leq E < 50$	3.98%
$50 \leq E < 55$	3.48%
$55 \leq E < 60$	2.62%
$60 \leq E < 65$	2.43%
$65 \leq E < 70$	1.67%
$70 \leq E < 75$	1.25%
$75 \leq E$	1.62%

Determinar los intervalos de edades para los cuales se cumple:

a) La población es superior al 9%
b) La población es superior al 10% pero inferior al 11%
c) La población no es superior al 3.5%
d) La población está entre el 1% y el 3%
e) La población no es inferior al 10%
f) La población no es inferior al 5.30% ni superior al 7%.
g) La población sobrepasa el 11%

Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad de dos expresiones algebraicas con por lo menos una incógnita.

Ejemplo 1

Son ecuaciones con una incógnita (**x**):

$$\frac{1}{7}\mathbf{x} + 3 = -2\mathbf{x} \quad ; \quad 3\mathbf{x}^2 - 5\mathbf{x} = 2 \quad ; \quad \sqrt{3\mathbf{x} + 5} = \mathbf{x} + 2$$

Ejemplo 2

Son ecuaciones con dos incógnitas (**x**, **y**):

$$3\mathbf{x} + 2\mathbf{y} = 5 \quad ; \quad \sqrt{\mathbf{x} + 4\mathbf{y}} = 6 \quad ; \quad \frac{1}{\mathbf{x} + \mathbf{y}} = 20$$

¿Qué significa resolver una ecuación?

Resolver una ecuación es encontrar el conjunto de todos los números reales, llamado el conjunto solución, que hacen la igualdad verdadera.

Definicion

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución

Las ecuaciones al igual que las inecuaciones, se clasifican de acuerdo con el tipo de expresión algebraica que interviene en la igualdad. A través de este curso se estudiarán ecuaciones de tipo lineal, racional, cuadrático, radical, logarítmico y exponencial entre otros.

Ecuaciones lineales con una incognita

Una ecuación lineal con una incógnita tiene la forma general $\mathbf{a}\mathbf{x}+\mathbf{b}=0$ con **a**, **b** reales. En particular si $\mathbf{a} \neq 0$ se le llama ecuación de primer grado.

Tipos de solucion

La solución de una ecuación de tipo lineal se puede clasificar en una de las tres siguientes alternativas:

i) Solución única. Cuando existe un único valor real que hace la igualdad verdadera.
ii) Infinitas soluciones. Cuando existen infinitos valores reales que satisfacen la igualdad.
iii) Sin solución. No existe valor real que haga la igualdad verdadera (en este caso se dice que la ecuación es inconsistente)

¿Cómo encontrar el conjunto solución de una ecuación lineal?

☛ RECUERDE LAS SIGUIENTES PROPIEDADES:

1) Si una ecuación se multiplica por una misma cantidad diferente de cero a los dos lados de la igualdad, la ecuación que resulta es equivalente con la inicial.
2) Si a una ecuación se le suma la misma cantidad a los dos lados de la igualdad, la ecuación que resulta es equivalente con la inicial.

Utilizando las reglas mencionadas, se podrá encontrar el conjunto solución de una ecuación lineal. Observe los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $\frac{3}{5}\mathbf{x}+2=7$

Solución:

$\frac{3}{5}\mathbf{x}+2=7$ Sumando –2 a ambos lados de la ecuación:

$\frac{3}{5}\mathbf{x}=7-2$ Multiplicando por el inverso multiplicativo de $\frac{3}{5}$ a ambos lados de la ecuación.

$\frac{3}{5}\mathbf{x}=5$

$\mathbf{x}=5\left(\frac{5}{3}\right)$

$\mathbf{x}=\frac{25}{3}$ Es la solución buscada (solución única).

Observe que al reemplazar en la ecuación $\frac{3}{5}\mathbf{x}+2=7$ el valor obtenido para la variable **x**, es decir, $\mathbf{x}=\frac{25}{3}$, se obtiene una igualdad:

$\frac{3}{5}\left(\frac{25}{3}\right)+2=7$ Simplificado:

$5 + 2 = 7$
$7 = 7$

Ejemplo 2

Solucionar $\frac{3\mathbf{x}+5}{2}=\frac{6\mathbf{x}+10}{4}$

Solución:

Como la ecuación dada no tiene la forma general aún, por medio de algunas propiedades ya vistas, se logrará obtener esta.

$\frac{3\mathbf{x}+5}{2}=\frac{6\mathbf{x}+10}{4}$ Propiedad de equivalencia de racionales:

$(3\mathbf{x} + 5)\ 4 = 2\ (6\mathbf{x} + 10)$ Propiedad distributiva:

$12\mathbf{x} + 20 = 12\mathbf{x} + 20$ Sumando $-12\mathbf{x}$ (Propiedad de ecuaciones):

$-12\mathbf{x} + 12\mathbf{x} + 20 = -12\mathbf{x} + 12\mathbf{x} + 20$ Operando:

$0\mathbf{x} + 20 = 20$ Sumando -20, quedaría la ecuación lineal:

$0\mathbf{x} = 0$ Esta implica que x puede asumir cualquier valor real, pues el producto de cualquier real con cero es siempre cero.

Luego, Solución = **R** (Infinitas soluciones)

Ejemplo 3

Solucionar $2\mathbf{x} - 1 = 2\mathbf{x} + 4$

Solución:

$2\mathbf{x} - 1 = 2\mathbf{x} + 4$ Expresando en la forma general:

$0\,\mathbf{x} - 5 = 0$

$-5 = 0$ Lo cual es una inconsistencia, por tanto la ecuación NO tiene solución.

Es decir, Solución = ϕ

Ejemplo 4

Solucionar la ecuación: $6\mathbf{x} - 7 = 2\mathbf{x} + 14$

Solución:

$6\mathbf{x}-7=2\mathbf{x}+14$

$6\mathbf{x}-2\mathbf{x}=14+7$ ¿Por qué?

$4\mathbf{x}=21$

$\mathbf{x} = \frac{21}{4}$ Es la solución buscada.

Ecuaciones racionales

Una ecuación racional se caracteriza porque la incógnita o variable aparece en el denominador de la expresión racional que interviene en la igualdad. Los tipos de solución son similares a los de una ecuación lineal como se muestra a continuación:

Ejemplo 5

Solucionar $\frac{1}{\mathbf{x}} + \frac{2}{3\mathbf{x}} = 4$

Solución:

$\frac{1}{\mathbf{x}} + \frac{2}{3\mathbf{x}} = 4$ Para llevar a la forma general, se suman las fracciones del lado izquierdo:

$\frac{5}{3\mathbf{x}} = 4$	Por equivalencia de racionales:
$5 = 4\,(3\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \neq 0$	Operando:
$5 = 12\mathbf{x},\ \mathbf{x} \neq 0$	Multiplicando por $\frac{1}{12}$
$\frac{5}{12} = \mathbf{x}\,,\ \mathbf{x} \neq 0$	Como no hay contradicción entre la condición y el valor hallado, entonces

la solución es $\mathbf{x} = \frac{5}{12}$

Prueba:

$$\frac{1}{\frac{5}{12}} + \frac{2}{3\frac{5}{12}} = \frac{12}{5} + \frac{2}{\frac{5}{4}} = \frac{12}{5} + \frac{8}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

Ejemplo 6

Solucionar $\frac{3\mathbf{x}+9}{\mathbf{x}+3} = 0$

Solución:

$\frac{3\mathbf{x}+9}{\mathbf{x}+3} = 0$	Como $\mathbf{x} + 3 \neq 0$, o, $\mathbf{x} \neq -3$; necesariamente:
$3\mathbf{x} + 9 = 0$ y $\mathbf{x} \neq -3$	Aplicando las propiedades de una ecuación:
$\mathbf{x = -3}$ y $\mathbf{x} \neq -3$	Contradicción. Por tanto la ecuación dada no tiene solución

Ejemplo 7

Solucionar $\frac{1}{\mathbf{x}-2}-\frac{11}{4\mathbf{x}-8}=\frac{-7}{4\mathbf{x}-8}$

Solución:

$$\frac{1}{\mathbf{x}-2}-\frac{11}{4\mathbf{x}-8}=\frac{-7}{4\mathbf{x}-8}$$

Para determinar la condición y operar, factorizamos los denominadores:

$$\frac{1}{\mathbf{x}-2}-\frac{11}{4(\mathbf{x}-2)}=\frac{-7}{4(\mathbf{x}-2)}$$

Condición $\mathbf{x}-2\neq 0$, o , $\mathbf{x}\neq 2$

$$\frac{4-11}{4(\mathbf{x}-2)}=\frac{-7}{4\mathbf{x}-8}$$

con $\mathbf{x}\neq 2$

$$\frac{-7}{4\mathbf{x}-8}=\frac{-7}{4\mathbf{x}-8}$$

con $\mathbf{x}\neq 2$

$$-7(4\mathbf{x}-8)=-7(4\mathbf{x}-8)$$

con $\mathbf{x}\neq 2$

$$-28\mathbf{x}+56=-28\mathbf{x}+56$$

con $\mathbf{x}\neq 2$ equivalente **a**:

$0\,\mathbf{x}=0$ y $\mathbf{x}\neq 2$

Luego **x** puede asumir cualquier real diferente de 2

Solución = **R – {2}**

Ejemplo 8

Para la ecuación $\frac{1}{\mathbf{a}}=\frac{1}{\mathbf{b}}+\frac{1}{\mathbf{c}}$, despejar **c**:

$$\frac{1}{\mathbf{a}}-\frac{1}{\mathbf{b}}=\frac{1}{\mathbf{c}}\ ;\ \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\neq 0$$

$$\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{ab}} = \frac{1}{\mathbf{c}}$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{ab}$$

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{b}-\mathbf{a}}\ ,\ \text{con}\ \ \mathbf{b} \neq \mathbf{a}$$

❑ EJERCICIO Nº 12

1) Solucionar cada una de las siguientes ecuaciones en **R**

a) $9\mathbf{x}^2 - 16 = (3\mathbf{x}-4)^2$

b) $\frac{2\mathbf{x}+2}{4} - \frac{2\mathbf{x}-3}{7} = \frac{\mathbf{x}}{3}$

c) $4\mathbf{x} - \frac{1}{100} = \frac{1}{3}\mathbf{x}$

d) $8 - \frac{3}{\mathbf{x}} = 2 + \frac{5}{\mathbf{x}}$

e) $\frac{\mathbf{x}+4}{4} = \frac{\mathbf{x}}{2} + 5$

f) $\frac{3\mathbf{x}-7}{4} - 2 = \frac{\mathbf{x}}{8}$

g) $\frac{2}{7}(1-2\mathbf{x}) - 1 = \frac{4}{7}(2\mathbf{x}-1)$

h) $\frac{6\mathbf{x}+1}{4\mathbf{x}-1} = \frac{3\mathbf{x}+1}{2\mathbf{x}-3}$

i) $0.05(\mathbf{x}+10) - 0.02\mathbf{x} = 3.2$

j) $\frac{5\mathbf{x}}{\mathbf{x}-7} = \frac{35}{\mathbf{x}-7}$

k) $1 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3\mathbf{x}} - 2\right) = \frac{-5}{2}$

l) $-3 + 4(2\mathbf{x}+2) - 7 = 8\mathbf{x} - 2$

m) $\frac{13}{\mathbf{x}-3} + \frac{5}{2\mathbf{x}-6} = 0$

n) $\frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{x}}{2} - 1\right) = \frac{3}{4}\mathbf{x}$

o) $\frac{3-\frac{1}{\mathbf{x}}}{\frac{3}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

p) $\left(\frac{4-\mathbf{x}}{5\mathbf{x}}\right)^{-1} = \frac{15\mathbf{x}}{-3\mathbf{x}+12}$

2) Plantear cada una de las siguientes situaciones:

   a) El doble de **m.**
   b) La tercera parte de **y** + 1
   c) La quinta parte del cuadrado de **x**
   d) La diferencia entre **m** y **n**
   e) El 6% de $\mathbf{x}^2 + 5$
   f) El 2 por mil de x cantidad
   g) El triplo de la suma entre **x** y 9**y**
   h) La suma de los cuadrados de **m** y **n**
   i) El cuadrado de la suma de **m** y **n**.

3) Plantear la expresión en cada caso, y solucionar si es posible.

   a) Si M supera al doble de N en 300 unidades y la suma de M y N es 14000, ¿cuál es el valor aproximado de N?

   b) 20 mas que el doble de P equivale a 180, ¿Cuál es el valor de P?

   c) El dos por mil (2‰) de cierta cantidad R es 7820 ¿Cuál es el valor de R?

   d) Las tres quintas partes del ingreso total semanal en una empresa equivalen a 2380000 ¿Cuál es el ingreso semanal en esta empresa?

   e) Raúl gasta la séptima parte de su dinero en un libro, y el 32% en un viaje, si ahorra $ 1200000 ¿Cuánto dinero tenía Raúl inicialmente?

4) Un hombre hace 2 inversiones, al 48% y 50% anual respectivamente. Si lo que invierte al 50% es el doble de lo que invierte al 48% y su ingreso total anual por las dos inversiones es de $ 458800, ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

5) Una persona tienen **x** cantidad de dinero en un banco, si quisiera retirar todo el dinero le harían un descuento del dos por mil equivalente a 7000. ¿cuánto dinero tiene en el banco?

6) Los miembros de una fundación desean invertir \$ 2 100000 en dos tipos de seguros que pagan dividendos anuales del 9% y 6% respectivamente. ¿Cuánto deberán invertir en cada tasa si el ingreso debe ser equivalente al que produciría al 8% la inversión total?

7) En una entrevista para un empleo, se le coloca al aspirante el siguiente problema: puede elegir entre dos planes salariales: El plan A le proporciona un salario semanal de \$ 200000 más una comisión del 3% sobre sus ventas; el plan B le ofrece un salario semanal de \$ 100000 más una comisión del 8% sobre sus ventas. ¿Qué plan escogería? (establezca las condiciones).
¿Para qué valor de ventas se recibirá el mismo salario semanal?

9) En cada una de las siguientes ecuaciones despejar **w**, e imponer las condiciones necesarias:

a) $\mathbf{wa} + \mathbf{wb} = \mathbf{c}$

b) $\mathbf{n}(\mathbf{bw} - \mathbf{nw}) = \mathbf{w} + a$

c) $\frac{1}{\mathbf{w}} + \frac{1}{\mathbf{b}} = 1$

d) $\mathbf{p} = 2\mathbf{b} + 2\mathbf{w}$

e) $\mathbf{wa} + \mathbf{bw} = \mathbf{c}$

f) $\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{c}} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \mathbf{d}$

g) $\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{aw} - \mathbf{bw}} = \mathbf{d}$

h) $\mathbf{b}(\ \mathbf{w} - \mathbf{a}) = \mathbf{c}^3$

i) $\frac{\mathbf{xw}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{w}}{\mathbf{b}}$

j) $\frac{\mathbf{w} - \mathbf{br}}{\mathbf{w} + \mathbf{a}} = \mathbf{d}$

10) En cada una de las ecuaciones anteriores despejar **b**.

11) Definir las variables, plantear y solucionar cada uno de los siguientes problemas.

a) Una persona compra tres artículos **A**, **B** y **C** por un total de \$ 105000 Si el precio del artículo **A** equivale a las dos terceras partes del precio del artículo **B** y, el precio del artículo **B** es el 10% del precio del artículo **C.** ¿Cuál es el precio de cada artículo?

b) El fabricante de cierto producto puede vender todo lo que produce al precio de $ 20 la unidad. Le cuesta $ 12.50 producir cada artículo por los materiales y la mano de obra, y tiene un costo adicional de $ 7000 al día con el fin de operar la planta. Encuentre el número de unidades que debe producir y vender para obtener una utilidad de $ 5000 al día.

c) El presupuesto destinado para el funcionamiemto de una compañía en el mes de marzo, está distribuido de la siguiente manera: el 50% para el pago de nómina de empleados y servicio de energía; 1/12 de dicho presupuesto para el pago de servicio de publicidad, $ 80000 para el pago de impuestos y nueve veces lo correspondiente al pago de impuestos lo invierte en la compra de un nuevo equipo de oficina, el resto, lo invierte en un C.D.T. ¿Cuál es el presupuesto de la compañía en el mes de marzo, si el C.D.T corresponde a las 17/5 partes de lo destinado al pago de publicidad? (R: 6 000000)

❑ TALLER Nº 5

Definir las variables, plantear el problema y resolverlo.

1) Una pareja de esposos invirtieron $ 1 100000 a un año. Una parte al 27% anual y la otra al $\frac{91}{4}$ % anual de interés simple. Si ganaron $ 269375 de interés total, ¿cuánto dinero invirtieron a cada tasa?

2) Un estudiante hizo un préstamo por $ 1 800000 para su matrícula. Si debe pagar un interés del 15%, y el pago total debe hacerlo en tres cuotas mensuales de diferente valor, así: La primera cuota excede en $ 230000 al 40% de la segunda cuota; el doble de la segunda cuota excede al total que debe pagar en $ 230000. ¿Cuánto hay que pagar en cada cuota?

3) Una persona invierte una cantidad de dinero al 35% y el doble de esta cantidad al 38%. Si la ganancia que obtiene en total por

las dos inversiones es de \$ 249750 ¿Cuánto invierte en cada porcentaje?

4) Tres cuentas de ahorros están en la siguiente situación: la primera tiene saldo inferior en \$ 50000 a la tercera. El doble del saldo de la segunda cuenta es superior en \$ 20000 al saldo de la primera cuenta. Si los tres saldos suman \$ 240000. ¿Cuánto dinero hay en cada cuenta?

5) Una compañía invierte \$ 3 000000. Una parte de esta cantidad la invierte al 50% y la otra al 68% de interés anual. Si desea obtener un rendimiento anual no inferior al 65%, ¿cuál es la cantidad mínima de dinero que debe invertir a la tasa del 68%?

6) Si a las $\frac{3}{4}$ partes del precio de un artículo se le hace un descuento del 12%, ¿qué descuento se hizo al precio inicial del artículo, si por él se canceló \$ 182000?

7) Si la quinta parte del costo de un artículo se cancela de contado, de la parte restante se paga el 25% con tarjeta de crédito y, de este nuevo saldo los $\frac{2}{3}$ con un cheque a 30 días y aún se adeuda \$ 200000, ¿cuál es el porcentaje del cheque con respecto al costo total del artículo?

8) Los conductores de camiones para el transporte de cemento hicieron huelga durante 46 días. Antes de la huelga, estos conductores ganaban \$ 750 por hora y trabajaban 260 días al año, con 8 horas de trabajo al día. ¿Qué porcentaje respecto del total ganado en un año por un conductor representa el salario de los 46 días de huelga?

9) El Señor Pérez recibió su sueldo y lo invirtió así: el 30% en arriendo, los $\frac{2}{5}$ en el estudio de sus hijos, el 0.25 en alimentación y ahorró \$ 55000. ¿Cuál fué el sueldo del Señor Pérez?

10) Un estudiante tomó un préstamo por $ 600000, pero debe pagar esa cantidad aumentada en 25%. El pago debe hacerlo en tres cuotas quincenales teniendo en cuenta que: El 50% de la tercera cuota es inferior en $ 60000 a la segunda cuota, el 200% de la primera cuota excede en $ 20000 al saldo de la tercera cuota. ¿Cuánto debe pagar el estudiante en cada cuota?

11) Si las $\frac{3}{5}$ partes del costo de un artículo se cancelan de contado, de la parte restante se paga el 40% con cheque a 30 días y aún se adeuda $ 240000.

    a) ¿Cuál es el precio del artículo?
    b) Si se hace un descuento de $ 50000, ¿a qué porcentaje corresponde este descuento con respecto del costo?

12) Una persona destina $ 1 000000 para realizar dos inversiones. Si se sabe que el doble de una de las inversiones sobrepasa en $ 200.000 a la otra inversión, ¿Qué porcentaje respecto del total corresponde a cada inversión?

Ecuaciones cuadráticas

Toda ecuación de la forma $\mathbf{ax}^2+\mathbf{bx}+\mathbf{c}=0$, en donde $\mathbf{a,b,c} \in \mathbf{R}$ y $\mathbf{a}\neq 0$, se denomina, ecuación cuadrática o de segundo grado.

Un método para resolver ecuaciones cuadráticas es utilizar la fórmula cuadrática, que a continuación se presenta:

$$\mathbf{x} = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$$

¿Cómo utilizarla?

1. Escriba la ecuación cuadrática dada en su forma general, es decir, llévela (si no aparece de esta manera) a la forma:
   $\mathbf{ax}^2 + \mathbf{bx} + \mathbf{c} = 0$

2. Identifique los valores de **a,b,c** en la ecuación y reemplácelos luego en la fórmula.

Antes de comenzar a solucionar ecuaciones cuadráticas, es importante saber algo sobre la naturaleza de las posibles soluciones que se pueden obtener. El discriminante, **D**, de la ecuación cuadrática nos sirve para esto.

Sea $\mathbf{D} = \mathbf{b}^2-4\mathbf{ac}$

a) Si $\mathbf{b}^2-4\mathbf{ac}$ es mayor que cero, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.
b) Si $\mathbf{b}^2-4\mathbf{ac}$ es igual a cero, la ecuación tiene única solución.
c) Si $\mathbf{b}^2-4\mathbf{ac}$ es menor que cero, la ecuación no tiene solución en los reales. ¿Por qué?

Ejemplos:

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

1) $3\mathbf{x}^2 = 6\mathbf{x} + 24.$

Expresando ésta en su forma general, se tiene:

$3\mathbf{x}^2 - 6\mathbf{x} - 24 = 0.$

En donde, **a** = 3, **b** = –6, **c** = –24. Reemplazando estos valores en la fórmula $\mathbf{x} = \dfrac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$, se obtiene:

$$\mathbf{x} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-24)}}{2(3)}$$

$$\mathbf{x} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 288}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{324}}{6} = \frac{6 \pm 18}{6}$$

Luego, $\mathbf{x} = \dfrac{6+18}{6}$ o $\mathbf{x} = \dfrac{6-18}{6}$, es decir, **x** = 4 o **x** = –2

Luego el conjunto solución es {–2,4}

2) $3\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} + 7 = 0$

En esta: **a** = 3, **b** = 2, **c** = 7

Reemplazando estos valores en la fórmula $\mathbf{x} = \dfrac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$,

se obtiene: $\mathbf{x} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(3)(7)}}{2(3)}$,

$$\mathbf{x} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 84}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{-80}}{6},$$

Como se puede observar, la ecuación no tiene solución en los reales, ya que el discriminante, –80, es menor que cero.

3) $$\frac{2\mathbf{x}}{\mathbf{x}-1}+\frac{3}{\mathbf{x}+1}=\frac{2}{\mathbf{x}^2-1}$$

$$\frac{2\mathbf{x}(\mathbf{x}+1)+3(\mathbf{x}-1)}{(\mathbf{x}-1)(\mathbf{x}+1)}=\frac{2}{\mathbf{x}^2-1}$$

En donde debe tenerse que: $\mathbf{x} \neq 1, -1$
Luego,

$2\mathbf{x}(\mathbf{x}+1)+3(\mathbf{x}-1)=2$ ¿Por qué?

$2\mathbf{x}^2+5\mathbf{x}-5=0$, aplicando la fórmula tenemos que:

$$\mathbf{x}=\frac{-5\pm\sqrt{25-4(2)(-5)}}{2(2)}$$

$$\mathbf{x}=\frac{-5\pm\sqrt{65}}{4}\approx\frac{-5\pm 8{,}06}{4}$$

Luego, $\mathbf{x}=\frac{-5+8{,}06}{4}\approx 0.765,$ o, $\mathbf{x}=\frac{-5-8{,}06}{4}\approx -3.265$

Como estos valores NO contradicen las condiciones, el conjunto solución es: {–3.265, 0.765}. (Comprobar estas soluciones).

Otro método para solucionar una ecuación cuadrática, es a partir de la factorización, utilizando la siguiente regla:

Si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, entonces $\mathbf{a}=0$, o , $\mathbf{b}=0$

☛ RECUERDE QUE:

Si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, entonces, $\mathbf{a}=0$ o $\mathbf{b}=0$, con $\mathbf{a,b}\in R$

Ejemplos

1) Resolver la ecuación: $\mathbf{x}^2 = 7$

Solución:

Al llevar la ecuación dada a la forma general, se tiene:

$\mathbf{x}^2 - 7 = 0$ factorizando la diferencia de cuadrados.

$\left(\mathbf{x} - \sqrt{7}\right)\left(\mathbf{x} + \sqrt{7}\right) = 0$ Equivalente a:

$\mathbf{x} - \sqrt{7} = 0$, o, $\mathbf{x} + \sqrt{7} = 0$ ¿por qué?

$\mathbf{x} = \sqrt{7}$, o, $\mathbf{x} = -\sqrt{7}$

Luego el conjunto solución es: $\left\{-\sqrt{7},\ \sqrt{7}\right\}$

2) Resolver la ecuación $5\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} = 0$

Solución:

$5\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} = 0$, factorizando:

$\mathbf{x}(5\mathbf{x} - 2) = 0$, es decir:

$\mathbf{x} = 0$, o, $5\mathbf{x} - 2 = 0$ ¿por qué?

$\mathbf{x} = 0$, o, $\mathbf{x} = \dfrac{2}{5}$

Solución= $\left\{0, \dfrac{2}{5}\right\}$

❑ EJERCICIO Nº 13

1) Para cada una de las siguientes ecuaciones encontrar el conjunto solución:

a) $3\mathbf{x}^2 - 5\mathbf{x} = \mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} + 9$

b) $2\mathbf{x}^2 - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}\mathbf{x}$

c) $(\mathbf{x} - 4)^2 = 16$

d) $\left(\frac{\mathbf{x} - 1}{\mathbf{x} + 2}\right)^2 = 4$

e) $2\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} - 3 = 0$

f) $-2\mathbf{x}^2 = 6\mathbf{x}$

g) $\frac{\mathbf{x} + 2}{\mathbf{x} - 1} - \frac{1}{\mathbf{x}} = 2$

h) $\frac{1}{\mathbf{x}^2 - 25} - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x} + 5} = \frac{1}{3}$

i) $9\mathbf{x}^2 - 16 = 0$

j) $\frac{2}{7}(1 - 2\mathbf{x}) - 1 = \frac{4}{7}(2\mathbf{x}^2 - 1)$

k) $\mathbf{x}^2 - \frac{1}{100} = 0$

l) $0.05(\mathbf{x} + 10)^2 - 0.02\mathbf{x} = 3.2$

m) $2\mathbf{m}^2 + 3\mathbf{m} = 35$

n) $\mathbf{x}^2 + 2 = 2\sqrt{3}\mathbf{x}$

o) $\frac{\mathbf{x}^2 + 4}{4} = \frac{\mathbf{x}^2}{2} + 5$

p) $\frac{2\mathbf{x} + 2}{4} - \frac{2\mathbf{x}^2 - 3}{7} = \frac{\mathbf{x}}{3}$

2) Despejar la variable que se indica en cada caso:

a) En $\bar{\mathbf{K}} = \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{Q} + 10)}{44}$ despejar **Q.** Aquí, **Q** representa el ingreso real y $\bar{\mathbf{K}}$ representa el nivel de oferta del dinero.

b) En $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{vmM}}{\mathbf{d}^2}$ despejar **d**.

3) Resolver el siguiente problema y verificar la solución.

Una persona hace una venta de garaje en donde espera obtener unos ingresos totales por US$ 100. Si las cantidades **x** están relacionadas por la ecuación: **x** = 20 – **p**, en donde, **p** representa el precio por unidad, encontrar el precio que se debe fijar para lograr alcanzar los ingresos deseados.

❑ TALLER Nº 6

1) ¿Cuántas soluciones numéricas reales tiene una ecuación cuadrática si el discriminante es igual a cada una de las siguientes cantidades?

a) 0 b) –32 c) 2.3

2) Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\mathbf{x}^2 + 6\mathbf{x} + 2 = 0$ b) $7\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} = -1$

3) Resolver para **w** en cada caso:

a) $(\mathbf{aw}^2 - \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{d}$

b) $(\mathbf{mn} + \mathbf{w})^2 = \mathbf{aw}$

c) $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b} + \mathbf{w}^2} = \mathbf{b}^{-1}$

d) $\dfrac{2}{\mathbf{w}^2} - \dfrac{3}{3\mathbf{w}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

e) $3 + 5(\mathbf{w} + 2)^2 = (2\mathbf{w} - 1)^2 - 1$

f) $\dfrac{\mathbf{w}^2 - \mathbf{b}}{\mathbf{w} + \mathbf{a}} = 0$

g) $\mathbf{mw}^2 + qw - \mathbf{p} = 0$

h) $\dfrac{1}{\mathbf{w}^2 - 4} - \dfrac{\mathbf{w}}{\mathbf{w} + 2} = 3$

i) $\dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{aw}^2 - \mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}$

j) $\mathbf{aw}^2 + \mathbf{bw}^2 = \mathbf{d}$

4) En cada uno de los siguientes casos resolver la ecuación para **m,** si es posible.

a) $\dfrac{2}{5\mathbf{m}+1}-\dfrac{3}{10\mathbf{m}+2}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}$

b) $\left(\dfrac{5}{\mathbf{m}^2-3}\right)^{-1}=0$

c) $2=\dfrac{1}{\mathbf{m}}-\mathbf{m}^{-2}+1$

5) En cada uno de los siguientes casos despejar **P**, e imponer las condiciones necesarias.

a) $\mathbf{P}^2+\mathbf{M}=\mathbf{Q}$
b) $\mathbf{M}+\mathbf{DP}=\mathbf{R}(\mathbf{P}+\mathbf{M})$
c) $\mathbf{P}^2-\mathbf{R}^2=0$
d) $(\mathbf{PQ}+\mathbf{N})^2=\mathbf{R}$
e) $\mathbf{M}_1=\mathbf{M}_2(1+\mathbf{P}/100)^2$

6) Definir las variables, plantear y solucionar cada uno de los siguientes problemas.

a) Una persona compra tres artículos A, B y C por un total de \$70000. Si el precio del artículo A equivale a la cuarta parte del precio del artículo B y, el precio del artículo B es el 22% del precio del artículo C, ¿cuál es el precio de cada artículo?

b) La ecuación de utilidad para cierta empresa, está dada por $\mathbf{U}=\mathbf{x}^2+1100\,\mathbf{x}-280000$ miles de pesos. Donde **x** representa el número de unidades producidas y vendidas:

– ¿Para qué nivel de producción y venta se obtiene una utilidad de 400 miles de pesos?

– Determinar el punto o puntos de equilibrio.

Radicales

Definición

1. Si **n** es un entero positivo impar y **a** es un número real, entonces $\sqrt[n]{\mathbf{a}}$ es el número real **x**, tal que $\mathbf{x}^n = a$.

2. Si **n** es un entero positivo par y **a** es un número real no negativo, entonces $\sqrt[n]{\mathbf{a}}$ es el número real no negativo **x** tal que $\mathbf{x}^n = a$

Ejemplos

$\sqrt[5]{-32} = -2$ pues, $(-2)^5 = -32$

$\sqrt[4]{81} = 3$ pues, $3^4 = 81$

$\sqrt{\mathbf{b}^6} = \mathbf{b}^3$ si b es real no negativo (¿Por qué?)

☛ **RECUERDE QUE:**

Si a,b son números reales

1) $\sqrt[n]{\mathbf{ab}} = \sqrt[n]{\mathbf{a}} \cdot \sqrt[n]{\mathbf{b}}$ con a,b ≥ 0 si **n** es par.

2) $\sqrt[n]{\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}} = \dfrac{\sqrt[n]{\mathbf{a}}}{\sqrt[n]{\mathbf{b}}}$, $\mathbf{a} \geq 0$ y $\mathbf{b} > 0$ si **n** es par.

3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\mathbf{a}}} = \sqrt[nm]{\mathbf{a}}$, con a ≥ 0 si **m** es par.

4) $\left(\sqrt[n]{\mathbf{a}}\right)^m = \sqrt[n]{\mathbf{a}^m}$, con a ≥ 0 si **n** es par.

5) $\sqrt[n]{\mathbf{a}^n} = \mathbf{a}$, con a ≥ 0 si **n** es par.

❑ Ejercicio Nº 14

1) ¿Bajo qué condiciones, cada una de las siguientes expresiones es real?

a) $\sqrt{-\mathbf{x}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{x}}}$ c) $\sqrt[4]{\mathbf{x}^2}$ d) $\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}$ e) $\sqrt[6]{\mathbf{x}+1}$

f) $\dfrac{-3}{\sqrt[4]{4-\mathbf{x}^2}}$ g) $\sqrt{\mathbf{x}^2-2}$ h) $\sqrt{\dfrac{-4}{2\mathbf{x}+5}}$ i) $\sqrt[6]{\mathbf{x}^4+\mathbf{x}^3}$

2) Utilizar las propiedades de los radicales para simplificar las expresiones:

a) $\sqrt{12\mathbf{xy}^3}\ \sqrt{3\mathbf{x}^2\,\mathbf{y}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{4\mathbf{x}^4\mathbf{y}}}{\sqrt[3]{5\mathbf{xy}^{-2}}}$

3) Emplear la calculadora para realizar las siguientes operaciones, redondeando la respuesta a tres cifras decimales:

a) $\sqrt[4]{(-2.5)^2}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{-0.25}}{\sqrt{4.6}}$ c) $\dfrac{2-\sqrt[5]{-7}}{\sqrt{48.8}}$

d) $2.7-\sqrt[7]{2^3}+\sqrt[5]{-2^2}$ e) $\dfrac{5^{-3}+\sqrt{3}}{2^{-3}}$ f) $\left(\dfrac{5^{-\frac{2}{3}}}{7+3^{2.5}}\right)$

Ecuaciones con radicales

Una ecuación con radical es aquella en la que una incógnita aparece dentro de un radical. Por ejemplo:

$$\sqrt{\mathbf{x}+2}=12,\quad \sqrt{\mathbf{x}-3}=\mathbf{x}+2,\quad \sqrt{\mathbf{x}}=7$$

A continuación se ilustra el proceso de solución de ecuaciones con radicales.

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

1) $\sqrt{\mathbf{x}-3}=6$

Se eleva al cuadrado a ambos lados de la igualdad:

$\left(\sqrt{\mathbf{x}-3}\right)^2=(6)^2$, luego,
$\mathbf{x}-3=36$, de donde:
$\mathbf{x}=39$

Se prueba la respuesta obtenida, $\mathbf{x}=39$, reemplazando en la ecuación dada $\sqrt{\mathbf{x}-3}=6$:

$$\sqrt{39-3}=6$$

$$\sqrt{36}=6$$

$$6=6$$

Luego la solución es: $\mathbf{x}=39$

2) $\sqrt{2\mathbf{x}-4}=\mathbf{x}-2$

Se eleva al cuadrado ambos lados de la igualdad:

$\left(\sqrt{2\mathbf{x}-4}\right)^2=(\mathbf{x}-2)^2$, equivalente a:

$2\mathbf{x}-4=\mathbf{x}^2-4\mathbf{x}+4$, ordenando la ecuación cuadrática obtenida se tiene que:

$\mathbf{x}^2-6\mathbf{x}+8=0$. Aquí se puede utilizar la fórmula cuadrática o factorizar.

$(\mathbf{x}-4)(\mathbf{x}-2)=0$, de donde:

$\mathbf{x}-4=0$, o, $\mathbf{x}-2=0$, luego:

$\mathbf{x}=4$, o, $\mathbf{x}=2$

Se debe verificar estas posibles soluciones:

Para $\mathbf{x} = 4$: Para $\mathbf{x} = 2$:

$\sqrt{2(4)-4} = 4-2$, $\sqrt{2(2)-4} = 2-2$

$\sqrt{8-4} = 2$, $\sqrt{4-4} = 0$

$\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{0} = 0$

$2 = 2$, $0 = 0$

Luego, solución = {2,4}

3) $\sqrt{3\mathbf{x}-2} = \mathbf{x}-2$

Se eleva al cuadrado ambos lados de la igualdad:
$\left(\sqrt{3\mathbf{x}-2}\right)^2 = (\mathbf{x}-2)^2$, luego:

$3\mathbf{x} - 2 = \mathbf{x}^2 - 4\mathbf{x} + 4$. Ordenando la ecuación cuadrática obtenida se tiene que:

$\mathbf{x}^2 - 7\mathbf{x} + 6 = 0$. Utilizando la factorización, se obtiene:

$(\mathbf{x} - 6)(\mathbf{x} - 1) = 0$, luego,

$\mathbf{x} - 6 = 0$ o $\mathbf{x} - 1 = 0$

$\mathbf{x} = 6$ o $\mathbf{x} = 1$

Se deben verificar estas posibles soluciones:

Para $\mathbf{x} = 6$: Para $\mathbf{x} = 1$

$\sqrt{3(6)-2} = 6-2$, $\sqrt{3(1)-2} = 1-2$,

$\sqrt{18-2} = 4$, $\sqrt{3-2} = -1$,

$\sqrt{16} = 4 \quad , \quad \sqrt{1} = -1,$

$4 = 4 \quad , \quad 1 \neq -1,$

Luego, la única solución es $\mathbf{x} = 6$.

4) $\sqrt{2\mathbf{x} - 1} = \sqrt{\mathbf{x} + 3}$

Se eleva al cuadrado ámbos lados de la igualdad:

$\left(\sqrt{2\mathbf{x} - 1}\right)^2 = \left(\sqrt{\mathbf{x} + 3}\right)^2$, luego,

$2\mathbf{x} - 1 = \mathbf{x} + 3$, de donde: $\mathbf{x} = 4$
Se verifica la posible solución $\mathbf{x} = 4$:

$\sqrt{2(4) - 1} = \sqrt{4 + 3},$

$\sqrt{7} = \sqrt{7}$

Solución $= \{4\}$

❑ EJERCICIO Nº 15

1) Encontrar el conjunto solución para de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{3\mathbf{x} - 12} - \sqrt{\mathbf{x}} = 0$

b) $5 - \sqrt{7\mathbf{x} + 3} = 0$

c) $3\mathbf{x} - 2\sqrt{\mathbf{x}} - 5 = 0$

d) $\sqrt{\mathbf{x}} = -5$

e) $\sqrt{\dfrac{1}{\mathbf{x} + 2}} = \sqrt{\mathbf{x} + 3}$

f) $(1 + 0.03)^{12} = (1 + \mathbf{i})^2$

g) $(4)^{12} = (1 - \mathbf{i})^{-4}$ con $1 - \mathbf{i} > 0$

h) $\dfrac{-3}{5+\mathbf{X}^5} = 2^{-1}$

2) En cada una de las siguientes ecuaciones despejar **w**, e imponer las condiciones necesarias:

a) $\sqrt[4]{\mathbf{w}+\mathbf{n}} = \mathbf{mb}$

b) $\sqrt{\mathbf{w}+\mathbf{s}} = \mathbf{b}$

c) $\sqrt[5]{\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{cw}-\mathbf{a}}} = \mathbf{r}$

d) $\sqrt[7]{\mathbf{w}^3 - \mathbf{a}} + \mathbf{cb} = \mathbf{b}$

e) $\sqrt{\mathbf{mw}^4} = \mathbf{n}$

f) $\sqrt{\dfrac{\mathbf{w}}{\mathbf{b}+\mathbf{m}}} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{w}}$

❑ TALLER Nº 7

1) Si **m**,**n** son reales no negativos, utilizando las propiedades de los radicales, expresar en forma simplificada:

a) $\sqrt{10\mathbf{m}^5\mathbf{n}^6}$

b) $\sqrt[3]{250\mathbf{w}^{13}}$

c) $\sqrt{\dfrac{\mathbf{m}^4+\mathbf{nm}^2}{16}}$

2) Determinar si cada una de las siguientes igualdades es correcta o no. Si es correcta indique las propiedades que fueron aplicadas, si es incorrecta demostrar mediante un contraejemplo.

a) $\sqrt{25\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2} = 5\mathbf{a}+\mathbf{b}, \quad \mathbf{a},\mathbf{b} \geq 0$

b) $\sqrt{\dfrac{\mathbf{a}^6\mathbf{b}^8}{4\mathbf{b}^3}} = \dfrac{\mathbf{a}^3\mathbf{b}^2\sqrt{\mathbf{b}}}{2}, \quad \mathbf{a},\mathbf{b} > 0$

c) Si $\mathbf{b} = \mathbf{a}^3$ y $\mathbf{c} = 2\mathbf{ba}$ entonces $\sqrt[3]{2\mathbf{abc}^2} = 2\mathbf{a}^4$

3) Utilizar la calculadora, para hallar el valor de cada expresión si es posible en caso de que no lo sea explicar por qué.

a) $\sqrt[3]{-0.4} + \sqrt[5]{-\frac{1}{2}} + 3.5\sqrt[4]{16}$

b) $\sqrt[10]{2^{1/3}} - 22^{2/3}$

c) $\sqrt[6]{-4} + \sqrt[5]{120}$

d) $\left(-\frac{6}{5}\right)^{3/2} + 0.46$

e) $\sqrt[7]{\frac{-124}{57}} \cdot \frac{\sqrt{0.28} + 2}{\sqrt[5]{-2}}$

f) $-2^{1/4} - 3^{-1/2}$

4) Resolver, si es posible, cada una de las siguientes ecuaciones y verificar la solución obtenida.

a) $\frac{3}{2} - \sqrt{\mathbf{x} - 4} = \frac{5}{2}$

b) $3\sqrt{\mathbf{x} - 2} + 2 = \mathbf{x}$

5) Despejar la variable indicada:

a) En $\mathbf{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}}$ despejar **k**.

b) En $\frac{1}{2} = \sqrt{4\mathbf{r}^2 - \mathbf{c}^2}$ despejar **c**.

Ecuaciones Polinómicas

Una ecuación polinómica de grado **n** tiene la forma general:

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, donde
a_0 , a_1 , a_2,......,$a_n \in \mathbf{R}$, y , $\mathbf{a_n \neq 0}$.

n $\in$ **N** y se le llama **grado** de la ecuación.

Una ecuación polinómica se caracteriza por tener máximo **n** soluciones reales. Estas soluciones son los valores que asume la variable (en este caso x) para que la expresión polinómica sea igual a cero. De otra manera se afirma que estas soluciones son los ceros del polinomio: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$
Para encontrar estas soluciones es necesario acudir a la división sintética y a los teoremas del factor y del residuo para agilizar el procedimiento.

División sintética

Sea $\mathbf{p(x)} = \mathbf{a_nx^n} + \mathbf{a_{n-1}x^{n-1}} + ... + \mathbf{a_2x^2} + \mathbf{a_1x} + \mathbf{a_0}$ un polinomio de una variable de grado **n** ≥ 1 y **q**(**x**) un polinomio de una variable de grado 1, es decir, **q**(**x**) = **x** + **a**.

La división de **p**(**x**) entre **q**(**x**) se puede realizar de una manera sencilla utilizando el siguiente **algoritmo** llamado **división sintética**.

1. Tomar los coeficientes del polinomio p(x) como elemento del dividendo y, – a como divisor, es decir:

$$\mathbf{a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \ ...... \ a_2 \quad a_1 \quad a_0 \ \underline{|\ -a}}$$

2. Bajar $\mathbf{a}_n$ como se índica:

$$\begin{array}{llllll} a_n & a_{n-1} & a_{n-2}\ \ldots\ldots\ a_2 & a_1 & a_0 & \underline{|\,-a} \\ \hline a_n & & & & & \end{array}$$

3. Multiplicar $\mathbf{a}_n$ por el divisor y sumar el resultado del segundo elemento del dividendo:

$$\begin{array}{llllll} a_n & a_{n-1} & a_{n-2}\ \ldots\ldots\ldots\ a_2 & a_1 & a_0 & \underline{|\,-a} \\ & a_n\,(-a) & & & & \\ \hline \multicolumn{6}{l}{a_n\ (a_{n-1} + a_n(-\,a))} \end{array}$$

4. Multiplicar, el valor obtenido por el divisor y sumar el resultado al elemento siguiente del dividendo:

$$\begin{array}{llllll} a_n & a_{n-1} & a_{n-2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ a_2 & a_1 & a_0 & \underline{|\,-a} \\ & a_n(-a) & (a_{n-1} - aa_n)(-a) & & & \\ \hline a_n & a_{n-1} - aa_n & a_{n-2} + (a_{n-1} - aa_n)(-a) & & & \end{array}$$

5. Repetir este proceso hasta que se consideren todos los elementos del dividendo, es decir, hasta $\mathbf{a}_0$.

6. Al final del proceso se obtienen **n** + 1 valores.

7. De los **n** + 1 valores, los n primeros corresponden a los coeficientes del polinomio **cociente c**(**x**) de grado **n** – 1 y el último elemento **valor constante**, es el polinomio residuo **r**(**x**).

Ejemplo 1

Utilizando división sintética, dividir:

$2\mathbf{x}^5 + 3\mathbf{x}^3 - 5\mathbf{x}^2 + 1$ entre $\mathbf{x} + 2$

$$\begin{array}{lcccccccl} \text{Coeficientes del dividendo} \leftarrow & 2 & 0 & 3 & -5 & 0 & 1 & \underline{|\,-2} & \rightarrow \text{Opuesto del divisor} \\ \cline{2-7} & 2 & & & & & & & \end{array}$$

2	0	3	–5	0	1	| –2
	(**2**)(–2)	(**–4**)(–2)	**11**(–2)	(**–27**)(–2)	**54**(–2)	
2	**–4**	**11**	**–27**	**54**	**–107**	

$$\underbrace{2 \quad -4 \quad 11 \quad -27 \quad 54}_{\downarrow} \qquad \underbrace{-107}_{\downarrow}$$

COEFICIENTES DEL COCIENTE RESIDUO

Luego, los coeficientes del polinomio **cociente** son 2, –4, 11, –27, 54 y dicho polinomio es de grado 4. Es decir, el polinomio **cociente** es:
$\mathbf{c(x) = 2x^4 - 4x^3 + 11x^2 -27x + 54}$

–107 es el polinomio **residuo**, es decir, $\mathbf{r(x) = -107.}$

Como:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}(\mathbf{x})\ \mathbf{c}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}(\mathbf{x})$$

$$2\mathbf{x}^5 + 3\mathbf{x}^3 - 5\mathbf{x}^2 + 1 = (\mathbf{x} + 2)\ (2\mathbf{x}^4 - 4\mathbf{x}^3 + 11\mathbf{x}^2 - 27\mathbf{x} + 54) - 107$$

Ejemplo 2

Utilizando **división sintética**, expresar **p**(**x**) en términos de **q**(**x**), **c**(**x**) y **r**(**x**) si:

$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^6 + 3\mathbf{x}^5 - 7\mathbf{x}^3 + 5\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} + 4$ y $q\ (\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 1/2$

–1	3	0	– 7	5	– 2	4	| +1/2
	–1/2	5/4	5/8	–51/16	29/32	–35/64	
–1	5/2	5/4	– 51/8	29/16	–35/32	221/64	

Luego $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^5 +5/2\ \mathbf{x}^4 + 5/4\ \mathbf{x}^3 - 51/8\ \mathbf{x}^2 + 29/16\ \mathbf{x} - 35/32$, y
$r(\mathbf{x}) = 221/64$

Por lo tanto:

$$-\mathbf{x}^6 +3\mathbf{x}^5 - 7\mathbf{x}^3 + 5\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} +4$$
$$= (\mathbf{x} - 1/2)\ (-\mathbf{x}^5 +5/2\ \mathbf{x}^4 + 5/4\ \mathbf{x}^3 - 51/8\ \mathbf{x}^2 + 29/16\ \mathbf{x} - 35/32) + 221/64$$

Teorema del residuo

Sea **p**(**x**) un polinomio de grado $\mathbf{n} \geq 1$ y **q** (**x**) un polinomio de grado 1 de la forma **x** + a; entonces el residuo de dividir **p**(**x**) entre **q**(**x**) es **p**(–a), o sea **r**(**x**) = **p** (–a).

Ejemplo:

Sea $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 3\mathbf{x} + 5$ y $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 3$

¿Cuál es el residuo de dividir **p**(**x**) entre **q**(**x**)?
Según el teorema, el residuo de dividir **p**(**x**) entre **q**(**x**) corresponde al valor que toma **p**(**x**) cuando **x** = –3, es decir **p**(–3). Así:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}\,(-3) &= (-3)^2 + 3(-3) + 5 \\ &= 9 - 9 + 5 \\ \mathbf{p}\,(-3) &= 5 \text{ (Comprobar mediante división sintética)} \end{aligned}$$

Teorema de factor

Sea **p**(**x**) un polinomio de grado $\mathbf{n} \geq 1$ y **q** (**x**) un polinomio de grado 1 de la forma **x** + **a**. Si **p**(–**a**) = 0 (es decir, **r**(**x**) = 0), entonces **x**+**a** es un **factor** de **p**(**x**).

Recíprocamente, si **q**(**x**) = **x** + **a** es un **factor** de **p**(**x**), entonces **r**(**x**) = 0 (es decir, **p**(–**a**) es 0).

En cualquiera de los dos casos –**a** se llama **un cero** del polinomio p(**x**).

Ejemplo:

1. ¿Es cierto que **x** + 4 es FACTOR del polinomio $\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4$?

De acuerdo con el teorema del factor, si **p**(–4) = 0, entonces **x** + 4 es **un factor** de **p**(**x**):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(-4) &= (-4)^2 + 5(-4) + 4 \\ &= 16 - 20 + 4 \\ \mathbf{p}(-4) &= 0 \end{aligned}$$

Luego $\mathbf{x} + 4$ sí es **factor** de $\mathbf{p}(\mathbf{x})$.

Observe que el polinomio $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4 = (\mathbf{x} + 4)\ (\mathbf{x} + 1)$ (por factorización).
Luego $\mathbf{x} + 4$ es un polinomio de grado 1 que es **un factor** de $p(\mathbf{x})$.
De igual manera $\mathbf{x} + 1$ es un **factor** de $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ (de grado 1).
También podemos afirmar que -4 y -1 son **ceros** de $p(\mathbf{x})$.

Ceros racionales de un polinomio

Sea $p(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_n\mathbf{x}^n + a_{n-1}\ \mathbf{x}^{n-1} + \ldots + a_2\ \mathbf{x}^2 + a_1\mathbf{x} + a_0$. Si $p(\mathbf{x})$ tiene **ceros racionales**, es decir, ceros de la forma **m/n**, entonces **m** es un **divisor** de $\mathbf{a}_0$ y n es un **divisor** de $\mathbf{a}_n$, donde $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_n, \mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbf{z}$.

☛ **Recuerde que:**

Calcular los ceros del polinomio
$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + \ldots + a_2\ x^2 + a_1x + a_0$

equivale a solucionar la ecuación de grado n:
$a_nx^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + \ldots + a_2\ x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Ejemplo:

Hallar los ceros racionales del polinomio $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^3 + 7\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 1$

Sus posibles ceros racionales son ± 1, ± 1/2

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & 7 & 5 & 1 & \underline{1\ } \\ & 2 & 9 & 14 & \\ \hline 2 & 9 & 14 & 15 & \end{array}$$

$R(x) \neq 0$, luego 1 **no** es **cero** de $p(\mathbf{x})$

$$\begin{array}{cccc l}
2 & 7 & 5 & 1 & \underline{\text{I }-1} \\
 & -2 & -5 & 0 & \\
\hline
2 & 5 & 0 & 1 & R(x) \neq 0\text{, luego }-1\textbf{ no}\text{ es }\textbf{cero}\text{ de p(}\mathbf{x}\text{)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc l}
2 & 7 & 5 & 1 & \underline{\text{I } 1/2} \\
 & 1 & 4 & 9/2 & \\
\hline
2 & 8 & 9 & 11/2 & R(x) \neq 0\text{, luego }1/2\textbf{ no}\text{ es }\textbf{cero}\text{ de p(}\mathbf{x}\text{)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc l}
2 & 7 & 5 & 1 & \underline{\text{I }-1/2} \\
 & -1 & -3 & -1 & \\
\hline
2 & 6 & 2 & 0, & R(x) = 0\text{, luego }-1/2\textbf{ si}\text{ es }\textbf{cero}\text{ de p(}\mathbf{x}\text{)}
\end{array}$$

Así: $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x} + 1/2)\ (\mathbf{x}^2 + 3\mathbf{x} + 1)$

Veamos si $\mathbf{x}^2 + 3\mathbf{x} + 1$ tiene **ceros irracionales** utilizando el resultado anterior. Si los tiene, también son ceros irracionales de **p**(**x**) y deben ser de la forma:

$$\mathbf{x} = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}\text{. Esto es:}$$

$$\mathbf{x} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$\mathbf{x} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\text{, que }\textbf{sí}\text{ son }\textbf{ceros reales}\text{ de p(}\mathbf{x}\text{).}$$

Entonces **p**(**x**) se puede e**x**presar de la siguiente manera:

$$2\mathbf{x}^3 + 7\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 1 = 2\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\right)\left(\mathbf{x} - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(\mathbf{x} + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

❑ EJERCICIO Nº 16

1) Utilizar «división sintética» para **expresar** p(**x**) en términos de q(**x**), c(**x**) y r(**x**) siendo:

a) $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^3 - 3\mathbf{x}^2 + 4$; $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 2$

b) $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = -7\mathbf{x}^5 + 8\mathbf{x}^3 - 2\mathbf{x} + 5$; $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 1/2$

c) $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^4 - 3\mathbf{x}^5 + \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^2 + 1/4$; $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} + 2$

d) $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^6 - 3$; $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 2/3$

e) $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 3/4\ \mathbf{x}^4 - 5\mathbf{x}^2 + 8$; $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = 1 - \mathbf{x}$

f) $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^2 + 3$; $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$

2) **Encontrar** si es posible, los ceros racionales e irracionales de los siguientes polinomios:

a) $\mathbf{x}^3 + 2\mathbf{x} - \mathbf{x}^2 - 2$

b) $3\mathbf{x}^3 - 9\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} + 3$

c) $6\mathbf{x}^4 + \mathbf{x}^3 - 19\mathbf{x}^2 - 3\mathbf{x} + 3$

d) $4\mathbf{x}^5 - 8\mathbf{x}^3 - 8\mathbf{x}^2 + 16$

e) $6\mathbf{x}^4 + 55\mathbf{x}^3 + 128\mathbf{x}^2 + 11\mathbf{x} - 20$

f) $\mathbf{x}^5 + \mathbf{x}^4 + \mathbf{x}^3 + 8\mathbf{x}^2 + 8\mathbf{x} + 8$

g) $2\mathbf{x} + 1$

h) 5

i) $2\mathbf{x}^5 - 3\mathbf{x}^3 + 2\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} + 1$

j) $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9$

3) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\mathbf{b}^2 + b = 1$ b) $4\mathbf{m}^3 = \mathbf{m}^2 + 3$
c) $3\mathbf{y}^2 = -\mathbf{y}^4 + 10$ d) $\mathbf{n}^2(4\mathbf{n} - 1) = 3$
e) $\mathbf{x}^3 - 2\mathbf{x}^2 - 5\mathbf{x} + 6 = 0$ f) $2\mathbf{x}^3 - 3\mathbf{x}^2 - 6\mathbf{x} = -9$

❑ TALLER Nº 8

1) Resolver en los racionales, si es posible, cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $\mathbf{x}^3 + 2\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} + 1 = 0$
b) $\mathbf{x}^4 + 5\mathbf{x}^3 + 5\mathbf{x}^2 = 5\mathbf{x} + 6$
c) $\mathbf{x}^4 - 10\mathbf{x}^2 + 9 = 0$
d) $6\mathbf{x}^4 + 7\mathbf{x}^3 - 34\mathbf{x}^2 + 3\mathbf{x} + 18 = 0$

2) Encontrar los ceros del siguiente polinomio:

$$\mathbf{P}(\mathbf{m}) = (\mathbf{m}^3 + 3\mathbf{m}^2 - \mathbf{m} - 3)\cdot(\mathbf{m} + 2)$$

3) Demostrar que $\mathbf{x} - 5$ es un factor del polinomio $5\mathbf{x}^5 - 19\mathbf{x}^4 - 37\mathbf{x}^3 + 37\mathbf{x}^2 - 15\mathbf{x} + 25$, y encontrar el otro factor.

4) Resolver en los racionales, si es posible, cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $3\mathbf{x}^2 = -\mathbf{x}^4 + 10$ b) $\mathbf{x}(4\mathbf{a} - 1) = 3$

5) Sea $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^4 - 5\mathbf{x}^2 + 4$ y $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 2$

a) ¿Es $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ factor de $\mathbf{P}(\mathbf{x})$?

b) Encontrar los ceros racionales de $\mathbf{P}(\mathbf{x})$

6) Si una solución de la ecuación $\mathbf{x}^4 + \mathbf{x}^3 - 7\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} + 6 = 0$ es $\mathbf{x} = -3$, encontrar las demás soluciones.

Logaritmos y Exponenciales

y = $\log_b$ **x** significa que **b^y** = **x**, si **x**, **b** **son reales positivos y además** $b \neq$ **1**

❑ **Ejercicio Nº 17**

1) Determinar las condiciones sobre la variable para que cada una de las siguientes expresiones sea real.

a) $\log (\mathbf{m} - 3)$

b) $\log_2 (5\mathbf{k} + 7)$

c) $\log \dfrac{-\mathbf{n} + 3}{2}$

d) $\ln \mathbf{x}(\mathbf{x}+1)$

e) $\log_{2\mathbf{x}} 7$

f) $\log (\mathbf{x}^2 - 3)$

g) $\log (\mathbf{x}^3 + 4\mathbf{x})$

2) Expresar en forma exponencial los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 8 = 3$

b) $\log_{25} 5 = \dfrac{1}{2}$

c) $\log_2 \dfrac{1}{4} = -2$

d) $\log_3 \dfrac{1}{3} = -1$

e) $\log_{3\mathbf{x}+1} 10 = -1$

f) $\log \dfrac{\mathbf{m} + 3}{5} = 0$

g) $\ln \mathbf{x}^3 = 2$

3) En cada caso expresar en forma logarítmica.

a) $12 = \sqrt{144}$

b) $\dfrac{1}{16} = 4^{-2}$

c) $5{,}7 = 2^{w+3}$

d) $e^{2m-1} = \dfrac{1}{5}$

4) Encontrar el valor de la incógnita en cada caso.

a) $\log_3 \mathbf{w} = -2$ b) $\log_b 1000 = 3$

c) $\mathbf{q} = \log_9 27$ d) $\log\ \mathbf{w} = -3$

e) $\log_3 \dfrac{\mathbf{w}}{\mathbf{w}-6} = -1$ f) $\log_{3\mathbf{x}+2} 4 = 2$

g) $\log_5 5 = \mathbf{q}$ h) $\ln \dfrac{4\mathbf{m}}{1-\mathbf{m}} = 1$

En particular: Si la base de un logaritmo es 10, entonces se escribe **log**, con lo que se tiene que:

log x = y significa que: $10^y = \mathbf{x}$
log x se lee**:** logaritmo decimal de **x**

Además si la base del logaritmo es **e**, se escribe **ln**, con lo que se tiene que:

ln x = y significa que $\mathbf{e}^y = \mathbf{x}$
lnx se lee: logaritmo natural de **x**.

Propiedades de los logaritmos

Si **b**, **M** y **N** son números reales positivos, $\mathbf{b} \neq 1$ y $\mathbf{p} \in \mathbf{R}$, entonces:

1. $\log_b \mathbf{MN} = \log_b \mathbf{M} + \log_b \mathbf{N}$
2. $\log_b \dfrac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}} = \log_b \mathbf{M} - \log_b \mathbf{N}$
3. $\log_b \mathbf{M}^p = p \log_b \mathbf{M}$
4. $\log_b 1 = 0$
5. $\log_b \mathbf{b} = 1$
6. $\log_b \mathbf{M} = \dfrac{\log_c \mathbf{M}}{\log_c \mathbf{b}}$, **EN PARTICULAR**: $\log_b \mathbf{M} = \dfrac{\log \mathbf{M}}{\log \mathbf{b}} = \dfrac{\ln \mathbf{M}}{\ln \mathbf{b}}$

❑ Ejercicio Nº 18

1) Escribir cada expresión como un único logaritmo

a) $2\log_2 \mathbf{X} - \log_2 \mathbf{Y}$
b) $3\log_b \mathbf{X} + 2\log_b \mathbf{Y} - 4\log_b \mathbf{Z}$
c) $\frac{1}{5}(2\log_b \mathbf{X} + 3\log_b \mathbf{Y})$
d) $\frac{1}{3}\log_b \mathbf{W} - 3\log_b \mathbf{X} - 5\log_b \mathbf{Y}$

2) Expresar en forma exponencial, sin logaritmos

a) $\log_b \mathbf{Y} - \log_b \mathbf{C} + \mathbf{kt} = 0$
b) $\ln \mathbf{X} - \ln 100 = -0.08t$
c) $2\log \mathbf{M} + \log 3\mathbf{Y} = -1$

3) Utilizar la calculadora para encontrar los siguientes logaritmos

a) log 33,800
b) ln 33,800
c) log 1
d) $\log_{0.5} 4$
e) $\log_5 480$
f) log 0.00001
g) log 8000
h) $\log_{\frac{1}{4}} 2.78$

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Ejemplo 1

Resolver la ecuación: $\log(\mathbf{x} + 3) + \log \mathbf{x} = 1$

Solución:

Las condiciones para que $\log(\mathbf{x}+ 3)$, y, $\log \mathbf{x}$ estén definidos son:

$\mathbf{x} + 3 > 0$ y $\mathbf{x} > 0$, es decir, $\mathbf{x} > -3$ y $\mathbf{x} > 0$.

Esto significa que $\mathbf{x} \in (\mathbf{0}, \rightarrow)$

$\log(\mathbf{x}+3)+\log \mathbf{x}=1$ Aplicando la propiedad suma de logarítmos, se tiene:

$\log(\mathbf{x}+3)\mathbf{x}=1$ Utilizando la definición de logarítmo:

$10^{1}=(\mathbf{x}+3)\mathbf{x}$ Por la propiedad distributiva:

$10=\mathbf{x}^2+3\mathbf{x}$ Sumando – 10:

$0=\mathbf{x}^2+3\mathbf{x}-10$ Factorizando:

$0=(\mathbf{x}+5)(\mathbf{x}-2)$

$\mathbf{x}=-5$ o $\mathbf{x}=2$ ¿Por qué ?

Como $-5 \notin (0, \rightarrow)$ y $2 \in (0, \rightarrow)$,

la solución de la ecuación es: $\mathbf{x}=2$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $2^{3x-2}=5$

Solución:

$2^{3x-2}=5$ Por definición, esta forma exponencial es equivalente a:
$3\mathbf{x}-2=\log_2 5$

$3x=\log_2 5+2$

$$\mathbf{x}=\frac{1}{3}\left(\frac{\log 5}{\log 2}+2\right)$$

$\mathbf{x}\approx 1.4406$

❑ EJERCICIO Nº 19

1) Resolver para **x** las siguientes ecuaciones en **R,** si es posible.

a) $\log \mathbf{x} - \log(2\mathbf{x} + 1) = 0$
b) $\log_{(\mathbf{x}-2)} 4 = 2$
c) $\log(\mathbf{x} - 9) + \log 100\mathbf{x} = 3$
d) $\log 5 + \log \mathbf{x} = 2$
e) $\log \mathbf{x} = 1 - \log(\mathbf{x} - 3)$
f) $5^{3\mathbf{x}} = \frac{3}{4}$
g) $4000 = 2000 + e^{0.3\mathbf{x}}$
h) $\frac{10}{3} = 4 - \mathbf{e}^{0.2\mathbf{x}}$
i) $2 \cdot 7^{\mathbf{x}+2} = 3^{\mathbf{x}}$
j) $\log \mathbf{x}^{2} = 4$
k) $(5 + \mathbf{m})^{\mathbf{x}} = 0.7$
l) $6^{2\mathbf{x}} - 18 = 1.2$
m) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3\mathbf{x}} = \frac{2}{5}$
n) $3^{\mathbf{x}+3} = 2 \cdot 9^{\mathbf{x}}$
o) $2\log_{3}(5\mathbf{x} + 7) = \frac{5}{7}$
p) $\ln(9\mathbf{x} - 1) - \ln(6\mathbf{x} + 3) = 0$

2) Si se invierte un capital **P** a un interés compuesto **i** anual, el capital **C** que se tiene después de **n** años está dado por la fórmula: $\mathbf{C = P(1 + i)^{n}}$, (i es el porcentaje expresado en forma de porción).

a) Si se invierte una suma de \$200000 a un interés compuesto anual del 20%, calcular el valor de la inversión después de 4 años.

b) Si se invierte \$500000 a un interés compuesto anual del 22%, ¿cuántos años deben transcurrir para tener en saldo \$1002834?

- c) ¿Cuántos años deben transcurrir para que el capital inicial (del ejercicio a) se duplique? ¿Se incremente en un 40% ?

3) En una determinada región en 1970 el número de habitantes fué de 500000 y de ahí en adelante su población se rigió por la fórmula: $\mathbf{P} = 500000\mathbf{e}^{-0.02t}$, donde **P** es la población después de **t** años.

   Contestar las siguientes preguntas y **justificar la respuesta.**

   - a) ¿Después de un año la población disminuye o aumenta?
   - b) ¿Cuál es la población después de 5 años?
   - c) Qué tiempo debe transcurrir para que la población sea una tercera parte de la población inicial?
   - d) ¿En qué año se extinguirá esta región?

4) Las ventas mensuales **V** (en millones de pesos) estan relacionadas con la inversión mensual **r** (en millones de pesos) en publicidad, por la fórmula: $\mathbf{V} = 400 - 370e^{-0.125\,r}$

   En cada uno de los siguientes casos **justificar** la respuesta

   - a) ¿Cuál debe ser la inversión mensual para obtener por ventas 100 millones de pesos?,¿3 millones de pesos?

   - b) ¿Qué ocurre si no se invierte dinero en publicidad?

❏ TALLER Nº 9

PRERREQUISITOS:

Tener claro el concepto de cero de un polinomio
Tener claridad en el procedimiento para resolver una ecuación de grado **n**
Identificar las condiciones de un radical.
Tener clara la definición de logaritmo.
Identificar las propiedades de los logaritmos.

1) Determinar la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes afirmaciones y **justificar** la respuesta.

Si: $\log_b \mathbf{M} = \frac{3}{2}$, y, $\log_b \mathbf{N} = 4$

a) $\log_b \mathbf{M} - \log_b \mathbf{N} = \frac{3}{8}$ b) $\frac{\log_b \mathbf{M}}{\log_b \mathbf{N}} = \log_b \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$

c) $\log_b(\mathbf{MN}) = 6$ d) $\log_b (\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \log_b \mathbf{M} + \log_b \mathbf{N} = \frac{11}{2}$

e) $\log_b \mathbf{M}^2 = \frac{9}{4}$ f) $\log_b^2 \mathbf{M} = \frac{9}{4}$

2) Imponiendo las condiciones necesarias, despejar b en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\log_b \frac{\mathbf{A} + \mathbf{M}}{\mathbf{C} - \mathbf{A}} = \text{R}$ b) $\log_{(b+c)}(\text{A}\mathbf{M}) = 3$

3) En cada una de las ecuaciones anteriores despeje **A**.

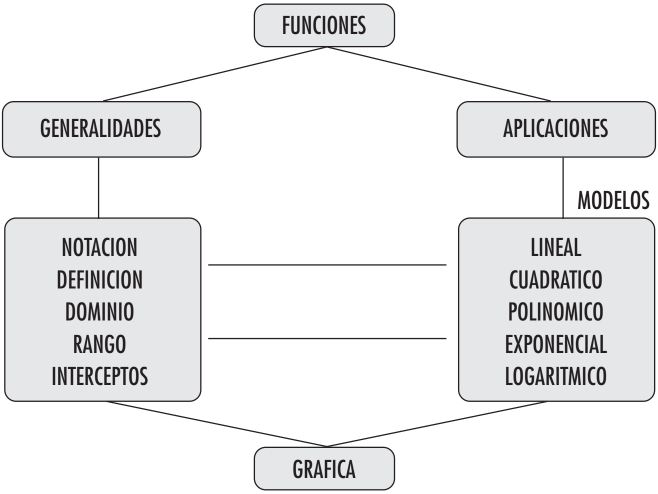
4) Imponiendo las condiciones necesarias, resolver las siguientes ecuaciones para **K**

a) $500 = 100 + 3e^{0.3K}$ b) $(\mathbf{P} + \mathbf{M})^{0.1K} = \text{R}$

c) $\log_{\mathbf{K}+1} 4 = 2$ d) $\log_5(\mathbf{K} - 2) - \log_5(\mathbf{k} + 1) = 0$

5) Si se invierte un capital **A**, a un interés compuesto anual **i**, el capital **S** que se tiene después de **n** años está dado por la fórmula $\mathbf{S = A(1 + i)^n}$. Teniendo en cuenta esta información, plantear y resolver el siguiente problema: al momento de nacer su hijo, el Sr. Rey invierte $ 200000 a un interés compuesto anual del 15%, con el propósito de entregarle a su hijo en un futuro 1 500000. ¿A qué edad recibe el hijo del Sr. Rey este dinero?

Funciones



Generalidades

DEFINICION: Sean **A** y **B** conjuntos no vacíos. Una función **f** de **A** en **B** es una relación mediante la cual se asigna a cada elemento del conjunto **A** un único elemento del conjunto **B**.

NOTACION: $f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$

$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ con $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ y $\mathbf{y} \in \mathbf{B}$

$f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ Corresponde al nombre de la función y los conjuntos sobre los cuales se define la función.

$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ Corresponde a la regla de asignación << se lee «efe» de **x** igual a **y**>>.

A **x** también se le llama variable independiente y a **y** se le llama variable dependiente.

Si **x**=**a**, y, f(**a**)=**b** se dice que **b** es la imagen de **a** a través de la función f.

Al conjunto **A** se le llama **dominio** de la función **f** y al conjunto **B** se le llama **codominio** de la función.

Ejemplo 1

Notar formalmente cada una de las siguientes funciones:

1) La función **h** definida de **N** – $\{0\}$ en **R** tal que a cada natural diferente de cero se le asigna su recíproco

Notación: $\mathbf{h}: \mathbf{N}- \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\mathbf{h}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\mathbf{n}}$$

b) La función **g** definida de **Z** en **R** tal que a cada entero **z** se le asigna el entero **z** aumentando en $\frac{1}{5}$

Notación: $\mathbf{g}: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} + \frac{1}{5}$$

Ejemplo 2

Hallar la imagen de **a** + 2, **a** ∈ **N** a través de las funciones **h** y **g** definidas en el anterior ejemplo

Solución A

Como $\mathbf{a} + 2 \in \mathrm{N} - \{0\}$ entonces se le puede aplicar la regla de asignación correspondiente a la función **h** (ver anterior ejemplo).

$\mathbf{h}(\mathbf{a} + 2) = \frac{1}{\mathbf{a}+2}$ Así, la imagen de **a** + 2 a través de **h** es $\frac{1}{\mathbf{a}+2}$

Solución B

Como $(\mathbf{a} + 2) \in \mathrm{Z}$ entonces también se le puede aplicar la regla de asignación correspondiente a la función **g**, es decir:

$\mathbf{g}(\mathbf{a} + 2) = (\mathbf{a} + 2) + \frac{1}{5}$ y reduciendo, se tiene que:

$\mathbf{g}\,(\mathbf{a} + 2) = \mathbf{a} + \frac{11}{5};$

luego se puede afirmar, que $\mathbf{a} + \frac{11}{5}$ es la imagen de $\mathbf{a} + 2$ a través de **g**.

Funciones reales

Definición: Una función real es una función definida de **R** en **R** y, tanto el **dominio** como el **codominio** son subconjuntos de los números reales

Cuando se trabaja con funciones reales, sólo es necesario definir la regla de asignación.

Es decir, se escribe: $\mathbf{f}\,(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ en vez de $\begin{cases} \mathbf{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \end{cases}$

Donde **x** es la variable independiente y la variable dependiente es **y**

Dominio de una función real

DEFINICION:

El dominio de una función real **f** (notado $\mathbf{D_f}$) es el conjunto todos los valores reales que tienen la imagen definida a través de la función dada.

Para determinar el dominio de una función real sería bueno preguntar: ¿Qué valor o valores reales puede asumir la variable independiente de tal forma que su imagen (o valor dependiente) siempre sea un número real?

Rango de una función real: El rango de una función **f**, notado **Rf**, es el conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio.

Ejemplo:

Para la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}}$, la pregunta sería: ¿Qué elementos reales tienen recíproco?

Como se sabe, el único real que no tiene recíproco es cero. Es decir la imagen de cero a través de **f** no está definida. Por lo tanto, el dominio de **f** es :

$$Df = \mathbf{R} - \{0\}$$

❑ Ejercicio Nº 20

1) Determinar el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 3$

b) $\mathbf{f}(\mathbf{m}) = \frac{1}{\mathbf{m}^2 + 5\mathbf{m} + 6}$

c) $\mathbf{f}(\mathbf{m}) = \frac{1}{\mathbf{m}^2 + 4}$

d) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{2\mathbf{x} + 1}$

e) $\mathbf{f}(\mathbf{m}) = \frac{1}{\mathbf{m}^2 - 5}$

f) $\mathbf{f}(\mathbf{w}) = \frac{1}{\mathbf{w}} + \sqrt{\mathbf{w} - 1}$

g) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \log(\mathbf{x}^2 - 16)$

h) $\mathbf{f}(\mathbf{m}) = \sqrt{-\mathbf{m}}$

i) $\mathbf{f}(\mathbf{w}) = \sqrt[3]{\mathbf{w} + 7}$

j) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{e}^{\mathbf{x}} - 2\mathbf{e}^{\mathbf{x}}}$

k) $\mathbf{f}(\mathbf{m}) = \sqrt{\frac{2^{\mathbf{m}}}{3 - 5\mathbf{m}}}$

l) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt[4]{3\mathbf{x}^3 + \mathbf{x}^2 - 6\mathbf{x} - 2}$

m) $\mathbf{f}(\mathbf{k}) = \sqrt{-5(\mathbf{k}^2 - 4)}$

n) $\mathbf{f}(\mathbf{w}) = \ln(-3\mathbf{w}^3)$

o) $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \sqrt{2\mathbf{z}^3 + \mathbf{z}^2 - 25\mathbf{z} + 12}$

2) Sea $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = -\mathbf{y}^2$ y $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{1 - \mathbf{x}}$

a) Determinar el dominio de **g**, y de **f**.

b) ¿Existe la imagen de 4 a través de **g**?¿a través de **f** ?

c) Calcular:

c.1) **f** (**a** + **b**), **g** (**a** + **b**)
c.2) **f** (–2) + **f** (–3)
c.3) **f** (**x** + **h**)
c.4) **g** (**y** + **h**)
c.5) **g** (0), **f** (0)
c.6) **g** (5 + **x**) – 3**g** (**x**)
c.7) $\mathbf{f}\left(-\frac{1}{4}\right) - \mathbf{f}(-2)$

3) Para las dos funciones **f**, **g** definidas anteriormente, ¿qué valores debe asumir la variable independiente de tal forma que:

a) La imagen sea 0.

b) La imagen sea 6.

Gráfica de una función

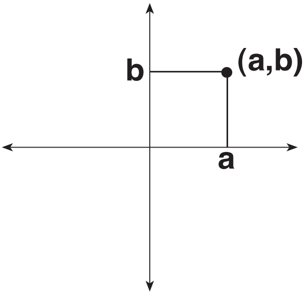
Sea **f** una función de **A** en **B**, cada elemento de la función **f** se puede expresar como una pareja ordenada, de la forma (**a**, **b**), o (**a**, **f**(**a**)), con $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ y $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$.

Así como existe una correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta numérica, de la misma manera se puede establecer una correspondencia entre una pareja ordenada (**a**, **b**); **a**, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}$, y los puntos del **plano cartesiano**, determinado por dos rectas reales **(ejes**) perpendiculares (generalmente una horizontal y otra vertical).

Dada una pareja ordenada (**a**, **b**) es posible identificar el punto del plano que la representa. Para ello, sobre la recta horizontal se sitúa el real «**a**» y sobre la vertical el valor «**b**» y por dichos puntos se trazan rectas perpendiculares a los ejes, respectivamente, y el punto de intersección de éstas es el punto del plano que representa la pareja ordenada (**a**, **b**).

Utilizando el procedimiento inverso, dado un punto en el plano se identifica la pareja ordenada que lo representa.

De ésta manera: Cada pareja ordenada está representada por un único punto en el plano y cada punto del plano representa una pareja ordenada. Los elementos de la pareja son las **coordenadas** del punto, en donde la **primera** componente de la pareja es llamada **abscisa** (representada en el eje horizontal) y la **segunda** componente, **ordenada** (representada en el eje vertical).



DEFINICION

Sea **f** una función real. La **gráfica** de **f** es la representación en el plano cartesiano de todas las parejas ordenadas.

$(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ o $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ con $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_f$.

Convencionalmente se ubica la variable independiente en el eje horizontal y la variable dependiente en el eje vertical.

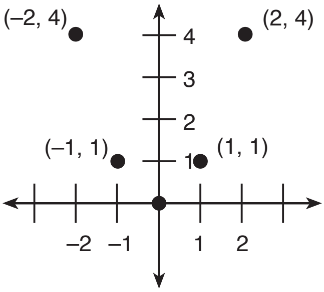
Ejemplo:

1) Sea $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 4\}$
   $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$

Según la regla que define esta función se tiene las siguientes parejas ordenadas:

(–2, 4), (–1, 1), (0 , 0), (1, 1), (2, 4).

La representación en el plano cartesiano de dichas parejas conforman la **gráfica** de **f**, así:



2) Sea **f**: [–2 ; 2] → **R** definida por **f** (**x**) = $\mathbf{x}^2$

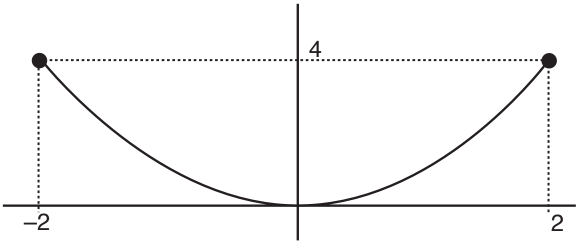
Como el dominio de **f** es un conjunto infinito de números reales, para determinar el comportamiento de su gráfica se suele seleccionar algunos valores del dominio para encontrar sus imágenes y así, con estas parejas ordenadas, identificar algunos puntos de la gráfica.

Lo anterior es:

Para:

x = 0: f (0) = 0, correspondiente a la pareja ordenada (0, 0)
x = –2: f (–2) = 4 , correspondiente a la pareja ordenada (–2, 4)
x = –1: f (–1) = 1, correspondiente a la pareja ordenada (–1 , 1)
x =1: f (1) = 1, correspondiente a la pareja ordenada(1, 1)
x = 2 : f (2) = 4, correspondiente a la pareja ordenada (2, 4)
x =$\sqrt{2}$: f $\left(\sqrt{2}\right)$= 2, correspondiente a la pareja ordenada $\left(\sqrt{2},2\right)$
x=$-\frac{3}{2}$: **f**$\left(-\frac{3}{2}\right)$ = $\frac{9}{4}$, correspondiente a la pareja ordenada$\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$

Así, al encontrar la imagen de cada elemento del dominio de **f**, la gráfica de la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$ es:



3) Trazar la gráfica de $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{\mathbf{x}}$

El dominio de **g** es $(-\infty\ ; 0\ ) \cup (\ 0; \infty)$

Para determinar el comportamiento de la gráfica de g, consideramos:

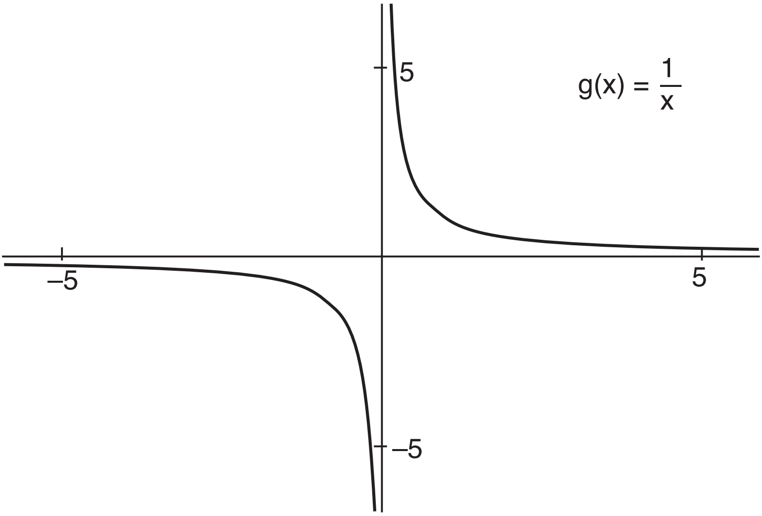
a) En el intervalo $(-\infty\ ; 0)$:

Elemento del dominio de **g**	Imagen a través de **g**	Pareja ordenada
$\mathbf{x} = -10$	$\mathbf{g}(-10) = -\dfrac{1}{10}$	$\left(-10, -\dfrac{1}{10}\right)$
$\mathbf{x} = -8$	$\mathbf{g}(-8) = -\dfrac{1}{8}$	$\left(-8, -\dfrac{1}{8}\right)$
$\mathbf{x} = \dfrac{-31}{4}$	$\mathbf{g}\left(-\dfrac{31}{4}\right) = -\dfrac{4}{31}$	$\left(-\dfrac{31}{4}, -\dfrac{4}{31}\right)$
$\mathbf{x} = \dfrac{-5}{2}$	$\mathbf{g}\left(-\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{2}{5}$	$\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{2}{5}\right)$
$\mathbf{x} = \dfrac{-3}{2}$	$\mathbf{g}\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{2}{3}$	$\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{2}{3}\right)$
$\mathbf{x} = -1$	$\mathbf{g}(-1) = -1$	$(-1, -1)$
$\mathbf{x} = \dfrac{-1}{2}$	$\mathbf{g}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2$	$\left(-\dfrac{1}{2}, -2\right)$

b) En el intervalo (0; ∞) :

$\mathbf{x} = \frac{1}{16}$	$g\left(\frac{1}{16}\right) = 16$	$\left(\frac{1}{16}, 16\right)$
$\mathbf{x} = \frac{1}{8}$	$g\left(\frac{1}{8}\right) = 8$	$\left(\frac{1}{8}, 8\right)$
$\mathbf{x} = \frac{2}{3}$	$g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}$	$\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$
$\mathbf{x} = 1$	$g(1) = 1$	$(1, 1)$
$\mathbf{x} = 5$	$g(5) = \frac{1}{5}$	$\left(5, \frac{1}{5}\right)$
$\mathbf{x} = \frac{15}{2}$	$g\left(\frac{15}{2}\right) = \frac{2}{15}$	$\left(\frac{15}{2}, \frac{2}{15}\right)$

Así, la gráfica de la función $g(x) = \frac{1}{\mathbf{x}}$, es:



Como $\mathbf{g}(x) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_g$, $\mathbf{R}_g = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Ceros de una función

Sea **f** una función con dominio $\mathbf{D}_f$.
Si $a \in D_f$, a es un cero de **f** si $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = 0$

Es decir:
Ceros de $\mathbf{f} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_f \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0\}$

Intersección con el eje «y»

Sea **f** una función.
Si $0 \in \mathbf{D}_f$, $\mathbf{f}(0)$ se denomina **intersección** con el eje **y**.

En general, al considerar los ceros de una función y la intersección de su gráfica con el eje Y se habla de los **interceptos** con los ejes coordenados.

Ejemplos

1) $\mathbf{f} : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 4\}$
   $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$
   Los ceros de **f** se reducen únicamente al **valor cero**, pues $0 \in \mathbf{D}_f$ y $\mathbf{f}(0) = 0$.

Además en este caso $\mathbf{f}(0) = 0$ representa también la intersección de la gráfica de **f** con el eje **y**.

2) $\mathbf{f}: [-2 ; 2] \rightarrow \mathbf{R}$
   $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$

El único cero de esta función es 0 pues $0 \in \mathbf{D}_f$ y $\mathbf{f}(0) = 0$, siendo a su vez este valor la intersección con el eje **y.**

3) Para la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x}^2 - 4}{\mathbf{x} + 2}$, $\mathbf{D}_f = \mathbf{R} - \{-2\}$
   2 es el único **cero** de la función porque $2 \in \mathbf{D}_f$ y $\mathbf{f}(2) = 0$
   Como $0 \in D_f$, la gráfica de f intersecta al eje y en $f(0) = -2$.
   Así –2 es la intersección de la gráfica de f con el eje **y**.

4) La función $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}}$ **no** tiene ceros pues para **todo x**, elemento de su dominio, $\mathbf{g}\ (\mathbf{x}) \neq 0$.

Tampoco ocurre que la gráfica de **g** intersecte al eje **y**. Pués $0 \notin \mathbf{D}_g$.

Por lo tanto esta función **no tiene** interceptos.

❑ EJERCICIO Nº 21

1) Hallar **dominio**, **ceros e intercepto** con el eje **Y**. Trazar un bosquejo de la gráfica, determinar el rango (si es posible) e indicar las asíntotas si existen en cada una de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{-5\mathbf{x}+2}$

b) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^2 - 9}$

c) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}+2}$

d) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2$

e) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^3 - 2\mathbf{x}^2 - 7\mathbf{x} + 14$

f) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \log_2(\mathbf{x} + 3)$

g) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \log\ (7\mathbf{x} + 2)$

h) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 2^{\mathbf{x}+1}$

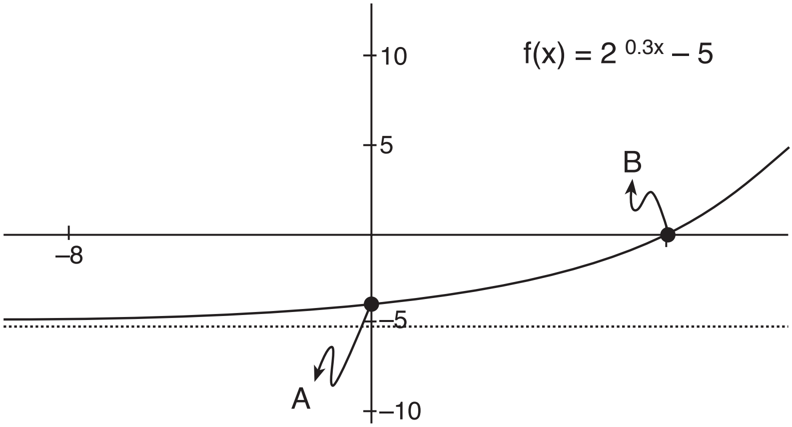
i) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\ 5\mathbf{x} + 2$

j) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 1$

k) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\mathbf{x}+3}$

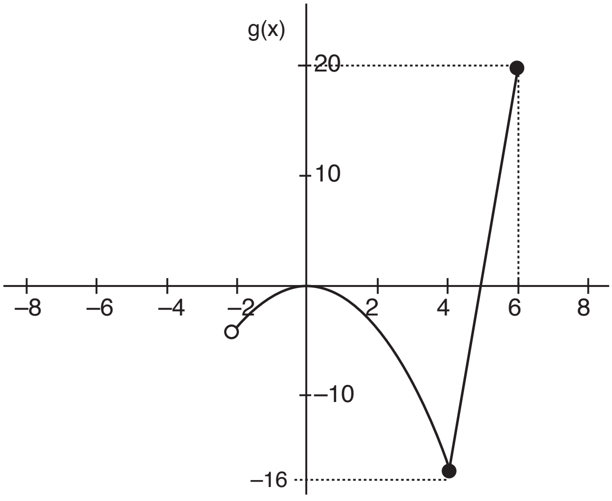
l) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^3$

2) Dada la gráfica:



a) Hallar las coordenadas de los puntos **A** y **B**.
b) Determinar el dominio y el rango de la función.

3) Dada la gráfica:



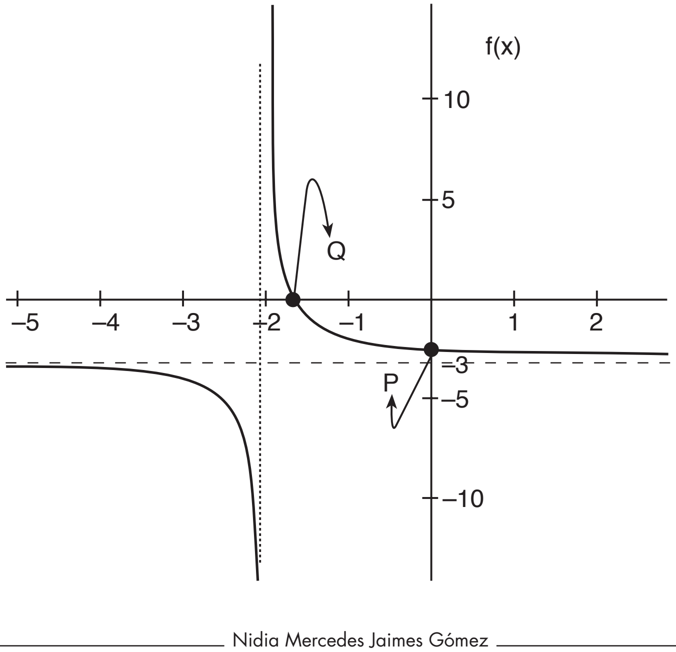
a) ¿Es **g** una función?¿por qué?
b) Determinar el dominio de **g**.
c) Determinar el rango de **g**.
d) Determinar los ceros de **g**.
e) ¿Existen asíntotas?(indíquelas en la gráfica).
f) ¿Cuál es la imagen de 4 a través de **g**?

4) Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{-\mathbf{x}+3}{\sqrt{2-\mathbf{x}}}$ función de valor real.

Determinar la validez de las siguientes afirmaciones y justificar la respuesta:

a) El dominio de **f** es el intervalo (2, 3)
b) 2 es la imagen de 1 a través de **f**.
c) La gráfica de la función **f** no intercepta al eje **x**.

5) Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{-3\mathbf{x}-5}{\mathbf{x}+2}$ la función de valor real abajo graficada. Determinar:



a) Dominio.
b) Rango.
c) Coordenadas de los puntos **P** y **Q**.
d) **f**(–5)
e) El valor del dominio cuya imagen es 10.

6) Sean: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3 - \mathbf{x}^2$, $\mathbf{g}(\mathbf{m}) = \sqrt{-\mathbf{m} + 2}$ y $\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \dfrac{1}{5\mathbf{z} - 2}$

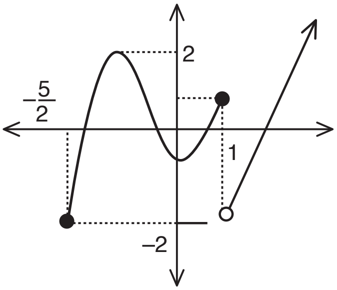
HALLAR:

$\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\mathbf{h}(4 + \mathbf{m})$, $\mathbf{g}(-1/5)$, $\mathbf{h}(0) - 2\mathbf{f}(0)$

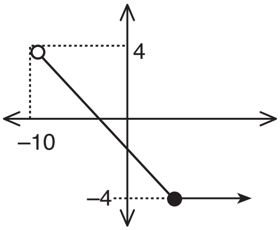
7) Para cada una de las anteriores funciones, **determinar**: dominio, rango, ceros, intercepto con el eje **y**; **trazar** un bosquejo de la gráfica e indicar las asíntotas si existen.

8) Determinar el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones

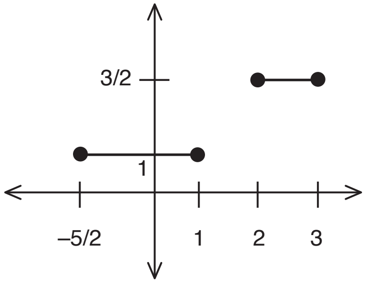
a)



b)



c)



9) En cada uno de los siguientes casos, graficar una función **f** tal que:

a) $\mathbf{D}_f = (\leftarrow, -3) \cup [5, \rightarrow)$ y $\mathbf{R}_f = [-5, \rightarrow)$

b) $\mathbf{D}_f = [-20, 1/2)$ y $\mathbf{R}_f = \mathbf{R}$

c) $\mathbf{D}_f = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, \rightarrow)$ y $\mathbf{R}_f = \{-1, 4\}$

Algunas funciones especiales

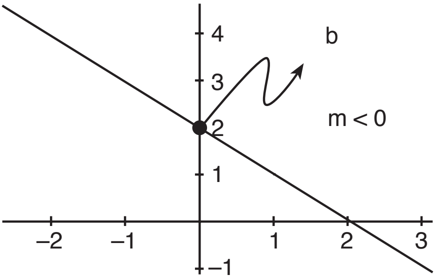
Función lineal

Definición: Una **función lineal** esta definida por la regla:
f(**x**) = **y** = **mx** + **b**, con **m**, **b** $\in$ **R**, **m** $\neq$ 0

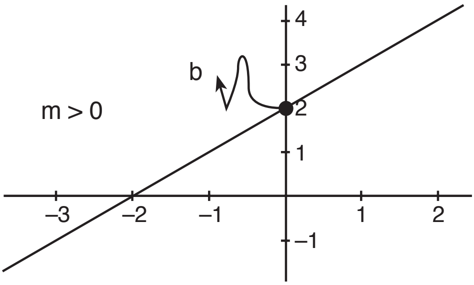
Observación: La gráfica de una función lineal es una linea recta, cuya pendiente es **m** y el punto de corte con el eje **Y** es **b**.

Ejemplos:

1) **F**(**X**) = –**X** + 2



2) **G**(**X**) = **X** + **2**



DEFINICION:

En la función lineal (**f**(**x**) = **mx** + b), **m** se define como la **variación** de la variable dependiente **por cada unidad** que **varíe** la variable independiente (gráficamente **m** representa la inclinación de la línea recta).

OBSERVACION:

Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos diferentes de una función lineal f, **m** se puede determinar mediante el cociente: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (mostrar gráficamente).

Ejemplos:

1) Encontrar la regla que define la función lineal de la recta que pasa por los puntos (3, –2) y (4, 5).

Como una función lineal está definida por una expresión de la forma: **f**(**x**) = **y** = mx + **b**, se deben determinar los valores **m, b.**

Teniendo en cuenta que: $\mathbf{m} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ entonces,

$$\mathbf{m} = \frac{5 - (-2)}{4 - 3} \quad \text{o} \quad \mathbf{m} = \frac{-2 - 5}{3 - 4}$$

$$\mathbf{m} = 7 \qquad \mathbf{m} = \frac{-7}{-1} = 7$$

Nota: como **m** > 0, este valor indica que por cada unidad que **aumente** (o **disminuya**) la variable independiente, la variable dependiente **aumenta** (o **disminuye**) 7 unidades.

Luego: **f**(**x**) = y = 7**x** + **b**

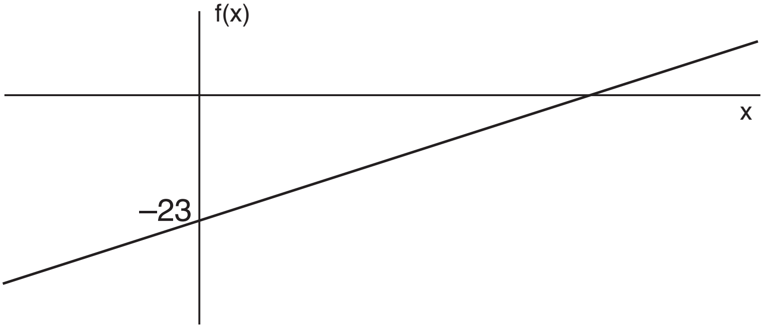
Ahora, (**x**, **y**) representan las coordenadas de cualquier punto de la función, en particular (3, –2) y (4, 5) satisfacen dicha función.

Esto es :

$$\begin{array}{lcl} -2 = 7(3) + \mathbf{b} & \text{o} & 5 = 7(4) + \mathbf{b} \\ -2 = 21 + \mathbf{b} & \text{o} & 5 = 28 + \mathbf{b} \\ -2 - 21 = \mathbf{b} & \text{o} & 5 - 28 = \mathbf{b} \\ -23 \quad = \mathbf{b} & & -23 \quad = \mathbf{b} \end{array}$$

Por lo tanto: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = 7\mathbf{x} - 23$ es la regla que define la función lineal cuya recta pasa por los puntos (3, –2) y (4, 5).

La siguiente gráfica representa la función definida por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 7\mathbf{x} - 23$:



2) Encontrar la regla que define la función cuya gráfica es la recta de pendiente $-\frac{3}{2}$ y que pasa por el punto de coordenadas (–4, 6).

Como la pendiente es $-\frac{3}{2}$, ésto significa que por cada dos unidades que varía la variable independiente, la variable dependiente varía en forma inversa 3 unidades (o por cada unidad que varía la variable independiente, la dependiente varía en forma inversa $\frac{3}{2}$ de unidad).

Es decir, que si tomamos el punto (–4, 6) y aumentamos su abscisa en una unidad (–4 +1), su ordenada se disminuye en $\frac{3}{2}$: $(6 - \frac{3}{2})$ y se obtiene el punto $(-4 + 1, 6 - \frac{3}{2})$, equivalente a: $(-3 , \frac{9}{2})$.

La regla que define la función es: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = -\frac{3}{2}\ \mathbf{x} + \mathbf{b}$. Como el punto (–4, 6) pertenece a la recta, satisface la función anterior:

$$6 = -\frac{3}{2}(-4) + \mathbf{b}$$
$$6 = 6 + \mathbf{b}$$
$$0 = b$$

Es decir, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = -\frac{3}{2}\ \mathbf{x}$

☛ **TENGA EN CUENTA:**

a. Costo total = Costo variable + Costo fijo

b. Costo promedio por unidad = $\dfrac{\text{Costo total}}{\text{Cantidad de unidades}}$

c. Ingreso total = (Precio por unidad)(número de unidades vendidas)

d. Utilidad total = Ingreso total – Costo total.

3) Los costos de producción de un determinado artículo se comportan según una función lineal. Si se producen 40 unidades iniciales de dicho artículo el costo es de \$210000 y si se producen 12 unidades el costo es de \$70000

a) Identificar la regla que define la función costos de producción
b) Identificar los costos fijos de producción
c) Interpretar **m**
d) ¿Cuál es el costo de producir 17 unidades de dicho artículo?
e) ¿Si el costo fue de \$185000 cuántas unidades de dicho artículo se produjeron?

Solución:

a) Como los costos de producción se comportan como una función lineal, entonces tiene la forma: **C**(**x**) = **mx** + **b** donde **x** es la cantidad de unidades producidas (variable independiente) y **C(x)** es el costo de producción de dichas unidades (variable dependiente).

Sabemos también que:

Si **x** = 40, C(40) = \$ 210000 y
Si **x** = 12, C(12) = \$ 70000

Esto es: (40 unidades, \$ 210000), (12 unidades, \$ 70000)

Luego:

$$m = \frac{\$70000 - \$210000}{12\,\textbf{unidades} - 40\,\textbf{unidades}} = \$\ 5000 \text{ por unidad}$$

El anterior resultado significa que el costo de producir una nueva unidad es de \$5000

Así: **C**(**x**) = \$ 5000 **x** + **b**

Ahora : \$ 70000 = \$ 5000 (12) + **b**
\$ 70000 – \$ 60000 = **b**
\$ 10000 = **b**

Por lo tanto : **C**(**x**) **=** \$ 5000**x** + \$ 10000

b) Como los **costos fijos** de producción son **independientes** de las unidades producidas, para calcular su valor consideramos **x** = 0 , Entonces:

C(0) = \$ 5000(0) + \$ 10000
C(0) = \$ 10000

Luego los costos fijos de producción son \$10000

c) Como **m** > 0, la función de costos es creciente, es decir que en la medida en que se aumenta el número de unidades producidas, el costo total de producir estas unidades también se incrementa. Además como **m** = \$5000, por cada unidad adicional que se produce, el costo se incrementa en \$5000.

d) Como la función costo total es: $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \$5000\mathbf{x} + \$10000$, si $\mathbf{x} = 17$,

$$\begin{aligned} C(17) &= \$\,5000(17) + \$\,10000 \\ &= \$\,85000 + \$10000 \\ &= \$\,95000 \end{aligned}$$

Como $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \$\,5000\mathbf{x} + \$10000$ y nos indican que para algún **x**, $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \$185000$, debemos averiguar para qué **x** se cumple:

$$\begin{aligned} \$\,185000 &= \$\,5000\mathbf{x} + \$\,10000 \\ \$\,185000 - \$\,10000 &= \$\,5000\mathbf{x} \\ \$\,175000 &= \$\,5000x \end{aligned}$$

$$\frac{\$175000}{\$5000} = \mathbf{x}$$

Es decir, se deben producir 35 unidades de un artículo para que los costos sean de \$ 185000.

4) Una población en extinción, inicialmente (1960) tenía 1 200000 habitantes, pero en 1980 se redujo a la mitad. Si la población se comporta como una función lineal respecto al tiempo transcurrido en años:

a) Defina las variables, e identifique la regla que define la función: población – tiempo.
b) Interprete **m** y **b**
c) ¿Qué tiempo debe transcurrir para que la población desaparezca por completo?
d) Grafique la función.

Solución:

a) Variable independiente: **t** = tiempo transcurrido en años desde 1960.
Variable dependiente: **P**(**t**) = Población después de **t** años.

El año 1960 se considera como **t** = 0 , luego **P**(0) = 1 200000
El año 1980 se considera como **t** = 20, luego **P**(20) = 600000
(¿Por qué?)

Así: $\mathbf{m} = \dfrac{600.000 - 1200.000}{20 - 0} = -30.000$ y **b** = 1 200000

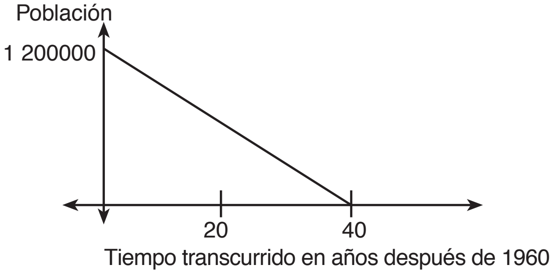
luego la función pedida es: **P**(**t**) = – 30000**t** + 1 200000

b) Como **m** < 0, esta función lineal es decreciente, es decir que a medida que transcurre el tiempo, la población disminuye. Además, como **m =** – 30000**,** indica que por cada año que transcurre la población se disminuye en 30000 habitantes.

c) Si la población se extingue completamente, **P**(**t**) = 0 , luego:

0 = –30000**t** + 1 200000, **t** = 40 años. Lo cual significa que deben transcurrir 40 años a partir de 1960 para que la población descrita se extinga completamente (esto ocurriría en el año 2000).

d. Comportamiento de la poblacion respecto al tiempo



❏ EJERCICIO Nº 22

1) Graficar las siguientes funciones, indicando los interceptos con los ejes coordenados y la pendiente de la linea recta:

a) $f(x) = 10 + 3x$ b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = -7 + \frac{4}{3}x$ d) $f(x) = -5 - 5x$

2) Determinar en cada caso, la función lineal que cumple:

a) Su gráfica pasa por los puntos (1, 2) y $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$

b) Los puntos (–2, 3) y (5, –2) satisfacen la función.

c) La gráfica tiene pendiente $-\frac{1}{5}$ y pasa por el punto (0, $\frac{5}{2}$)

d) La gráfica pasa por los puntos (100, 3500) y (200, 7200)

e) La gráfica pasa por los puntos (–100, –750) y (0, 4500)

3) Contestar en cada caso y justificar la respuesta:

a) Sean $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$,y, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$, si las gráficas de las **f**unciones **f** y **g** son líneas rectas paralelas, ¿qué relación e**x**iste entre $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{m}_2$?

b) Sean $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$,y, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$, si las gráficas de las funciones **f** y **g** son perpendiculares, ¿qué relación existe entre $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{m}_2$?

4) Los costos de producir x pares de zapatos para una empresa están dados por **C**(**x**) = \$ 7000000 + \$ 1500**x** y cada par de zapatos se vende por \$ 5000.

a) ¿Cuáles son los costos fijos de producción de la empresa? Interprete la respuesta.

b) ¿Cuáles son los costos variables por cada par de zapatos que produzca la empresa?

c) ¿Cuáles son los costos de producir 1500 pares de zapatos? ¿3000 pares?

d) ¿Qué ingreso tiene la firma si produce y vende 1500 pares de zapatos? ¿3000 pares?

e) Construir la función de utilidad de producir y vender **x** pares de zapatos

f) Si la empresa desea obtener una utilidad de \$ 1 750000, ¿cuántos pares de zapatos debe producir y vender?

g) ¿Cuántos pares de zapatos debe producir y vender la empresa para no tener pérdidas ni ganancias? (**punto de equilibrio**)

h) En el mismo sistema de coordenadas cartesianas, trazar la gráfica de las funciones costos e ingresos y rayar la región de pérdidas.

5) Para una empresa se sabe que al producir una unidad adicional a partir de un nivel x de producción los costos se aumentan en $ 10, y que al producir 200 unidades se tienen unos costos de producción de $ 10000

a) Construir una función lineal que represente el costo total de producir **x** unidades.
b) ¿Cuál es el costo promedio de producir 100 unidades? ¿**x** unidades? ¿Es lineal esta función?
c) Si la empresa tuvo unos costos totales de $13000, ¿Cuántas unidades produjo?

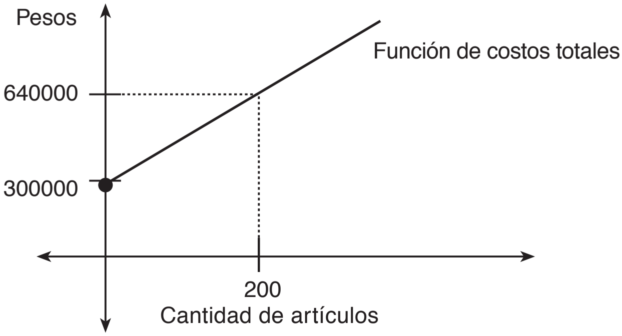
6) Si producir 50 unidades de un artículo tiene unos costos totales de $ 30000, y producir 200 unidades tiene un costo total de $ 45000; y los costos totales de producción están relacionados linealmente con la cantidad de unidades producidas:

a) Definir las variables y encontrar la función lineal que relaciona los costos totales con el número de unidades producidas.
b) ¿En cuánto se aumentan los costos totales de producción por cada unidad adicional que se produzca?
c) ¿Cuáles son los costos fijos de producción?
d) ¿Cuál es el costo total de producir 425 unidades? ¿426 unidades? ¿En cuánto se aumentan los costos? ¿Qué representa este valor?
e) Si la función de utilidad es $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = 50\mathbf{x} - 25000$, ¿cuál es el precio de venta de cada artículo?
f) ¿En qué nivel de producción la empresa incurre en pérdidas?
g) ¿A qué precio por unidad debería vender 500 unidades para que la utilidad sea de $1 000000?

7) Un productor puede ofrecer x unidades de un bien a un precio **p** según $\mathbf{x} = 0(\mathbf{p}) = 540 + 3\mathbf{p}$, y los consumidores pueden comprar x unidades a un precio **p** según $\mathbf{x} = \mathbf{D}(\mathbf{p}) = 700 - 5p$.

a) ¿Cuál es el precio de equilibrio?
b) ¿Cuál es la cantidad de equilibro?
c) ¿En cuánto excede la cantidad demandada a la cantidad ofrecida si el precio fuera de $ 15?
d) ¿En cuánto excede la cantidad ofrecida a la cantidad demandada si el precio fuera de $ 27?.

8) Los costos de producción de una empresa estan dados por un modelo lineal que se presenta a continuación. Si la empresa vende cada artículo a $ 2500:



a) Determinar la función que representa los costos totales de producir **x** unidades.
b) ¿Cuáles son los costos fijos de producción?
c) Determinar y graficar (en el mismo esquema dado) la función de ingresos por la venta de **x** unidades.
d) Determinar e interpretar el punto de equilibrio.
e) ¿Para qué niveles de producción y venta se obtienen pérdidas? Resaltarlo en la gráfica.

❏ Taller Nº 10

PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL

PRERREQUISITOS:

Tener claridad en el concepto de función.
Distinguir entre variable independiente y dependiente.

Identificar la forma general de una función lineal.
Identificar los parámetros de una función lineal (pendiente y corte con el eje ***Y****).*
Tener claridad en las reglas: costo, Ingresos, utilidad y punto de equilibrio.

Definir las variables, plantear y resolver cada uno de los siguientes problemas:

1) El costo variable de fabricar una mesa es de U$7 y los costos fijos son de U$150 al día. Determinar el costo total de fabricar x mesas al día. ¿Cuál es el costo de fabricar 100 mesas al día?

2) Una firma que fabrica esferos determina que la relación entre los costos totales de producción y el número de esferos fabricados es lineal. El costo total de fabricar 10 esferos es $800 y el costo total de fabricar 20 esferos es $ 1100. Si la firma vende cada esfero en $ 50:

   a) Encontrar la función de costos. Interprete **m** y **b**
   b) ¿Cuál es el costo total de producir 40 esferos?
   c) Hallar la función **I** de ingresos y la función **U** de utilidad (como funciones del número de esferos producidos y vendidos). En cada caso interpretar **m** y **b**
   d) ¿Cuántos esferos debe producir y vender para obtener una utilidad de $10000?
   e) Determinar el punto de equilibrio.

3) El costo de un boleto de autobús en Caloto (Cauca) depende directamente de la distancia recorrida, así: un recorrido de 2 millas cuesta $ 400, mientras que uno de 6 millas tiene un costo de $ 600. Determinar el costo de un boleto por un recorrido de **x** millas.

4) El costo variable de producir cierto artículo es de $ 900 por unidad y los costos fijos son de $ 2400 por día. Si el precio de venta de cada artículo es $ 1200, ¿cuántos artículos deberá producir y vender para determinar el punto de equilibrio?

5) Los costos de producción de un determinado artículo se comportan según un modelo lineal. Si se producen 12 unidades, el

costo es de $ 210000 y si se producen 40 unidades, el costo es de $ 70000. Cada artículo se vende en $ 7000. Determinar:

a) La función de costos e interprete los parámetros: **m**, **b**.
b) ¿Cuántas unidades (aproximadamente) debe producir y vender para alcanzar el punto de equilibrio?
c) Interpretar: **C**(**x**) = 0, **U**(30), **U**(20)
d) Graficar la función de costos y la función de ingresos (en un mismo plano cartesiano), indicar el punto de equilibrio y rayar la región de pérdidas.

6) El costo de producir **x** artículos está dado por **c**(**x**) = 2.8**x** + 600 y cada artículo se vende en $4.

a) Encontrar el punto de equilibrio
b) Si se venden 450 unidades, ¿cuál debería ser el precio fijado a cada artículo para garantizar que no haya pérdidas?

7) El costo total de producir **x** cantidad de artículos a la semana está dado por **C**(**x**) = 1000 + 5**x**. Si cada artículo puede venderse en $ 7, determinar el punto de equilibrio. Si el fabricante puede reducir los costos variables a $4 por artículo incrementando los costos fijos en $ 200 a la semana, ¿le convendría hacerlo?

8) En cierta compañía el costo variable por producir cada unidad de su artículo es $1 500. Producir 100 unidades tiene costo total de $1 55000. Luego comercializa todos los artículos que produce a un precio de $ 2000 cada uno. Si el comportamiento de los costos es de tipo lineal, determinar:

a) Función de costo total e interpretar los parámetros: **m**, **b**.
b) Función de utilidad e interpretar los parámetros: **m**, **b**.
c) Punto de equilibrio.
d) ¿Qué precio deberá fijar a cada artículo para obtener una utilidad de $ 75000 por la producción y venta de 100 artículos?
e) En un mismo plano cartesiano, graficar las funciones de ingresos y costos y rayar la región de ganancias.

9) Para la compañía **B** los costos totales por producir x unidades están dados por **C**(**x**) = 55**x** + 4000 y vende cada artículo en

$ 65. Para la compañía **A** producir 100 artículos genera costos de $ 7500 y los costos variables son los mismos de la compañía B y vende cada artículo en $ 62.

a) Determinar la función de costos para la compañía **A**.
b) Determinar la función de utilidad para cada una de las compañías.
c) Determinar el punto de equilibrio para cada una.

10) Los costos fijos por producir cierto artículo son de $5 000 al mes y los costos variables son de $3 .50 por unidad. Si el productor vende cada artículo en $ 6; determinar:

a) El punto de equilibrio
b) El número de unidades que se deben producir y vender al mes para obtener una utilidad de $1 000 mensuales
c) La pérdida cuando se producen y venden 1500 unidades cada mes.

11) Una empresa compró una máquina en el año de 1975 por un valor de $ 850000. Si ésta tiene una depreciación anual constante de $ 45000:

a) Determinar el modelo lineal que relaciona el valor de la máquina con el número de años transcurridos a partir de 1975.
b) ¿En qué año la máquina pierde su valor?
c) ¿Al cabo de cuánto tiempo la máquina vale el 35% de su valor inicial?
d) Graficar la función.

12) Dada la tabla:

CANTIDAD DE ESTUDIANTES INSCRITOS EN LA CARRERA DE DERECHO EN LA UNIVERSIDAD ABC (DESDE SU FUNDACIÓN)

Año	**1980**	**1985**	**1990**
Número de estudiantes	5200	4300	3400

a) Determinar un modelo lineal que relacione la cantidad de estudiantes inscritos con el tiempo transcurrido. Interpretar los parámetros: **m**, **b**.

b) Aproximadamente, ¿cuántos estudiantes se inscribieron en 1997?
c) ¿En qué año se debe prescindir de esta carrera?
d) Graficar la función.

13) Edilberto y Anibal, elaboran bolígrafos publicitarios. En la fábrica de Edilberto los costos fijos son $ 20000, el costo variable por unidad es $ 500 y vende cada bolígrafo que produce en $ 1500.

En la fábrica de Aníbal, la utilidad **U** por producir y vender **X** boligrafos está dada por la función **U**(**X**) = (3000 – 25**X**)**X** – 50000.

Complete la siguiente información:

Fábrica de Edilberto

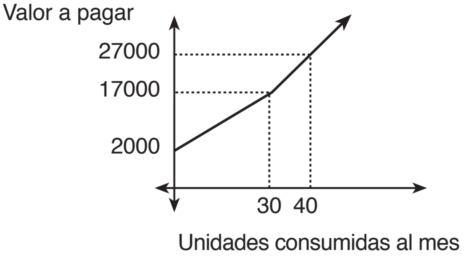
Función de Costo Total	C(X) =
Función de Utilidad	U(X) =
Equilibrio	

Fábrica de Anibal

Cantidad de bolígrafos que maximizan la utilidad	
Utilidad máxima	
Equilibrio	

Trazar en el mismo sistema de coordenadas cartesianas la función de utilidad en cada una de las fábricas.
Al vender más de 30, pero menos de 60 unidades de estos productos, ¿cuál de las fábricas obtiene mayor utilidad?

14) La siguiente gráfica representa el modelo para determinar la tarifa total que deberá pagar un contribuyente cada mes por un servicio público.



Determinar:

a) Cargo fijo.
b) Valor total a pagar por el consumo de 50 unidades al mes.
c) Ecuación general que describe la función.

15) De la compañía Ortiz que fabrica cinturones, se tiene la siguiente información:

- Comercializa su producto en la ciudad de Santa Fe de Bogotá y fuera de ella.
- La función de costo total no es la misma en Santa Fe de Bogotá que en las otras ciudades pero ambas, obedecen a un modelo lineal.
- Para Santafé de Bogotá los costos fijos son; $ 25000. El costo total de producir 25 cinturones es de $ 200000. El precio de venta de un cinturón es $1 5000.
- Para otras ciudades los costos fijos son: $ 3000. Cada cinturón se vende en $ 15000. La utilidad por producir y vender 25 cinturones es $ 195000.

De acuerdo con la anterior información, complete la siguiente tabla:

	COMERCIALIZAR EN SANTA FE DE BOGOTÁ	COMERCIALIZAR FUERA DE SANTA FE DE BOGOTÁ
COSTOS FIJOS		
FUNCIÓN DE COSTO TOTAL		
FUNCIÓN DE INGRESO		
FUNCIÓN DE UTILIDAD		
PUNTO DE EQUILIBRIO		

En dónde recomienda comercializar:

a) ¿Menos de 5 cinturones?
b) ¿Más de 50 cinturones?

16) Las firmas **UFO** y **OVNI** fabrican botines. De cada una de estas firmas sabemos:

UFO: La utilidad por fabricar y vender **x** pares de botines se puede expresar como **U**(**x**) = 13**X** – 5200. El ingreso por la venta de 10 pares de botines es $ 630.

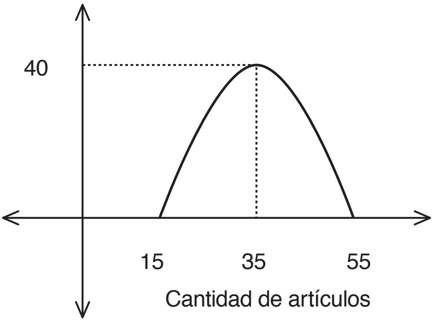
OVNI: Los costos totales de producir 100 pares de botines son $11000 y los costos totales de producir 200 pares de botines son $ 16000, por la venta de 10 pares de botines el ingreso es $ 650.

Completar la siguiente tabla:

	UFO	**OVNI**
FUNCIÓN DE COSTOS		
COSTOS FIJOS		
COSTOS VARIABLES		
FUNCIÓN DE INGRESO		
FUNCIÓN DE UTILIDAD		
PUNTO DE EQUILIBRIO		

Nota: Todas estas funciones se comportan como una función lineal. Si usted, además de su salario (igual en cualquiera de las firmas) recibe como bonificación el 10% de las utilidades, en cuál de las firmas trabajaría? Explicar.

17) El supermercado **ALFA** determina que la utilidad por la venta de **x** artículos se puede leer en la gráfica que muestra la figura.



a) ¿Cuántos artículos debe vender **ALFA** para que la utilidad sea máxima?

b) ¿Para que nivel ó niveles de ventas se tiene el punto de equilibrio?
c) ¿Cuál es la función **U** de utilidad? **U**(**x**) =

Función constante

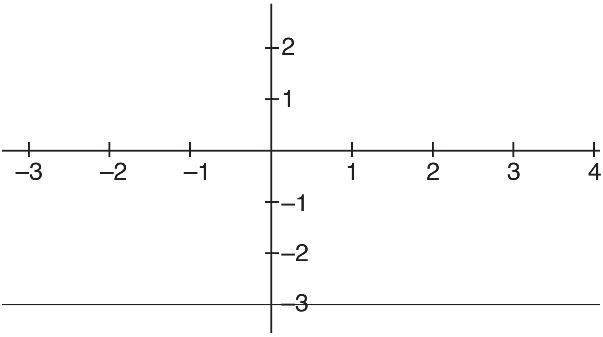
Una función **f** se denomina constante, si tiene la forma general

$$\mathbf{f(x) = k \in R}$$

La gráfica de una función constante es una linea recta con pendiente cero (horizontal).

Ejemplo:

La gráfica de la función **f**(**x**) = –3, es:



Observe que, **Df** = **R** y **Rf** = {– 3}

Función cuadrática

Una función **cuadrática** tiene la forma general
$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{ax}^2 + \mathbf{bx} + \mathbf{c}$, donde **a**, **b**, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{a} \neq 0$

El **dominio** de esta función son los números reales.

Por ejemplo,

a) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$
b) $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^2 - 1$
c) $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = -3\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}$
d) $\mathbf{y} = -5\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} - 7$

son funciones cuadráticas y cada una de ellas tiene como dominio los números reales.

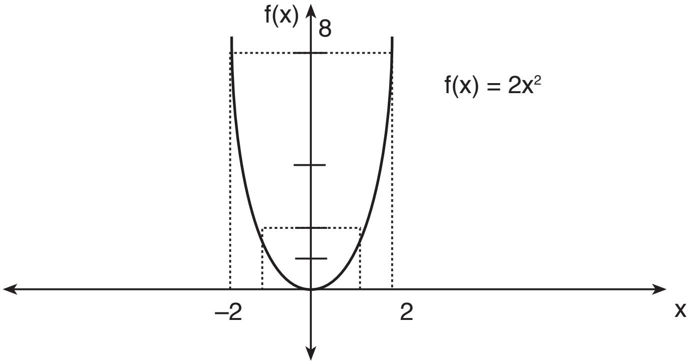
GRAFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRATICA:

Se considera el siguiente ejemplo:

$\mathbf{f}\ (\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^2$
Como **Df** = **R**, asignemos algunos valores particulares a **x** para observar el comportamiento de la gráfica de **f**(**x**):

Si $\mathbf{x} = 0$,	$\mathbf{f}(0) = 0$,	$(0, 0)$ (cero de la función)
Si $\mathbf{x} = -1$,	$\mathbf{f}(-1) = 2$,	$(-1, 2)$
Si $\mathbf{x} = 1$,	$\mathbf{f}(1) = 2$,	$(1, 2)$
Si $\mathbf{x} = -2$,	$\mathbf{f}(-2) = 8$,	$(-2, 8)$
Si $\mathbf{x} = 2$,	$\mathbf{f}(2) = 8$,	$(2, 8)$
Si $\mathbf{x} = \frac{1}{2}$,	$\mathbf{f}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$,	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
Si $\mathbf{x} = -\frac{1}{2}$,	$\mathbf{f}(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

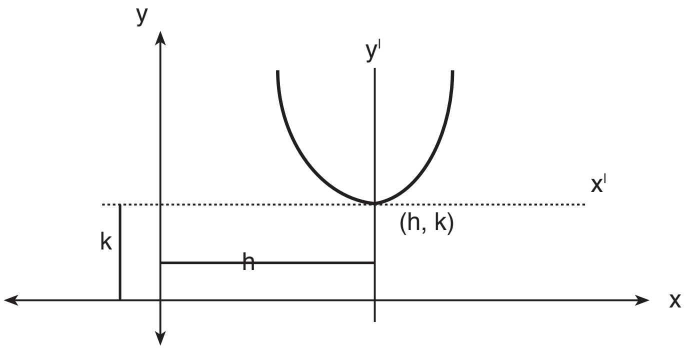
Representando los puntos en el plano cartesiano, obtenemos:



Este tipo de gráfica característica de las funciones cuadráticas se llama **parábola.** La parábola tiene un punto mínimo o un punto máximo que se llama vértice. En el caso anterior se encuentra en el origen del sistema de coordenadas cartesianas. Además en el caso en que **a** $>$ 0, el vértice corresponde al punto mínimo (parábola **abre hacia arriba**) y en el caso en que **a** $<$ **0** el vértice corresponde al punto máximo (la parábola **abre hacia abajo**).

Ahora se considerarán funciones cuadráticas para las cuales **b** $\neq$ 0 o **c** $\neq$ 0 casos en los cuales el vértice de la parábola no está en el origen.

Sea **f**(**x**) = **ax**^{2} + **bx** + **c** para la cual **b** $\neq$ 0 o **c** $\neq$ 0 y **a** $>$ 0. Su gráfica es una parábola que **abre hacia arriba** y su vértice un punto de coordenadas (**h**, **k**) del sistema **xy**.



El punto (**h**, **k**) se puede considerar como el origen de un nuevo sistema $x^I y^I$ en este sistema la parábola tiene la ecuación: $y^I = a(x^I)^2$ (1) pués su origen es el origen del sistema $x^I y^I$.

¿Cómo podemos expresar (x^I, y^I), coordenadas de un punto cualquiera del sistema, $x^I y^I$ en términos de las coordenadas (**x**, **y**)?

$x = x^I + h$, es decir, $x^I = x - h$, **y**
$y = y^I + k$, es decir, $y^I = y - k$ (Observar la anterior gráfica)

Reemplazando estos valores en (1):

$$y^I = a(x^I)^2$$
$$y - k = a(x - h)^2$$

Realizando las operaciones:

$$y - k = ax^2 - 2ahx + ah^2$$
$$y = ax^2 - 2ahx + (ah^2 + k)$$

y comparando en la forma general: $y = ax^2 + bx + c$, tenemos:

$$-2ah = b \text{ y } ah^2 + k = c$$

De donde: $h = \dfrac{-b}{2a}$, $\qquad k = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$

que son las coordenadas del vértice en términos de los números reales a, b y c.

☛ RECUERDE LAS COORDENADAS DEL VÉRTICE DE UNA PARÁBOLA:

Coordenadas del vértice = $v = (h, k) = \left(\dfrac{-b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

Para esta parábola su **eje de simetría** es la recta $x = h$

Ejemplo:

Sea $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, su gráfica es una parábola que abre hacia arriba pues (**a** = 3) > 0, y tiene como vértice el punto de coordenadas (**h**, **k**) donde:

$$\mathbf{h} = -\frac{-5}{2(3)} = \frac{5}{6}, \qquad \mathbf{y}, \qquad \mathbf{k} = -\frac{(-5)^2 - 4(3)(2)}{4(3)} = -\frac{1}{12}$$

es decir, $\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{12}\right)$

Ahora consideremos los **interceptos** de la gráfica de la función:
Con **x** (**ceros** de la función), **f**(**x**) = 0.

$$3\mathbf{x}^2 - 5\mathbf{x} + 2 = 0$$

$$\frac{(3\mathbf{x})^2 - 5(3\mathbf{x}) + 6}{3} = 0$$

$$\frac{(3\mathbf{x} - 2)3(\mathbf{x} - 1)}{3} = 0$$

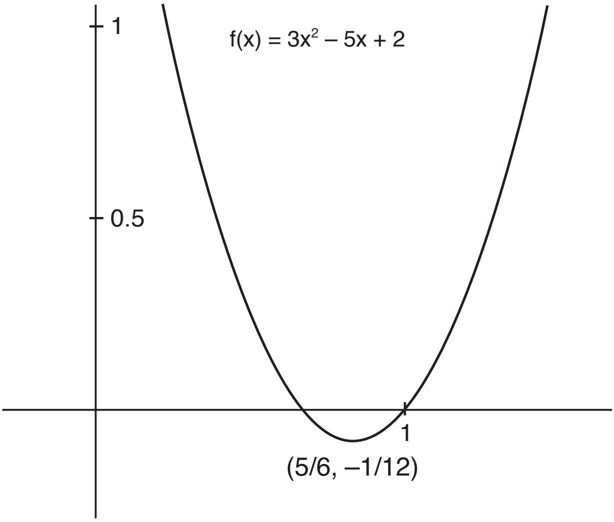
$$(3\mathbf{x} - 2)(\mathbf{x} - 1) = 0$$

$\mathbf{x} = \frac{2}{3}$, $\mathbf{x} = 1$, es decir

$\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, y, $(1, 0)$ son los puntos de corte con el eje x

Con **y**: **f**(0) = $3(0)^2 - 5(0) + 2$
f(0) = 2
(0,2) es punto de corte con eje y

Con estos puntos podemos dar un buen bosquejo de la gráfica de **f**.



Nota: Para obtener mayor precisión de la gráfica se pueden considerar puntos adicionales.

El **rango** de esta función es $\left[-\frac{1}{12},\infty\right)$ y su **eje de simetría** es la recta de ecuación $\mathbf{x}=\frac{5}{6}$

EN GENERAL:

Para una función cuadrática cuya gráfica es una parábola que **abre hacia arriba** su **rango** es: $\{\mathbf{y}\in\mathbf{R}/\mathbf{y}\geq\mathbf{k}\}=[\mathbf{k};\rightarrow)$

Si la función cuadrática es una parábola de vértice (**h**, **k**) que **abre hacia abajo** su rango es : $\{\mathbf{y}\in\mathbf{R}/\mathbf{y}\leq\mathbf{k}\}=(-\infty;\mathbf{k}]$

❑ EJERCICIO Nº 23

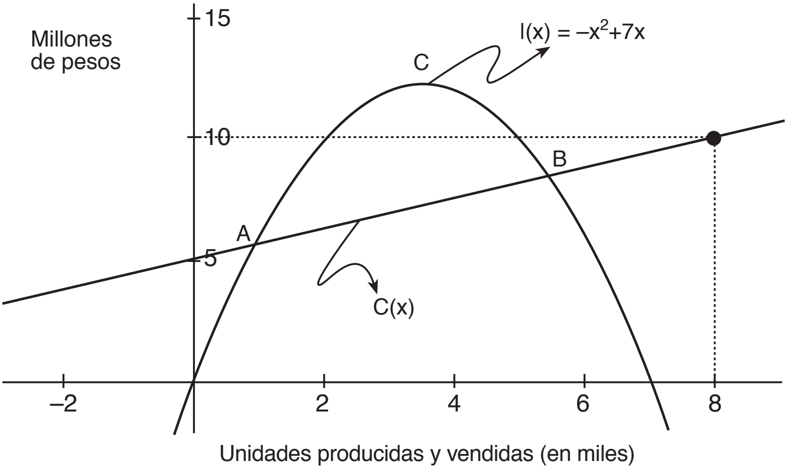
1) Determinar los interceptos con los ejes coordenados, graficar y hallar el rango de las siguientes funciones cuadráticas:

a) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4$
b) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - 9$
c) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^2 - 9\mathbf{x} - 5$
d) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 5\mathbf{x}^2 - 7\mathbf{x} + 10$
e) $\mathbf{y} = \mathbf{x}^2 + 1$
f) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -3\mathbf{x}^2 + 7$
g) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} - 4\mathbf{x}^2$
h) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -3\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} + 1$
i) $\mathbf{y} = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x} - 2$
j) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -5\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} - 3$

2) La utilidad de producir y vender x unidades de un bien para una empresa está dada por : $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^2 + 80\mathbf{x} - 500$

a) ¿Qué utilidad tendrá la empresa si produce y vende 20, 35 y 55 unidades?
b) ¿Qué nivel (es) de producción debe tener la empresa para que no haya pérdidas, ni ganancias?
c) ¿Para qué niveles de producción la empresa puede incurrir en pérdidas?
d) ¿Para qué nivel de producción la empresa alcanza la máxima ganancia?¿Cuál es dicha ganancia?
e) Graficar $\mathbf{U}(\mathbf{x})$

3) A continuación se encuentran graficadas las funciones de costo total C(x) e ingreso total **I**(x) mensual para determinada empresa:



a) Determinar la regla que define la función de costo total. Interpretar los parámetros **m** y **b.**

b) Determinar las coordenadas de los puntos **A**, **B** y **C** , e interpretar los resultados.

c) Determinar el intervalo de producción y venta donde hay pérdidas.

4) Para producir y vender x unidades de un artículo, una empresa tiene la siguiente función de costos:

$$\mathbf{y} = \frac{250}{13}\mathbf{x}^2 - \frac{11000}{13}\mathbf{x} + \frac{150000}{13} \ .$$

Cada unidad del artículo se vende a $500

a) ¿Cuáles son los costos fijos de producción?
b) ¿Cuáles son los costos totales de producir 40 unidades? ¿80 unidades?
c) ¿Qué ingreso tiene la empresa si produce y vende 40 unidades?
d) Construir la función ingreso cuando se producen y venden **x** unidades.
e) ¿Cuál es la utilidad cuando se producen y venden 40 y 80 unidades?
f) Construir la función utilidad cuando se producen y venden **x** unidades de dicho artículo.

g) Si la empresa desea obtener una utilidad de $\frac{136000}{13}$, ¿cuántas unidades debe producir y vender?
h) ¿A qué nivel (es) de producción la empresa obtiene su punto de equilibrio?
i) ¿A qué nivel de producción la empresa alcanza la máxima ganancia?
j) Graficar las funciones Costos e Ingresos, en el mismo sistema.
k) Graficar la función utilidad.

5) Si los consumidores pueden comprar

$\mathbf{x} = \mathbf{D}(\mathbf{p}) = \frac{1}{1500}\mathbf{p}^2 - \frac{3}{5}\mathbf{p} + 150$ unidades de un bien a un precio

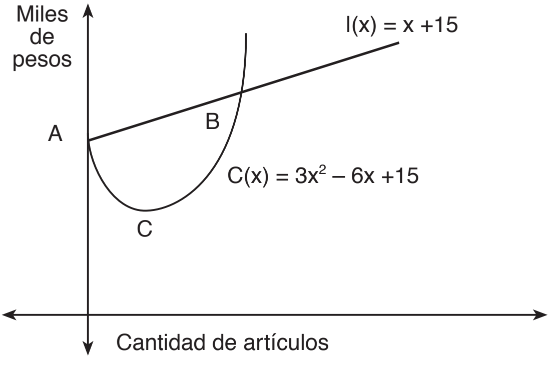
p y un productor puede ofrecer

$\mathbf{x} = \mathbf{0}(\mathbf{p}) = \frac{11}{1024}\mathbf{p}^2 + \frac{55}{256}\mathbf{p} - \frac{50925}{256}$ unidades del bien a un

precio **p**

a) ¿Cuál es el precio de equilibrio del mercado? ¿Cuál la cantidad de equilibro?
b) Graficar en el mismo sistema las funciones de oferta y demanda.

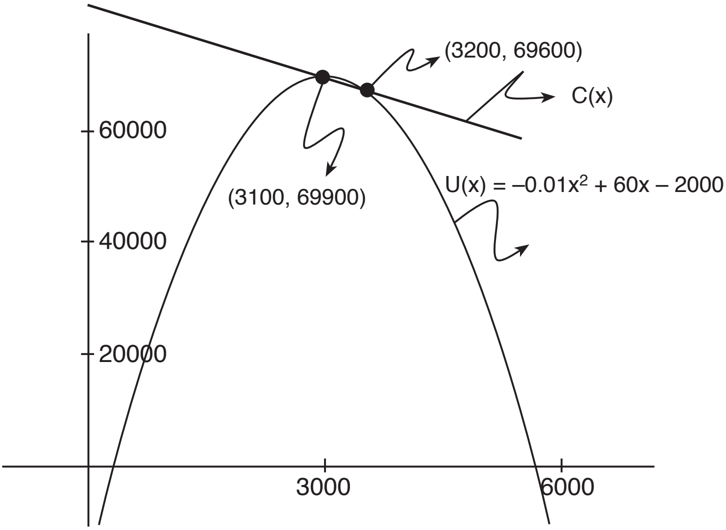
6) En la siguiente gráfica se presentan las funciones de costos semanales C(x), e ingresos semanales **I**(x) respectivamente.



a) Determinar las coordenadas de los puntos **A**, **B**, **C**, e interpretar cada uno de estos puntos.

b) En que intervalo de producción y venta hay pérdidas?

7) En la siguiente gráfica se encuentran representadas las funciones de utilidad **U**(**x**) y costos **C**(**x**) para cierta empresa:



a) Determinar la función de costos **C**(**x**).
b) Determinar la función de ingresos.
c) Determinar el punto o puntos de equilibrio.
d) Determinar el intervalo de producción y venta donde hay ganancias.

8) Una empresa tiene costos fijos mensuales de \$ 2000 y un costo por unidad adicional de \$ 25.

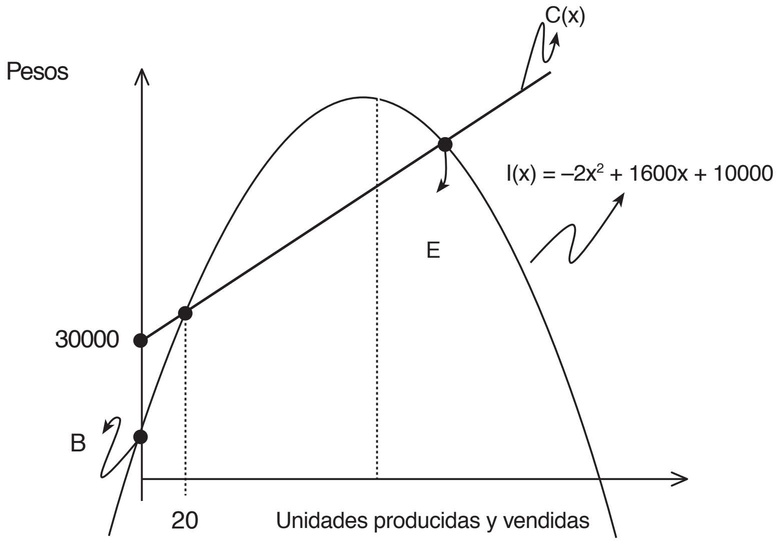
a) Determinar la función de costo.
b) Si el ingreso total de vender **x** unidades está dado por: **I**(**x**) = 60**x**– 0.01$\mathbf{x}^2$, determinar cuántas unidades deben producirse y venderse para maximizar la utilidad. ¿Cuál es esta utilidad máxima?
c) Graficar la función de utilidad y señalar el intervalo de ganancias.

9) Los costos fijos mensuales de una empresa por su producto son de \$ 400000 y el costo variable por unidad producida es de \$1400. Si la empresa vende **x** unidades al precio \$**p** por unidad en donde 2**p** = 5000 – **x**, determinar:

a) Función de ingresos.
b) ¿Cuántas unidades deben producirse y venderse al mes para que la utilidad sea máxima?

10) La siguiente gráfica representa las funciones de costos e ingresos mensuales para una empresa M. Se pide:

a) Determinar la función de costos: **C**(**x**)
b) Determinar las coordenadas de **B**, **E** e interpretarlas.
c) Cuál es la utilidad de producir y vender 450 unidades?



❑ TALLER Nº 11

FUNCION CUADRATICA

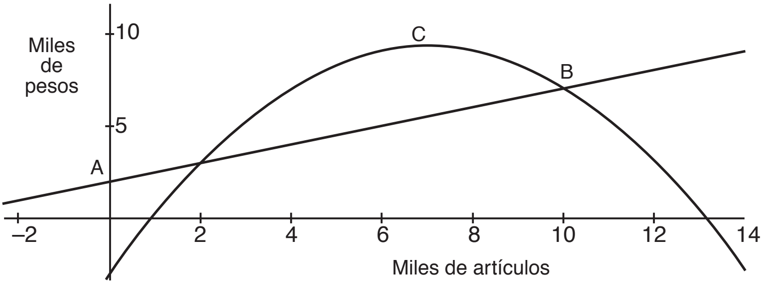
PRERREQUISITOS

Identificar la forma general de una función cuadrática.
Identificar las reglas para hallar el vértice de una parábola
Interpretar: vértice e interceptos de la gráfica de una función cuadrática.

1) La demanda mensual **x** de cierto artículo al precio de p dólares por unidad, está dada por la relación **x** = 1350 – 45**p**. El costo de la mano de obra y del material con que se fabrica este producto es de $ 5 por unidad, y los costos fijos son $ 2000 al mes. ¿Qué precio por unidad deberá fijarse al consumidor con el objeto de obtener una utilidad máxima mensual?.

2) Las gráficas de las funciones de costos $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{2} + 2$, e ingresos, $\mathbf{I}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4}\mathbf{x}^2 + \frac{7}{2}\mathbf{x} - 3$ al producir y vender x palillos (en miles) de la fábrica «Doble Punta», se dan a continuación. **C**(**x**), e **I**(**x**) en miles de pesos.

   a) Determinar e interpretar las coordenadas de los puntos **A**, **B**, **C** (vértice de la parábola).
   b) Determinar nivel de producción y venta necesarios para que la fábrica tenga ganancias.



3) Una compañía produce y vende un determinado artículo. Para esta compañía la función de utilidad está dada por :

   $\mathbf{U}(\mathbf{X}) = -2\mathbf{X}^2 + 180\mathbf{X} - 2800.$

   en donde **U**(**X**) representa la utilidad de producir y vender x unidades del artículo.

   a) Graficar la función de utilidad.
   b) Si se obtuvo una utilidad de $ 450, ¿cuál fue el número de unidades producidas y vendidas?

c) ¿Para qué nivel de producción se obtiene la ganancia máxima? ¿Cuál es dicha ganancia?
d) Si el precio de venta de cada unidad es \$ 800; encuentre la función de costo total.
e) ¿Cuántas unidades se fabricaron si el costo total es de \$ 20680.

4) Los costos de producción de x miles de artículos de una empresa están dados por $\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \frac{1}{3}\mathbf{X}^2 + 4 - 2\mathbf{X}$, y los ingresos están dados por $\mathbf{I}(\mathbf{X}) = 8\mathbf{X} - 16 - \mathbf{X}^2$ ($\mathbf{C}(\mathbf{X})$ e $\mathbf{I}(\mathbf{X})$ están dados en millones de pesos).

a) ¿Cuáles son los costos fijos?
b) ¿Qué cantidad de artículos producidos minimizan los costos?
c) Obtener la función de utilidad, trazar su gráfica y analizar su comportamiento.

5) El costo promedio por unidad al producir x unidades de cierto artículo es: $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = 20 - 0.06x + 0.002\mathbf{x}^2$. ¿Qué número de unidades producidas minimizarán el costo promedio?

6) Una compañía tiene costos fijos de \$ 4000 y al producir 100 unidades de su producto, tiene costos totales de \$ 9000. Si se sabe que la función de costo es lineal, determinar:

a) La función de costo total por producir x unidades.
b) Si el ingreso por vender las x unidades está dado por
   $\mathbf{I}(\mathbf{x}) = 120\mathbf{x} - 0.02\mathbf{x}^2$.
   Determinar cuántas unidades deben venderse para que el ingreso sea máximo, ¿cuál es el ingreso?
c) ¿Cuántas unidades deben producirse y venderse para obtener la ganancia máxima?

Función exponencial

Una **función exponencial** tiene la forma general: $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{ba}^x$ con **a** y **b** reales positivos, siendo $\mathbf{a} \neq 1$.

Nota: Aunque es posible que en algunos casos $\mathbf{b} < 0$, en los problemas de aplicación, es decir en la práctica lo anterior no se da.

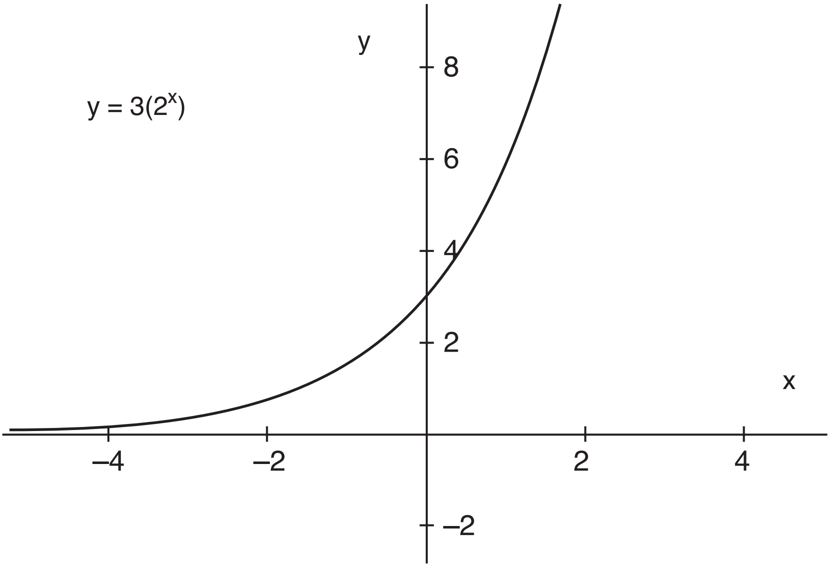
El **dominio** de esta función son los números reales.

Para determinar el comportamiento de la gráfica de una función exponencial, se considerarán algunos ejemplos:

1) Graficar la función exponencial $\mathbf{y} = 3(2^x)$.

   Como su dominio son los números reales, para trazar su gráfica asignamos valores a **x** y a la vez que se determinan los correspondientes valores de **y**. Las parejas (**x**, **y**) representadas en el plano cartesiano sugieren la forma de la curva exponencial.

Si:	$\mathbf{x} = 0,\ \mathbf{y} = 3$	(0, 3) (Intersección con eje **y**)
	$\mathbf{x} = -1,\ \mathbf{y} = \frac{3}{2}$	$(-1, \frac{3}{2})$
	$\mathbf{x} = 1,\ \mathbf{y} = 6$	(1, 6)
	$\mathbf{x} = -2,\ \mathbf{y} = \frac{3}{4}$	$(-2, \frac{3}{4})$
	$\mathbf{x} = 2,\ \mathbf{y} = 12$	(2, 12)



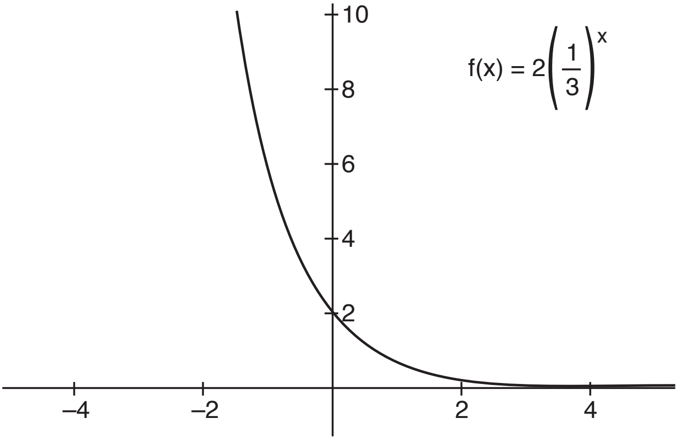
El **rango** o **recorrido** de esta función es $(0, \infty)$

2) Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{\mathbf{x}}$

Es equivalente a: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 2(3)^{-x}$

Asignando valores a "**x**", tenemos que si:

$\mathbf{x} = 0$,	$\mathbf{f}(0) = 2$,	$(0, 2)$
$\mathbf{x} = -1$,	$\mathbf{f}(-1) = 6$,	$(-1, 6)$
$\mathbf{x} = 1$,	$\mathbf{f}(1) = \frac{2}{3}$,	$(1, \frac{2}{3})$
$\mathbf{x} = -2$,	$\mathbf{f}(-2) = 18$,	$(-2, 18)$
$\mathbf{x} = 2$,	$\mathbf{f}(2) = \frac{2}{9}$	$(2, \frac{2}{9})$



Al observar el primer ejemplo, en el cual **a** > 1, se podrá dar cuenta que el gráfico de la función es una curva que crece de izquierda a derecha, es decir, la función es creciente.

En el segundo ejemplo, en el cual **a** = $\frac{1}{3}$ $(0 < \mathbf{a} < 1)$ el gráfico es una curva que decrece de izquierda a derecha, ésto es, la función es decreciente.

Además para cualquiera de las dos funciones se cumple que el intercepto en **y** es **b** y la gráfica es una curva por encima del eje **x**.

☛ **RECUERDE QUE:**

1) La gráfica de una función exponencial ($\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\mathbf{a}^x$) es **creciente** si **a** > 1 y **decreciente** si 0 < **a** < 1.

2) El intercepto de la gráfica de la función exponencial con el eje **y**, es **b**.

3) El **rango** de la función exponencial corresponde a los reales positivos

Cuando la base de la función es el número **e**, y **k** es un real, la función corresponde a la **función exponencial natural** cuya forma es:

$\mathbf{f}\ (\mathbf{x}) = \mathbf{be}^{kx}$ (función creciente si **k** >0), o
$\mathbf{f}\ (\mathbf{x}) = \mathbf{be}^{kx}$ (función decreciente si **k** < 0)

Recordando que $\mathbf{a}^{x} = \mathbf{e}^{x\ln a}$, **toda** función exponencial corresponde a una función exponecial natural. Es decir, si $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathrm{ba}^{x}$ entonces $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\mathrm{e}^{mx}$ donde, **m** = **klna** (constante).

Función logarítmica

Una **función logarítmica** es una función de la forma $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \log_{a}\mathbf{x}$ donde, **a** > 0 y **a** ≠ 1, siendo su dominio los reales **positivos**.

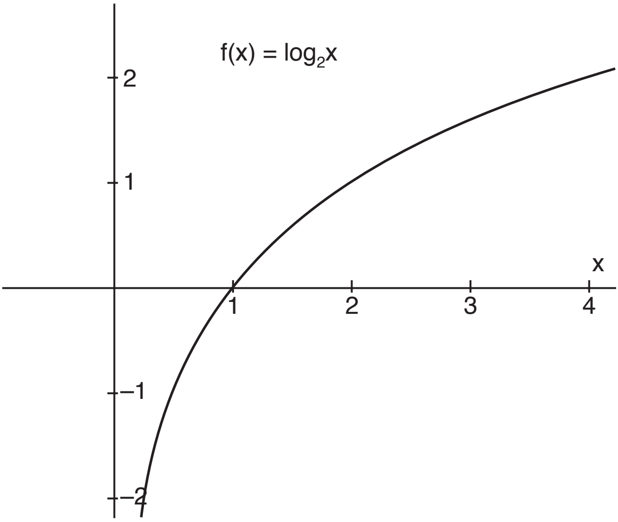
Esta función tiene un único cero que es 1(¿Por qué?).

Veamos el comportamiento de la gráfica de la función logarítmica a través de los siguientes ejemplos:

1) $\mathrm{f}(\mathbf{x}) = \log_{2}\mathbf{x}$

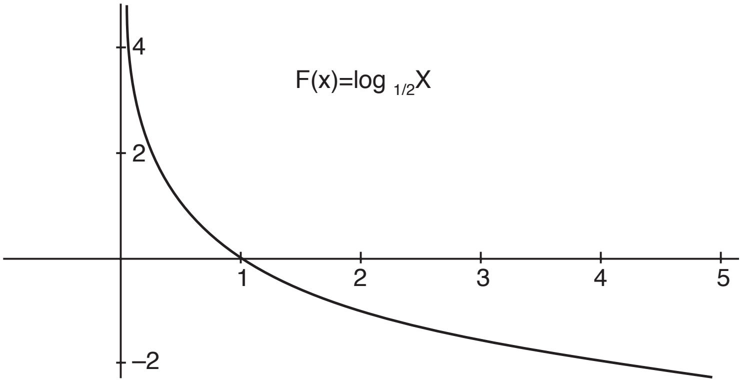
Consideremos algunos puntos de la gráfica de **f**, si:

$\mathbf{x} = 2$,	$\mathbf{y} = 1$	(2, 1)
$\mathbf{x} = 1$,	$\mathbf{y} = 0$	(1, 0)
$\mathbf{x} = \frac{1}{2}$,	$\mathbf{y} = -1$	$(\frac{1}{2}, -1)$
$\mathbf{x} = 4$,	$\mathbf{y} = 2$	(4, 2)
$\mathbf{x} = \frac{1}{4}$,	$\mathbf{y} = -2$	$(\frac{1}{4}, -2)$
$\mathbf{x} = \frac{1}{8}$,	$\mathbf{y} = -3$	$(\frac{1}{8}, -3)$
$\mathbf{x} = 8$,	$\mathbf{y} = 3$	(8, 3)



Graficar: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \log_{\frac{1}{2}} \mathbf{x}$

Si: $\mathbf{x} = 1$,	$\mathbf{y} = 0$	$(1, 0)$
$\mathbf{x} = \frac{1}{2}$,	$\mathbf{y} = 1$	$(\frac{1}{2}, 1)$
$\mathbf{x} = 2$,	$\mathbf{y} = -1$	$(2, -1)$
$\mathbf{x} = 4$,	$\mathbf{y} = -2$	$(4, -2)$
$\mathbf{x} = 8$,	$\mathbf{y} = -3$	$(8, -3)$
$\mathbf{x} = \sqrt{2}$,	$\mathbf{y} = -\frac{1}{2}$	$(\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$
$\mathbf{x} = \frac{1}{8}$,	$\mathbf{y} = 3$	$(\frac{1}{8}, 3)$



De acuerdo con la gráfica obtenida para cada una de las funciones de los ejemplos dados, se puede concluir:

Si **f**(**x**) = $\log_a$**x**,

1) La gráfica de **f** es **creciente** si a > 1
2) La gráfica de **f** es **decreciente** si 0 < a < 1
3) No tiene intersecto en **y**
4) El rango de **f** son los **números reales**

Nota: Si a = e, la función **f**(**x**) = $\log_a$**x** se llama función logarítmica natural. Se denota: **f**(**x**) = ln**x**
Si a = 10, la función **f**(**x**) = $\log_a$**x** se llama **función logaritmica decimal**. Se denota: **f**(**x**) = log**x**.

Ejemplos:

1) Se estima que el número de habitantes de un país **t** años después de 1980 está dado por **P**(**t**) = $10000000(1.02)^t$.

a) ¿Cuántos habitantes tenía el país en 1980?
b) ¿Cuánto habitantes tenía el país en 1989?
c) ¿Al cabo de cuántos años se duplicará el número de habitantes?

Solución:

a) Como 1980 es el año de referencia, entonces este se considera **t** = 0. Por lo tanto: **p**(0) = 10 000000 es decir, la población del país en 1980 era de 10 000000.

b) Si se desea obtener el número de habitantes en 1989, se deben considerar 9 años transcurridos a partir de 1980.

   Por lo tanto:

   $\mathbf{P}(9) = 10\ 000000(1.02)^9$; $\mathbf{P}(9) = 11950926$ habitantes
   Luego la población en 1989 fué de 11950926 habitantes

c) Queremos encontrar el valor de **t** para el cual

   $\mathbf{P}(\mathbf{t}) = 2\ 0000000$, es decir:

$$20\ 000000 = 10\ 000.000\ (1.02)^t$$
$$2 = (1.02)^{\ t}$$
$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{ln}2}{\mathbf{ln}1.02}$$
$$\mathbf{t} = 35.00279$$

O sea que se necesitan 35 años (aproximadamente) para que la población se *duplique*

2) El crecimiento de población de un tipo de bacteria se comporta según un modelo exponencial.

   Si en el momento en que se inicia el análisis hay 4 bacterias y al cabo de 6 segundos hay 4000.

   a) Encontrar la función que describe el número de bacterias al cabo de **t** segundos?
   b) Aproximadamente ¿cuántas bacterias hay después de 8 segundos?
   c) Si en un momento dado hay 18000 bacterias ¿cuánto tiempo ha transcurrido desde el momento incial?

Solución:

a) Como el crecimiento de las población de las bacterias es de tipo exponencial la función debe tener la forma:
$\mathbf{f}\ (\mathbf{t}) = \mathbf{be}^{mt}$

donde **t** es el tiempo (en segundos), **b** es el número de bacterias que hay al iniciar el análisis, es decir b = 4 y m es la tasa de crecimiento, (si **m** tiende a cero).

Luego: $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = 4\mathbf{e}^{\mathbf{mt}}$
Como al cabo de 6 segundos hay 4000 bacterias:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(6) &= 4000 \\ 4000 &= 4\mathbf{e}^{m(6)} \\ 6\mathbf{m} &= \mathbf{ln}\ 1000 \text{ (¿Por qué?)} \\ \mathbf{m} &= \frac{1}{2}\ \mathbf{ln}\ 10 \text{ (¿Por qué?)} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{f}\ (\mathbf{t}) = 4\mathbf{e}^{\left(\frac{1}{2}\ln 10\right)\mathbf{t}}$$

b) Como deseamos saber cuántas bacterias hay cuando **t** = 8:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(8) &= 4\mathbf{e}^{\left(\frac{1}{2}\ln 10\right)8} \\ \mathbf{f}(8) &= 4(10^4) \\ \mathbf{f}(8) &= 40000 \text{ bacterias} \end{aligned}$$

Al cabo de 8 segundos hay aproximadamente 40000 bacterias.

b) Pretendemos encontrar un valor de t tal que:

$\mathbf{f}$ (t) = 18000, es decir:

$$4\mathbf{e}^{\left(\frac{1}{2}\ln 10\right)\mathbf{t}} = 18000$$

$$\left(\frac{1}{2}\ \mathbf{ln}\ 10\right)\ \mathbf{t} = 4500$$

$$\mathbf{t} = \frac{2\,\mathbf{ln}\,4500}{\mathbf{ln}\,10}$$

$$\mathbf{t} = 7.306425028$$

$$\mathbf{t} \cong 7.31$$

NOTA: Cuando una población crece en forma exponencial se usa el modelo $\mathbf{P(t) = P_0 e^{kt}}$, donde $\mathbf{P_0}$ es la población inicial y **t** el tiempo transcurrido.

Si se desea hallar la tasa de crecimiento o decrecimiento **i** por unidad de tiempo, se puede calcular usando la igualdad

$$\mathbf{P_0 e^{kt} = P_0(1+i)^t}$$

Recuerde **i** representa la tasa de crecimiento o decrecimiento por unidad de tiempo.

❑ **EJERCICIO Nº 24**

FUNCIÓNES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

PRERREQUISITOS:

Identificar los modelos generales de las funciones: exponencial y logarítmica.
Identificar los parámetros de estas funciones (interpretarlos).
Saber resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Plantear y resolver los siguientes problemas:

1) La población de cierto país crece a un ritmo exponencial de acuerdo con la siguiente función: $\mathbf{P(t) = p\, e}^{0.012\,t}$ millones; en donde **t** representa el tiempo transcurrido en años a partir de 1980.

   Si en el año de 1980 la población era de 30 millones:

   a)¿Cuál será la población en el año 2005?
   b)¿En que año la población es de 35 millones?

2) Los registros de salud indican que **t** semanas después de un brote de cierta clase de resfriado, aproximadamente

   $\mathbf{Q(t)} = \dfrac{15}{1+20\mathbf{e}^{-1.3\mathbf{t}}}$ miles de personas habían contraído la enfermedad:

a) Inicialmente ¿cuántas personas adquirieron la enfermedad?
b) ¿Cuántas personas se habían enfermado al final de la tercera semana?
c) ¿Al cabo de cuántas semanas habrían enfermado 5000 personas?
d) Si la epidemia continúa ¿cuántas personas contraerán la enfermedad?

3) Cierta máquina se deprecia de tal forma que su valor después de **t** años viene dado por: $\mathbf{V}(\mathbf{t}) = 28000\mathbf{e}^{-0.03\,t}$ dólares.

a) ¿Cuál es el valor de dicha maquinaria después de 15 años?
b) ¿Cuál fue el valor original de la maquinaria?
c) ¿Al cabo de cuántos años el valor de la máquina es de 20000 dólares?

4) El producto nacional bruto (PNB) de cierto país era de $ 50000 millones en 1980 y de $ 120000 millones en 1990; suponiendo que el PNB crece exponencialmente a partir de 1980, según el modelo $\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{p}\,\mathbf{e}^{mt}$ milones de pesos ¿cuál fue el PNB en 1999?

5) Bajo ciertas condiciones la temperatura **T** (en grados Celsius) de un objeto que se enfría es $\mathbf{T} = 50\ (10^{-0.1\,t})$, donde t es el tiempo en minutos:

a) Trazar la gráfica T como una función de t.
b) ¿Después de cuántos minutos la temperatura es de 32°
c) ¿Después de 20 minutos qué temperatura tiene el objeto?

6) La población **P** de una comunidad indígena después de **t** años está dada por: $\mathbf{P}(\mathbf{t}) = 10000\ (4/5)^{t}$

a) ¿La población crece o decrece a través del tiempo?
b) ¿Cuál es la población inicial?
c) ¿Cuál es la población después de 1, 3,5, 6 años?
d) ¿Cuál es la tasa de crecimiento o decrecimiento anual?

Función polinómica

Una **función polinómica** es de la forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_n\mathbf{x}^n + \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{x}^{n-1} + ... + \mathbf{a}_2\mathbf{x}^2 + \mathbf{a}_1\mathbf{x}^1 + \mathbf{a}_0$$

donde $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ y $\mathbf{a}_i \in \mathbf{R}$ con $\mathbf{i} = 1, 2, 3, ..., \mathbf{n}$.

Es decir, una **función polinómica** es una función definida por un **polinomio**.

Por lo tanto su **dominio** son los **números reales** y a lo más la función tiene **n** ceros.

Si el grado de (**f**(**x**)) es cero la función es constante; si el grado es uno la función es lineal; y si el grado es dos la función es cuadrática.

Ejemplos:

1) Graficar la **función f**(**x**) = $-2\mathbf{x}^3 + 3\mathbf{x}^2 + 3\mathbf{x} - 2$

Como **f**(**x**) es una función polinómica, su dominio son los números reales. Para analizar el comportamiento de su gráfica, consideremos sus interceptos y algunos valores adicionales:

Intercepto con **y**: (0, –2)

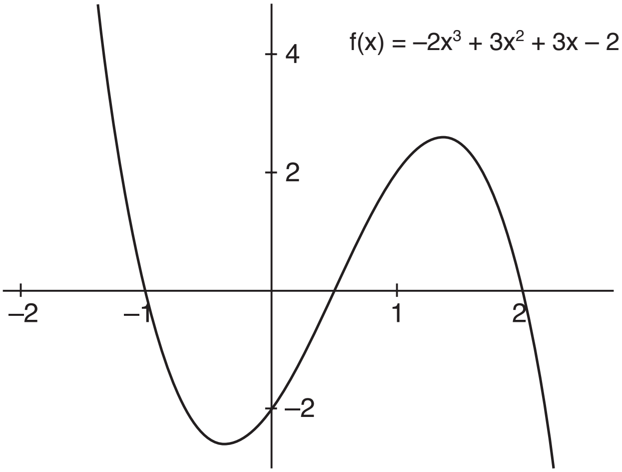
Interceptos con **x**: ($\frac{1}{2}$, 0) (2, 0), (–1, 0) (¿Por qué?)

Si:

$\mathbf{x} = -\frac{5}{4}$	$\mathbf{f}\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{91}{32}$	$\left(-\frac{5}{4}, \frac{91}{32}\right)$
$\mathbf{x} = -\frac{3}{2}$	$\mathbf{f}\left(-\frac{3}{2}\right) = 7$	$\left(-\frac{3}{2}, 7\right)$
$\mathbf{x} = -2$	$\mathbf{f}\,(-2) = 20$	$(-2,20)$

$\mathbf{x} = -\frac{1}{2}$	$\mathbf{f}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$
$\mathbf{x} = 1,$	$\mathbf{f}(1) = 2$	$(1, 2)$
$\mathbf{x} = \frac{1}{4}$	$\mathbf{f}\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{35}{32}$	$\left(\frac{1}{4}, -\frac{35}{32}\right)$
$\mathbf{x} = \frac{2}{3},$	$\mathbf{f}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2},$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$
$\mathbf{x} = 3$	$\mathbf{f}(3) = -20$	$(3, -20)$
$\mathbf{x} = \frac{5}{2},$	$\mathbf{f}\left(\frac{5}{2}\right) = -7$	$\left(\frac{5}{2}, -7\right)$

Representando en el plano cartesiano estos puntos, obtenemos el siguiente bosquejo de la gráfica de **f**(x):



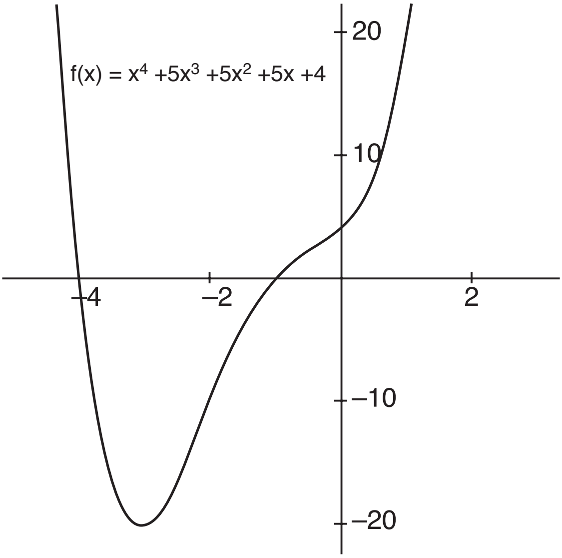
El **recorrido** de esta función son los números reales

2) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^4 + 5\mathbf{x}^3 + 5\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4$

Intercepto en **y** : (0, 4)
Intercepto en **x** : (–4, 0), (–1, 0) (Por qué?)

Consideremos además los siguientes puntos:

$\mathbf{x} = -\dfrac{9}{2},$	$\mathbf{f}\left(-\dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{595}{16} \cong 37$	$\left(-\dfrac{9}{2}, \dfrac{595}{16}\right)$
$\mathbf{x} = -\dfrac{17}{4},$	$\mathbf{f}\left(-\dfrac{17}{4}\right) = \dfrac{3965}{256} \cong 15,$	$\left(-\dfrac{17}{4}, \dfrac{3965}{256}\right)$
$\mathbf{x} = -\dfrac{7}{2},$	$\mathbf{f}\left(-\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{15}{16},$	$\left(-\dfrac{7}{2}, \dfrac{15}{16}\right)$
$\mathbf{x} = -3$	$\mathbf{f}(-3) = -20,$	$(-3, -20)$
$\mathbf{x} = -2$	$\mathbf{f}(-2) = -10$	$(-2, -10)$
$\mathbf{x} = -\dfrac{5}{4},$	$\mathbf{f}\left(-\dfrac{5}{4}\right) = -\dfrac{451}{256}$	$\left(-\dfrac{5}{4}, -\dfrac{451}{256}\right)$
$\mathbf{x} = -\dfrac{3}{2},$	$\mathbf{f}\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{65}{16}$	$\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{65}{16}\right)$
$\mathbf{x} = -\dfrac{1}{2}$	$\mathbf{f}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{35}{16}$	$\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{35}{16}\right)$
$\mathbf{x} = \dfrac{1}{2}$	$\mathbf{f}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{135}{16}$	$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{135}{16}\right)$
$\mathbf{x} = 1$	$\mathbf{f}(1) = 20$	$(1, 20)$



❑ TALLER No 12

1) Graficar las siguientes funciones y ESPECIFICAR su domino y rango:

a) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3^{\mathbf{x}}$

b) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(\frac{6}{5}\right)^{\mathbf{x}}$

c) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 5(1.4)^{\mathbf{x}}$

d) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0.2\left(\frac{7}{4}\right)^{\mathbf{x}}$

e) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{\mathbf{x}}$

f) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (0.8)^{\mathbf{x}}$

g) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 1200\left(\frac{1}{4}\right)^{\mathbf{x}}$

h) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{-\mathbf{x}}$

i) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \log_3 \mathbf{x}$

j) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3\left(\frac{2}{5}\right)^{\mathbf{x}+2}$

k) $\mathbf{f(x) = log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}}$

l) $\mathbf{f(x) = ln\,x}$

m) $\mathbf{f(x) = ln(1 - 2x)}$

n) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \log(\mathbf{x} - 2)$

o) $\mathbf{f(x) = ln(1-2x)}$ p) $\mathbf{f(x)} = \log_3 \mathbf{x}^2$

q) $\mathbf{f(x)} = 2000(2)^{\mathbf{x}}$ r) $\mathbf{f(x)} = \log_5 \frac{1}{5}$

s) $\mathbf{f(x)} = \mathbf{e}^{-\mathbf{x}} - 8$ t) $\mathbf{f(x)} = \log_2(-\mathbf{X})$

2) Encontrar, si existen, los ceros de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{f(x)} = \mathbf{e}$ b) $\mathbf{f(x) = ln\,x}^2$
c) $\mathbf{f(x)} = 2^{\mathbf{x}} - 3$ d) $\mathbf{f(x)} = \mathbf{x}^3 + 4\mathbf{x} - 25\mathbf{x} - 28$
e) $\mathbf{f(x)} = 3^{\mathbf{x}} + 3^{-\mathbf{x}}$ f) $\mathbf{f(x)} = 6\mathbf{x}^3 - 35\mathbf{x}^2 + 19\mathbf{x} + 30$
g) $\mathbf{f(x)} = (1+2\mathbf{x})\mathbf{e}^2$ h) $\mathbf{f(x)} = (\mathbf{x}^2 - 7\mathbf{x} + 12)\mathbf{e}^{-3\mathbf{x}}$

3) Una empresa de transistores sabe que el número de los producidos en un determinado año y que todavía siguen funcionando después de x años de uso está dado por

$$\mathbf{f(x)} = \mathbf{be}^{-0.095x}$$

a) Si en un determinado año se producen 10000, ¿cuántos de ellos seguirán funcionando después de 1 año? ¿2 años? 3 años 4 meses?
b) ¿Qué porcentaje de los transistores se dañan entre 1 y 3 años de uso?
c) Si de un lote de producción se espera que el número de transistores que alcance los dos años de uso sea de 25000, ¿cuántos transistores deben producirse?
d) ¿Al cabo de cuánto tiempo solo funcionan las $\frac{2}{3}$ partes de los producidos si la producción inicial es de 20000 transistores?
e) ¿Cuántos transistores (aproximadamente) se necesitan producir para que después de 5 años de uso hayan salido de uso 4000?

4) La cantidad de dinero que hay en depósito al invertir en un Banco después de **t** días de la inversión inicial puede ser descrita mediante una función exponencial. Si se invierte inicialmente $ 100000 y después de 1 mes de la inversión inicial hay un depósito $ 103200.

a) Determinar el modelo exponencial que describe la situación planteada.
b) ¿Cuánto dinero habrá en saldo después de 3 meses de la inversión inicial?
c) ¿Cuánto tiempo se necesita para que haya en saldo una cantidad superior al 70% de la inversión inicial?
d) ¿En qué porcentaje ha aumentado el saldo del sexto mes respecto al saldo del cuarto mes?
e) ¿Qué porcentaje de la inversión inicial representa el saldo obtenido al final de un año?

5) Las ventas mensuales (en millones de pesos) están relacionadas con la inversión mensual (en millones de pesos) en publicidad, según la función: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 400 - 370\,\mathbf{e}^{-0.125x}$.

a) ¿Cuáles son las ventas mínimas que la compañía espera obtener?
b) ¿A cuánto asciende las ventas mensuales si en cierto mes se invierte $20 000000 en publicidad?
c) Graficar la función **f**(**x**)
d) De acuerdo con la gráfica, ¿cuáles son las ventas máximas a que puede aspirar la empresa?

Ejercicio complementario

Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Explicar el por qué de la determinación.

1) La función $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4}{\mathbf{x} + 4}$, es lineal.
2) Para toda función **f**(**x**) existe al menos un cero.
3) La gráfica de toda función **f**(**x**) intersecta al eje y.
4) La suma de dos funciones lineales es siempre una función lineal.
5) El producto de dos funciones lineales es siempre una función lineal.

6) La suma de dos funciones cuadráticas es siempre una función cuadrática.

7) La gráfica de $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}^2 + b\mathbf{x} + \mathbf{c}$ siendo $a > 0$, es creciente en el intervalo

$$\left[-\frac{\mathbf{b}}{2\mathbf{a}};\rightarrow\right)$$

8) La gráfica de $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}^2 + b\mathbf{x} + \mathbf{c}$ con $a < 0$ es decreciente en

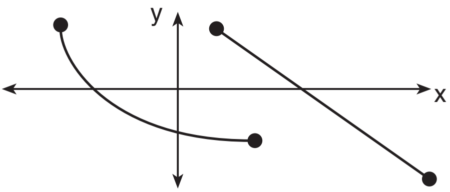
$$\left(\leftarrow:-\frac{\mathbf{b}}{2\mathbf{a}}\right]$$

9) El dominio de la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \log_a \mathbf{g}(\mathbf{x})$ son los reales positivos.

10) Sean **f** y **g** funciones con dominio los números reales.

Si $h(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{g}(\mathbf{x})}$, su dominio son los números reales.

11) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3\mathbf{e}^{\frac{1}{2}\mathbf{x}\,\mathbf{ln}\,10}$ es equivalente a la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3(10)^{1/2\mathbf{x}}$
12) Toda ecuación lineal es una función lineal.
13) Para toda función lineal su rango son los números reales.
14) Si $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 1$ entonces $(\mathbf{g} \text{ o } \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^4 + 2\mathbf{x}^2 + 1$
15) Si $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}} + 1$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{ln}\ \mathbf{x}$ entonces $(\mathbf{g} \text{ o } \mathbf{f})(0) = 1$
16) Si una función tiene dos ceros entonces la función es cuadrática.
18) No existe una función **f** tal que D **f** = (0; →) y R (**f**) = (←; 0)
19) La siguiente curva corresponde a la gráfica de una función:



20) La función $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^a$ con $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$, es una función exponencial.
21) La función $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \log_a \mathbf{b}^{\mathbf{x}}$ con $a, b > 0$ y $a \neq 1$, es una función logarítmica.

Función compuesta

DEFINICION

Sean **f** y **g** funciones, si **x** es un elemento del dominio de **g** tal que **g**(**x**) está en el dominio de **f**, la función **f** compuesta **g**, notada **f o g**, se define asi:

(**f** o **g**)(**x**) **= f** [**g**(**x**)]. Rango de **g** contenido o igual al dominio de **f**.

❑ **EJERCICIO Nº 25**

1) Dadas las funciones:
$f(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}^3 - 2$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}+1}$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \log_3(-x+2)$, $t(\mathbf{x}) = e^{3\mathbf{x}}$

Determinar las siguientes funciones y su dominio respectivo:

a) f o g b) f o t c) h o g

d) t o f e) h o f f) t o h

2) Con base en las anteriores funciones, hallar si es posible:

a) $\dfrac{(\mathbf{f\,o\,t})(-2) - (\mathbf{h\,o\,g})(0)}{(\mathbf{f\,o\,g})(-1/2) - 3}$ b) $[(g \text{ o } t)(-2)]^2 - \dfrac{1}{\mathbf{h}(0.3)}$

3) Dada la función compuesta, determinar en cada caso las funciones **f** y **g**.

a) $(f \text{ o } g)(\mathbf{x}) = \dfrac{2}{(\mathbf{x}+2)^2}$ b) $(f \text{ o } g)(\mathbf{x}) = \sqrt[3]{3\mathbf{x}-10}$

c) $(f \text{ o } g)(\mathbf{x}) = \log(\mathbf{x}^3+5)$ d) $(f \text{ o } g)(\mathbf{x}) = e^{7\mathbf{x}-1}$

e) $(f \text{ o } g)(\mathbf{x}) = (2\mathbf{x}^5 - 1)^3$ f) $(f \text{ o } g)(\mathbf{x}) = \dfrac{-1}{\sqrt[5]{\mathbf{x}}}$

g) $(f \text{ o } g)(\mathbf{x}) = (\mathbf{e}^{\mathbf{x}+2} - 1)^5$ h) $(f \text{ o } g)(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x}^5 - 20}{3}$

Razón de cambio promedio

Sea **f**(**x**) = **y** una función continua con **a**, **b**, elementos diferentes del dominio, la razón de cambio promedio en el intervalo [**a**, b] se define como la variación promedio que experimenta la variable dependiente respecto de la variación por unidad de la variable independiente.

Ejemplo 1

El comportamiento de la población de cierta ciudad, se rige por medio de la función **P**(**t**) = 10000 + 500**t** - 60**t**^{2}; donde **t** es el tiempo transcurrido en años a partir de 1972.
¿Cuál es la variación de la población entre 1979 y 1989?
¿Cuál es la razón de cambio promedio por año de la población, entre los años 1979 y 1989?
Cuál es la razón de cambio promedio por año de la población, entre los años 1975 y 1985?

Solución:

Definición de variables:
P(**t**) = Población después de **t** años.
t = Tiempo transcurrido en años a partir de 1972.
Δ**p** = Variación de la población.
Δ**t** = Variación del tiempo.

a) Para determinar la variación de la población entre 1979 y 1989, es necesario hallar la población en 1979 y 1989, es decir:

P(17) = $10000 + 500(17) - 60(17)^2 = 1160$
P(7) = $10000 + 500 (7) - 60(7)^2 = 10560$, luego:

Δ**p** = **P**(17) – **P** (7) = 1160 – 10560 = – 9400

$\Delta \mathbf{p} = -9400$, valor que significa que la población entre 1979 y 1989 disminuyó en 9400 habitantes.

b) La razón de cambio promedio por año entre 1979 y 1989 es equivalente a: $\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{-9400}{10} = -940$, lo cual indica que la población se disminuye en promedio 940 personas por año, entre 1979 y 1989.

c) Razón de cambio promedio de la población entre 1975 y 1985:

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{\mathbf{P}(13) - \mathbf{P}(3)}{13 - 3} \quad \text{(¿Por qué?)}$$

$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{6360 - 10960}{10} = -460$, valor que significa que la población se disminuye en promedio 460 personas por año, entre 1975 y 1985.

Nota: Observe que tanto en el literal b) como en el c) se pide la razón de cambio promedio en un intervalo de 10 años, pero la respuesta es diferente puesto que los años son diferentes.

Ejemplo 2

Un productor agrícola determina que el costo por semana de producir **x** bultos de trigo está dado por C(**x**) = 80 + 1.5**x** miles de pesos y el ingreso por la venta de **x** bultos está dado por I(**x**) = 10x - 0.1$\mathbf{x}^2$ miles de pesos. Si actualmente produce y vende 30 bultos de trigo semanales pero está considerando incrementar la producción y venta a 60 bultos semanales, calcular la variación en la utilidad y determinar la utilidad promedio por cada bulto extra producido y vendido.

Solución:

Sean: Δx = Variación en la cantidad de bultos producidos y vendidos
Δu = Variación en la utilidad
U(x) = Utilidad de producir y vender x bultos de trigo (en miles)
x = cantidad de bultos de trigo producidos y vendidos

A continuación se definirá la función de utilidad:

$$\mathbf{U(x) = I(x) - C(x)}$$
$$\mathbf{U(x) = (10x - 0.1x^2) - (80 + 1.5x)}$$
$$\mathbf{U(x) = -0.1x^2 + 8.5x - 80}$$

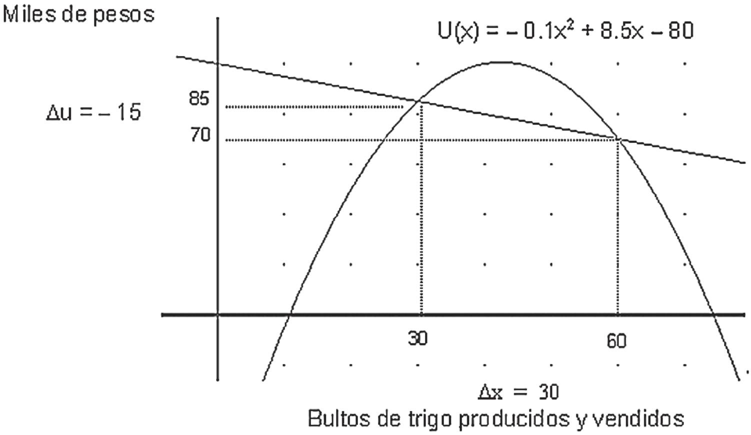
Cuál es la variación en la utilidad?

$\Delta u = U(60) - U(30)$
$\Delta u = 70 - 85$
$\Delta u = -15$ Lo cual significa que cuando la producción y venta semanal pasa de 30 a 60 bultos, la utilidad total disminuye en \$15000.

Cuál es la utilidad promedio por bulto extra producido y vendido?

$$\frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{U}(60) - \mathbf{U}(30)}{60 - 30} = \frac{-15}{30} = -0.5$$

Este valor significa que cuando la producción y venta semanal pasa de 30 a 60 bultos de trigo, en promedio por cada bulto extra se pierde \$500. Observe la gráfica.



Observación: La tasa o razón de cambio promedio de una función f en un intervalo cerrado [**c**, **c** + Δ**c**], contenido en el dominio de la función, es también equivalente a la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos (**c**, **f**(**c**)) y (**c** + Δ**c**, **f**(**c** + Δ**c**)) (ver la anterior gráfica)

❑ EJERCICIO Nº 26

1) Determinar la razón promedio de cambio de **f**(**x**) si:

   a) $f(x) = x^2 + 3x$ y **x** cambia de 4 a 10.

   b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ y **x** cambia de 3 a 8.

   c) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 1}$ y **x** cambia de **a**, a, **a** + 1

2) Calcular la tasa de cambio promedio de cada función en el intervalo dado:

   a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$; $x = 3$, $\Delta x = 0.2$
   b) $f(t) = \sqrt{4 + t}$; $t = 5$, $\Delta t = 1.24$

3) La población de cierto centro universitario al tiempo **t** (en años), está medida por: $P(t) = 0.001t^2 + 0.02t$, con **P** (en miles de estudiantes).

Hallar e interpretar la tasa de crecimiento promedio en el intervalo de **t** = 0 a **t** =15.

4) La función de costo total de producir **x** unidades en cierta empresa está dada por:

   $C(X) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 2000$ pesos

a) Determinar el costo promedio por unidad en el intervalo de producción [20, 35]

b) Interpretar $\mathbf{C}(35) - \mathbf{C}(20)$.

c) Hallar e interpretar $\overline{\mathbf{C}(35)}$

5) El costo **C** (en millones de pesos) de producir **x** cantidad de artículos está dado por: $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 0.001\mathbf{x}^2 - 0.03\mathbf{x} + 1$

a) Hallar la tasa promedio de cambio del costo cuando se producen de 20 a 30 unidades.

b) ¿El incremento en el costo cuando la producción se incrementa de 20 a 30 unidades es el mismo que cuando la producción se incrementa de 15 a 25 unidades? Explicar.

6) La función de costos al producir **x** unidades de un artículo es $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 50\mathbf{x} + 300$.

a) ¿Cuál es el incremento en el costo cuando se aumenta la producción de 25 unidades a 30? Justificar.

b) Determinar la razón de cambio promedio de los costos cuando se aumenta la producción de 25 a 35 unidades. Interpretar la respuesta.

7) La cantidad de estudiantes que ingresa a la universidad en cierto pais, después de 1975, se rige por la función:

$$\mathbf{E}(\mathbf{t}) = \frac{20000}{1 + 6(2)^{-0.1\mathbf{t}}} \, ,$$

donde **t** es el número de años transcurridos a partir de 1975.

a) ¿Cuál es el cambio de la población estudiantil entre 1979 y 1986?

b) ¿Cuál es el crecimiento promedio de la población universitaria entre 1976 y 1986?

8) Los ingresos diarios totales I (en pesos), obtenidos por la producción y venta de **x** sacos de lana de la fábrica «Safiro» están dados por: $\mathrm{I}(\mathbf{x}) = 7500\mathbf{x} - 30\mathbf{x}^2$.

a) Determinar el incremento en el ingreso cuando la producción pasa de 35 a 42 sacos diarios.
b) Calcule el promedio diario de ingresos cuando el número de sacos vendidos se incrementa de 40 a 50.

9) La demanda de **x** balones de la fábrica "Scorpio–W" se relaciona con el precio P mediante la regla de asignación $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = -150\mathbf{x} + 30000$. Los costos de producción se comportan según el modelo $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 10000\mathbf{x} - 10000$. Determinar:

a) El incremento en la utilidad cuando la producción pasa de 40 a 55 balones.
b) El costo promedio por balón cuando la producción pasa de 40 a 55 balones.

10) La demanda de **x** artículos a un precio **p** está dada por

$$\mathbf{x} = \frac{4200}{\sqrt{10\mathbf{p}} + 20}$$

a) Determinar el incremento en el ingreso cuando el precio del artículo se incrementa de 40 a 90 pesos.
b) Calcular la variación en la demanda cuando el precio sube de 10 a 40 pesos.

11) La demanda de maletines **x,** de la fábrica «Cuero Eficiente», se relaciona con el precio **P**, mediante la regla $\mathbf{P}\ (\mathbf{x}) = -100\mathbf{x} + 20000$. Los costos totales de producción se comportan según el modelo $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 10000\mathbf{x} - 1000$. Determinar:

a) El incremento de la utilidad cuando la producción pasa de 20 a 50 maletines.
b) El costo promedio por maletín cuando la producción pasa de 20 a 50 maletines.

Derivada

CONCEPTOS PRELIMINARES

RAZÓN DE CAMBIO INSTANTANEA

Retomemos, el ejemplo 1 antes mencionado para analizar la razón de cambio instantánea.

El comportamiento de la población de cierta ciudad, se rige por medio de la función $\mathbf{P}(t) = 10000 + 500\mathbf{t} - 60\mathbf{t}^2$, donde **t** es el tiempo transcurrido en años a partir de 1972, ¿cuál es la tasa de cambio instantánea de la población en 1979?

Solución:

Como se debe hallar la tasa de cambio instantánea en $\mathbf{t} = 7$, consideremos incrementos pequeños en el tiempo (es decir $\Delta\mathbf{t}$ tiende a cero) para calcular la razón de cambio promedio en cada caso:

a) Si $\Delta\mathbf{t} = 0.5$,

$$\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{P}(7.5) - \mathbf{P}(7)}{7.5 - 7} = \frac{10375 - 10560}{0.5} = -370$$

b) Si $\Delta\mathbf{t} = 0.2$,

$$\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{P}(7.2) - \mathbf{P}(7)}{0.2} = \frac{10489.6 - 10560}{0.2} = -352$$

c) Si $\Delta\mathbf{t} = 0.1$,

$$\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{P}(7.1) - \mathbf{P}(7)}{0.1} = \frac{10525.4 - 10560}{0.1} = -346$$

d) Si $\Delta\mathbf{t} = 0.0001$,

$$\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{P}(7.0001) - \mathbf{P}(7)}{0.0001} = \frac{10569.96 - 10560}{0.0001} = -340$$

e) Si $\Delta \mathbf{t} = 0.000001$,

$$\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{\mathbf{P}(7.000001) - \mathbf{P}(7)}{0.0001} = \frac{10559.99 - 10560}{0.000001} = -340$$

Cuanto menor sea la longitud del intervalo de tiempo considerado ($\Delta \mathbf{t}$ tiende a cero), nos aproximamos más a la "verdadera" razón de cambio en el instante $\mathbf{t} = 7$.

Por tanto, la tasa de cambio de la población en el instante $\mathbf{t} = 7$, es justamente –340, lo cual significa que: la población en 1979, decreció a un ritmo de 340 personas por año.

Definición: La razón instantánea de cambio en un punto **x = c** del dominio de una función **f**, se nota $\left.\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}\right|_{\mathbf{x=c}}$ (se lee de efe de **x**)o $\mathbf{f}^{|}\mathbf{(c)}$ (se lee efe prima de c), y está dada por:

$$\left.\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}\right|_{\mathbf{x=c}} = \lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{c}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{c})}{\mathbf{h}}$$

A la razón instantánea de cambio en el punto **c**, también se le llama **derivada de la función en el punto c**. Es decir, se puede establecer la siguiente equivalencia.

Razón instantánea de cambio en el punto **c**	⇔	Derivada de **f** en el punto **c**

Propiedades de la derivada de una función

Como el planteamiento descrito para hallar la derivada de una función en cualquier punto de su dominio, siempre y cuando exista, resulta un tanto complejo para algunas funciones, a continuación indicaremos propiedades que facilitan este cálculo teniendo en cuenta su forma algebráica.

1) Si $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \in \mathbf{R}$ (función constante), entonces $\mathbf{f}^{|}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_f$

2) Si $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{n}$, $n \in \mathbf{R}$, entonces $\mathbf{f}^{|}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}\mathbf{x}^{n-1}$

3) Si $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{x}$ entonces $\mathbf{f}^{|}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{x}$

4) Si $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ln \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{f}^{|}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}}$

5) Sean $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ funciones derivables y $\mathbf{k} \in \mathbf{R}$.

   a) Si $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}\,(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ entonces $\mathbf{h}^{|}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{f}^{|}(\mathbf{x}))$

   b) Si $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$ entonces $\mathbf{h}^{|}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{|}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}^{|}(\mathbf{x})$

   c) Si $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathbf{g}(\mathbf{x})$ entonces $\mathbf{h}^{|}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{|}(\mathbf{x})\,\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}^{|}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$

   d) Si $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{g}(\mathbf{x})}$ con $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0$, entonces

   $$\mathbf{h}^{|}(\mathbf{x}) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^{2}}$$

Ejemplos

1) Para $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{3} + \frac{3}{2}$, calcular su derivada

   Como $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es una función suma:

   $$\begin{aligned} \mathbf{f}^{|}(\mathbf{x}) &= \left(\mathbf{x}^{3} + \frac{3}{2}\right)^{|} \\ &= (\mathbf{x}^{3})^{|} + \left(\frac{3}{2}\right)^{|} \\ &= 3\mathbf{x}^{2} + 0, \text{ luego} \end{aligned}$$

   $\mathbf{f}^{|}(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}^{2}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_f$

2) Para $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}} + 3\mathbf{x}^5 + \dfrac{3}{\mathbf{x}^2} - 1$, identificar los puntos de su dominio en los cuales no es derivable.

La función se puede expresar por: $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{1/2} + 3\mathbf{x}^5 + 3\mathbf{x}^{-2} - 1$, y está definida para todo $\mathbf{x} \in (0; \infty)$:

Como $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ es una función suma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^{I}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x}^{1/2} + 3\mathbf{x}^5 + 3\mathbf{x}^{-2} - 1)^{I} \\
&= (\mathbf{x}^{1/2})^{I} + (3\mathbf{x}^5)^{I} + (3\mathbf{x}^{-2})^{I} + (-1)^{I} \\
&= (\mathbf{x}^{1/2})^{I} + 3(\mathbf{x}^5)^{I} + 3(\mathbf{x}^{-2})^{I} + (-1)^{I} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{x}^{-\frac{1}{2}} + 3(5\mathbf{x}^4) + 3(-2\mathbf{x}^{-3}) + 0
\end{aligned}$$

$\mathbf{g}^{I}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}} + 15\mathbf{x}^4 - \dfrac{6}{\mathbf{x}^3}$, función que está definido para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_g$. Es decir, no hay puntos del dominio de **g** en los cuales no es derivable.

3) Calcular la variación instantánea de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ con respecto a $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x} = 2$ si,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^2 + 2}{3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 2}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^2 + 2}{3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 2}, \qquad \mathbf{D}_f = \mathbf{R} - \left\{-1, -\frac{2}{3}\right\}$$

$$f^{/}\ (x) = \left(\frac{x^2+2}{3x^2+5x+2}\right)^{/}$$

$$= \frac{(x^2+2)^{/}(3x^2+5x+2)-(x^2+2)(3x^2+5x+2)^{/}}{(3x^2+5x+2)^2}$$

$$= \frac{2x(3x^2+5x+2)-(x^2+2)(6x+5)}{(3x^2+5x+2)^2}$$

$$= \frac{6x^3+10x^2+4x-6x^3-5x^2-12x-10}{(3x^2+5x+2)^2}$$

$$f^{/}(x) = \frac{5x^2-8x-10}{(3x^2+5x+2)^2}$$

$$f^{/}(2) = \frac{5(2)^2-8(2)-10}{(3(2)^2+5(2)+2)^2}$$

$$= \frac{20-16-10}{(12+10+2)^2}$$

$$= \frac{-6}{(24)^2}$$

$$= \frac{-6}{24(24)}$$

$$= \frac{-1}{4(24)}$$

$$= -\frac{1}{96}$$

Luego $-\frac{1}{96}$ es la variación instantánea de $f(x) = \frac{x^2+2}{3x^2+5x+2}$ respecto de x en $x = 2$

4) Para $f(x) = x \ln x$, encontrar $f^{|}(x)$.
Como $f(x)$ es una función producto :
$f^{|}(x) = (x \ln x)^{|}$

$= (x)^{|} \ln x + x(\ln x)^{|}$

$= 1\cdot \ln x + x.\ \frac{1}{x}$

$= \ln x + 1$

❑ EJERCICIO Nº 27

1) Derivar cada una de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 12$

b) $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^3 - 2\mathbf{x}$

c) $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 7\mathbf{x}^2$

d) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}^3 - 2\mathbf{x} + 3$

e) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt[3]{\mathbf{x}}$

f) $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}^{5} + 2 - \frac{1}{\mathbf{x}^2}$

g) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \dfrac{\frac{1}{2}\mathbf{x}^4 - \mathbf{x}}{\mathbf{x}^2}$

h) $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{2}{7}\mathbf{x}^2 + \frac{6}{\mathbf{x}^3} + \sqrt[3]{\mathbf{x}}$

i) $h(\mathbf{x}) = 5e^{\mathbf{x}}\log\mathbf{x}$

j) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \dfrac{3\mathbf{e} + \mathbf{x}^2}{\sqrt[3]{\mathbf{x}}}$

k) $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = 0.02\mathbf{r}^2 + \frac{1}{\mathbf{r}} + \frac{3}{\mathbf{r}^3}$

l) $\mathbf{f}\ (\mathbf{x}) = 0.03e^{\mathbf{x}}\mathbf{x}^3 - \dfrac{3\ln\mathbf{x}}{2\mathbf{x}}$

2) Derivar cada una de las siguientes funciones y simplificar si es posible. Indicar el (los) punto (s) de su dominio en que no es derivable.

a) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}^5$

b) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}}$

c) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 4\mathbf{x} - \frac{5}{\mathbf{x}^3}$

d) $\mathbf{y} = 7$

e) $\mathbf{y} = 4e^{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^{-3} - 3\sqrt[3]{\mathbf{x}}$

f) $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}}}{\ln\mathbf{x}}$

g) $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{x}^2 + 3\mathbf{x} + 4}{\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x} + 5}$

h) $\mathbf{y} = 5\mathbf{x}^{-4}(e^{\mathbf{x}} + 3\mathbf{x})$

i) $\mathbf{y} = 6\mathbf{x}^2\ (\mathbf{x}^3 + e^2)$

j) $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}} + \mathbf{ln}\,\mathbf{x}}{3\mathbf{x}^2 + \mathbf{ln}3}$

k) $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{x}}{\ln\mathbf{x}} - \dfrac{\ln\mathbf{x}}{\mathbf{x}}$

l) $\mathbf{y} = n\ \mathbf{x}^{n+1}$

m) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ln\left(\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{m}}\right)^{\mathbf{n}}$

n) $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \ln\sqrt{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}$

o) $\mathbf{y} = \frac{5}{\mathbf{x}} + \frac{6}{\mathbf{x}^2} + \frac{7}{\mathbf{x}^3}$

p) $\mathbf{y} = \log_5\mathbf{x} + \log_2\mathbf{x}^3 + \log_4 16$

q) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}} - 5\mathbf{x}^3 + 8\mathbf{x}}{\sqrt[3]{\mathbf{x}}}$ r) $\mathbf{y} = 5\mathbf{x}^4 - 3 \ \log 7$

Regla de la cadena

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{g} \text{ o } \mathbf{h})(\mathbf{x})$, siendo **h** y **g** funciones derivables. Entonces:

$$\mathbf{f}^{\mathrm{I}}(\mathbf{x}) = g^{\mathrm{I}}(h(\mathbf{x}))\cdot h^{\mathrm{I}}(\mathbf{x})$$

En particular:

Si $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = e^{g(\mathbf{x})}$, $\mathbf{f}^{\mathrm{I}}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{g(\mathbf{x})}\cdot g^{\mathrm{I}}(\mathbf{x})$

Si $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ln(g(\mathbf{x}))$, $\mathbf{f}^{\mathrm{I}}(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{g}^{\mathrm{I}}(\mathbf{x})}{\mathbf{g}(\mathbf{x})}$

Si $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}(\mathbf{x})]^{\mathbf{n}}$, $\mathbf{f}^{\mathrm{I}}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}[\mathbf{g}(\mathbf{x})]^{\mathbf{n}-1}\mathbf{g}^{\mathrm{I}}(x)$

Ejemplos:

1) Sea $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4}$ función compuesta de las funciones $g(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}}$ y $h(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4$, luego:

$$f^{\mathrm{I}}(\mathbf{x}) = ((3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4)^{1/2})^{\mathrm{I}}$$

$$f^{\mathrm{I}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4)^{-\frac{1}{2}}(3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4)^{\mathrm{I}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4}}\cdot(6\mathbf{x} + 5)$$

$$= \frac{6\mathbf{x} + 5}{2\sqrt{3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4}}$$

2) $f(x) = e^{x^2+3x} \ln (3x^2+1)$, es una función producto de funciones compuestas. Así que:

$$f'(x) = (e^{x^2+3x} \cdot (\ln (3x^2+1))'$$

$$= (e^{x^2+3x})' \cdot \ln (3x^2+1) + (e^{x^2+3x}) (\ln(3x^2+1))'$$

$$= e^{x^2+3x} . (x^2+3x)' \ln (3x^2+1) + e^{x^2+3x} \frac{1}{3x^2+1}(3x^2+1)'$$

$$= e^{x^2+3x} (2x+3) \ln(3x^2+1) + e^{x^2+3x} \frac{6x}{3x^2+1}$$

$$= e^{x^2+3x} \left((2x+3)\ln(3x^2+1) + \frac{6x}{3x^2+1}\right)$$

❑ EJERCICIO Nº 28

1) Derivar las siguientes funciones y dar el resultado simplificado

a) $f(x) = x^2 \ln (x^2+2x)$

b) $y = \dfrac{5x^3}{\sqrt[3]{e^{-x}+1}}$

c) $y = (\log_3 (x^2+5))^{10}$

d) $y = 17\sqrt{5x^2-3}$

e) $f(x) = \sqrt{3}$

f) $g(x) = (2x^2+3x+1)^5 (8x^4+3x+1)^5$

g) $y = 5x^2e^{0.3x}$

h) $f(x) = \ln \left(\dfrac{7x-2}{\sqrt{x+1}}\right)$

i) $y = \ln e^x$

j) $y = 8^{2x}$

k) $f(x) = \dfrac{2x^3}{7x+10}$

l) $f(x) = \sqrt{8x^3+5x^2-2} + 20x$

m) $f(x) = 3e^{0.2x}\ln(7x-1)$

n) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{4x^5+7x} - 1}{\ln x^2}$

o) $f(x) = \dfrac{3x^4-5x}{2x^3}$

p) $f(x) = -\dfrac{5}{6}(x+2)x^3$

q) $f(x) = x^5 - \dfrac{2}{7}x^2 + 9$

r) $f(x) = -8x^{2/3}$

s) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \dfrac{4}{\mathbf{x}^3 - 1} - 3\mathbf{x} + 7$ t) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 7\mathbf{x}^5(\mathbf{x}^3 + 120)$

u) $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \dfrac{3\mathbf{z}^3 + \mathbf{e}^{5\mathbf{z}+2}}{\mathbf{z}^3 - 1}$ v) $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = 5\mathbf{e} - \dfrac{1}{2\mathbf{a} + \mathbf{b}} + 2\ln(\mathbf{a}^2 + \mathbf{a})$

2) Sean $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 5$ y $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sqrt{3\mathbf{x} - 2}$, calcular la derivada de la función $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, siendo $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (fog)(\mathbf{x})$.

3) Sean $\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \sqrt{\mathbf{X} - 1}$ y $g(\mathbf{X}) = 2\mathbf{x} + 3$:

a) Hallar el dominio de $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$
b) Hallar $(\mathbf{g} \text{ o } \mathbf{f})^{|}(5/4)$

4) Sean: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -3\mathbf{x} + 1$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - \mathbf{x}^2}}$, $h(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{x}+1}$

Determinar (si es posible):

a) $\mathbf{f}\,(\mathbf{h}^{|}(2))$
b) La derivada de la función $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$

5) Dadas las funciones: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \dfrac{2}{\mathbf{x} - 3}$ y $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - 1$.

a) Determinar la derivada de la función **f** o **g**.
b) ¿Es 2 un elemento del dominio de **f** o **g**? Explicar la respuesta.
c) Determinar los valores de **x** para los cuales $(\mathbf{f} \text{ o } \mathbf{g})^{|}(\mathbf{x}) = 1$.

6) Una epidemia se extiende a una población. Después de **t** meses el número de personas **P** infectadas se comporta según el modelo

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = 180\left(\mathbf{t}^{4/3} + \mathbf{t}^3\right)$$

Determinar la tasa de crecimiento de la epidemia al comienzo del séptimo mes.

7) Desde 1980 la pobación **P** (en miles de habitantes) de cierta ciudad decrece según el modelo $\mathbf{P}(\mathbf{t}) = 500\,\mathbf{e}^{-0.002\,\mathbf{t}}$ con **t** tiempo en años. Determinar:

a) A qué ritmo descendía la población en 1990.
b) La variación promedio de la población por año entre 1994 y 1998.

8) Se calcula que dentro de **m** meses la población **P** de cierta ciudad será:

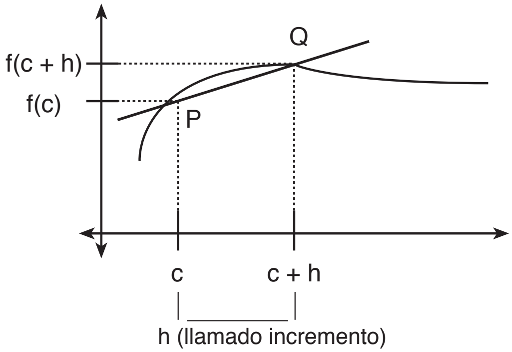
$\mathbf{P}(\mathbf{m}) = 3\mathbf{m} + 5\mathbf{m}^{3/2} + 6000$. ¿En qué instante la población está creciendo a un ritmo de 18 personas por mes?

9) Después de **x** semanas, la cantidad de personas que utilizan un nuevo sistema de tránsito rápido era aproximadamente $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = 6\mathbf{x}^3 + 500\mathbf{x} + 8000$.

a) ¿A qué tasa con respecto al tiempo, cambió el uso del sistema entre la cuarta y la sexta semana?
b) ¿A qué tasa cambio el uso del sistema en la quinta semana?

Recta tangente a una curva

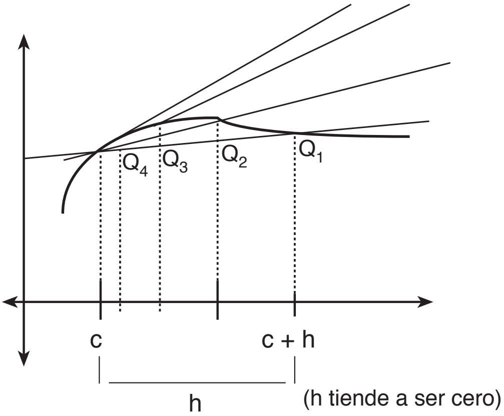
Sean **c**, **c + h** elementos del dominio de una función **f**, es decir: (**c**, **f**(**c**)) y (**c** + **h**, **f**(**c** + **h**)) son puntos de la gráfica de la función **f**. Llamemos estos puntos **P** y **Q** respectivamente. Por estos dos puntos se puede trazar sólo una recta, llamada **secante de f** (ver gráfica).



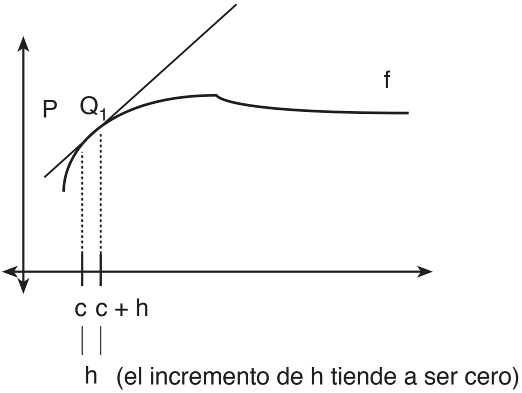
La recta secante mencionada tiene pendiente:

$$\mathbf{m} = \frac{\Delta \mathbf{y}}{\Delta \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{c}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{c})}{(\mathbf{c}+\mathbf{h}) - \mathbf{c}} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{c}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{c})}{\mathbf{h}}$$

Consideremos otras rectas secantes a **f**, dejando fijo el punto P y haciendo la distancia entre **c** y **c + h** cada vez mas pequeña, es decir **h tiende a ser cero.** (Ver gráfica)



¿Qué ocurre con la recta cuando h se aproxima a cero?



P y Q_i (para algún $\mathbf{i} \in \mathbf{Z}$) tienden a ser un sólo punto, pero aún se puede trazar una única recta por los puntos **P** y $\mathbf{Q}_i$. A esta recta se le llama tangente a **f** en el punto **c** y su pendiente es:

$$\mathbf{m} = \lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{c}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{c})}{\mathbf{h}}$$

Luego se puede concluir:

La pendiente de la recta tangente a una función **f** en un punto **x** = **c** es equivalente a la derivada de **f** evaluada en **x** = **c**.

Pendiente de la recta tangente a **f** en el punto **x** = **c** ⇔ Derivada de **f** en el punto **x** = c, es decir $\mathbf{f}^{\prime}(\mathbf{c})$

Ejemplo 1

Determinar la ecuación de la recta tangente a

$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{5}{3} - \ln \mathbf{x}^3 + 5\mathbf{x}^2$ en $\mathbf{x} = 1$.

Para identificar la ecuación de la recta tangente, se debe encontrar su pendiente, es decir, hallar $\mathbf{h}^{\prime}(1)$.

Para esto se calcula $\mathbf{h}^{\prime}(\mathbf{x})$ y se evalúa en $\mathbf{x} = 1$.

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{5}{3} - \ln \mathbf{x}^3 + 5\mathbf{x}^2$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{5}{3} - 3 \ln \mathbf{x} + 5\mathbf{x}^2$$

$$\mathbf{h}^{\prime}(\mathbf{x}) = \left(\frac{5}{3}\right)^{\prime} + (-3 \ln \mathbf{x})^{\prime} + (5\mathbf{x}^2)^{\prime}$$

$$= 0 - 3(\ln \mathbf{x})^{\prime} + 5(\mathbf{x}^2)^{\prime}$$

$$= -3.\frac{1}{\mathbf{x}} + 5(2\mathbf{x})$$

$$= -\frac{3}{\mathbf{x}} + 10\mathbf{x}$$

Así, $\mathbf{h}^{I}(1) = -\frac{3}{1} + 10(1)$

$$= -3 + 10$$

$\mathbf{h}^{I}(1) = 7 = \mathbf{m}$ es la pendiente de la recta tangente a $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ en $\left(1, \frac{20}{3}\right)$

Luego la ecuación pedida es: $\mathbf{y = 7x} - \frac{1}{3}$

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4$ en $\mathbf{x} = -2$ y graficar en el mismo sistema de coordenadas cartesianas la función y su recta tangente en $\mathbf{x} = -2$.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4$$

$$\mathbf{f}^{I}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} + 5$$

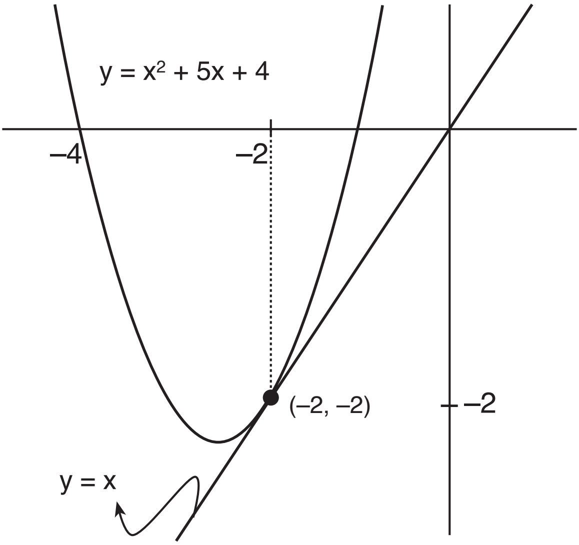
$$\mathbf{f}^{I}(-2) = 2(-2) + 5$$

$$\mathbf{f}^{I}(-2) = -4 + 5$$

$$\mathbf{f}^{I}(-2) = 1$$

Entonces la recta tangente a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ en $\mathbf{x} = -2$ tiene pendiente 1 y pasa por el punto $(-2, \mathbf{f}(-2))$, es decir, $(-2, -2)$.

Luego la ecuación pedida es: $\mathbf{y = x}$. Observe la siguiente gráfica:



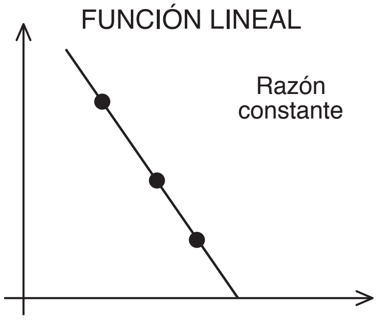
PENDIENTE DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

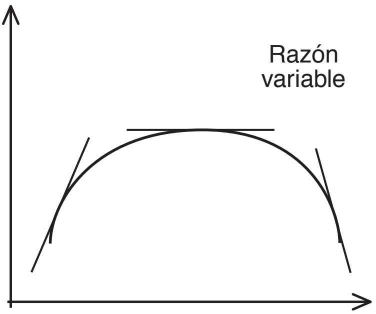
Cuando se analizó la pendiente (o razón de cambio) en la función lineal, se determinó que ésta permanece constante. Ahora, se trata de analizar la pendiente en un punto de la gráfica una funcion no lineal.

Definición

La pendiente de la gráfica de una función **f** en un punto **c** ($c \in Df$) es la pendiente de la recta tangente a **f** en el punto **c**

La anterior definición nos conlleva a concluir que la pendiente en una función no lineal es **variable.** Observe las siguientes gráficas:





❑ EJERCICIO Nº 29

1) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ en el punto indicado:

a) $f(\mathbf{x}) = \ln \mathbf{x}$ en $\mathbf{x} = 1$
b) $f(\mathbf{x}) = 5 - 3\mathbf{x} + \mathbf{x}^2$ en $\mathbf{x} = 3$
c) $f(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x}+1}{\mathbf{x}^2}$ en $\mathbf{x} = -\dfrac{1}{2}$
d) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}e^{\mathbf{x}}$ en $\mathbf{x} = 0$
e) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{x}}}$ en $\mathbf{x} = \dfrac{9}{4}$
f) $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^3 + \mathbf{x})\,(\mathbf{x}^4 - \mathbf{x}^3 + 1)$ en $\mathbf{x} = -1$

g) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + b$ en $\mathbf{x} = a$

h) $f(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x} + 2}$ en $\mathbf{x} = 3$

2) ¿En qué puntos (si existen) f(**x**) tiene una tangente, cuya pendiente es la dada?

a) $f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^3}{3} + 7\mathbf{x}^2 + 12\mathbf{x}$, $\mathbf{m} = 0$

b) $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^3 + \frac{\mathbf{x}^2}{2} + 2\mathbf{x}$, $\mathbf{m} = 4$

c) $f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^3}{3} - 4\mathbf{x}^2 + 10$, $\mathbf{m} = 15$

d) $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 + \ln \mathbf{x}$, $\mathbf{m} = 2$

e) $f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^4}{4} - 5\mathbf{x}$, $\mathbf{m} = 3$

f) $f(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}} + 3$, $\mathbf{m} = \frac{1}{2}$

g) $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^3 e^{\mathbf{x}}$, $\mathbf{m} = 0$

h) $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} + 1$, $\mathbf{m} = -2$

i) $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}}$, $\mathbf{m} = 0$

j) $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}^2} - \frac{1}{\mathbf{x}}$, $\mathbf{m} = -1$

3) Hallar la ecuación de la recta tangente, si es posible, que sea horizontal a f(**x**):

a) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x}$

b) $f(\mathbf{x}) = \frac{2}{3}\mathbf{x}^3 - \frac{5}{2}\mathbf{x}^2 + 3\mathbf{x}$

c) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^3 + \mathbf{x}^2$

d) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 e^{\mathbf{x}}$

e) $f(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x}-1}{\mathbf{x}^2}$

❏ TALLER Nº 13

Razón promedio de cambio y razón instantánea de cambio

PRERREQUISITOS:

Distinguir las definiciones: Razón promedio de cambio y razón instantánea de cambio.
Distinguir las definiciones: línea tangente a una curva y línea secante a una curva.
Manejar con claridad la forma general de una función lineal.
Identificar las reglas básicas de derivación.

1) Indicar mediante un ejemplo gráfico la diferencia entre razón promedia de cambio y razón instantánea de cambio.

2) Identificar el (los) punto(s) en el cual f(**x**) tiene una tangente horizontal:

   a) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{2\mathbf{x}^2+5\mathbf{x}+1}$

   b) $\mathbf{gx} = (5\mathbf{x}^2 - 12\mathbf{x} + 4)^4$

   c) $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (6\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 1)^5$

   d) $\mathbf{f(x)} = \mathbf{ln}(4\mathbf{x}^4 - 6\mathbf{x}^2\mathbf{)}$

   e) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^2 - 5\mathbf{x})^2(3\mathbf{x} + 2)^7$

   f) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^2 - 4)^5(2\mathbf{x} + 1)^7$

3) Derivar cada una de las siguientes funciones:

   a) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}e^{5\mathbf{x}} + \sqrt[3]{4\mathbf{x}-1}$

   b) $f(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{x}+1} - \ln(\mathbf{x}^3 + 2)$

c) $f(\mathbf{x}) = (5\mathbf{x}^3 + 2)^2 + (e^{3\mathbf{x}})^2$

d) $f(\mathbf{x}) = 5\mathbf{x}^2 - \dfrac{1}{\mathbf{x}^3} + \mathbf{e}$

4) La población de cierta isla, como función del tiempo, se encuentra que está dada por: $\mathbf{P}(\mathbf{t}) = 1000 - 600\mathbf{e}^{-0.5t}$, donde **t** es el tiempo transcurrido en años. Calcular:

a) El crecimiento promedio de la población por año entre **t** =10 y **t** = 30
b) La razón instantánea de cambio cuando **t** = 20 e interpretar la respuesta.

5) En la fábrica de llaveros «El Seguro» la producción diaria **q**, en el día **t** de su ciclo de producción se determina mediante:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{t}) = 450\left(2 - \mathbf{e}^{-0.15\mathbf{t}}\right)$$

a) Cuántos llaveros (a la unidad más pró**x**ima) se producen en el noveno día?
b) A partir de qué día del ciclo de producción se fabrican más de 820 llaveros diarios?
c) Cuál es el promedio de incremento diario en la producción, entre el quinto y el décimo día del ciclo?
d) A qué ritmo diario cambia la producción en el octavo día?
e) En qué día del ciclo de producción, esta crece a un ritmo de 400 llaveros por día?

6) La demanda **x** de un artículo se relaciona con el precio **P** mediante

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = 2000\,\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{x}}{15}}$$

a) A un precio de $ 40 ¿cuántos artículos (a la unidad mas próxima) se venderán?
b) ¿Cuál fue el promedio de incremento en el precio para que la demanda pasara de 60 a 25 artículos?

7) En la fábrica de colombinas «El Chupete», la producción diaria **q** (en cajas) en un día **t** de su ciclo de producción está dada por: $\mathbf{q}(\mathbf{t}) = 500\left(1 - \mathbf{e}^{-0.2\mathbf{t}}\right)$. Determinar:

   a) El promedio de incremento diario en la producción de cajas de colombinas entre el día cuarto y décimo del ciclo de producción.
   b) En qué día del ciclo de producción, esta cambia a razón de 35 unidades por día

8) Una fábrica de latas para pasta de tomate ha determinado que la función de demanda está dada por $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} + 160$, donde p es el precio de cada lata en dólares, y **x** es la cantidad de cajas de latas demandadas; y que el costo total de producir **x** cajas de latas está dado por $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 40\mathbf{x} - 10$ dólares.

   a) Determinar el incremento en la utilidad cuando la producción se aumenta de 20 a 70 cajas de latas de puré de tomate.
   b) Hallar el costo promedio por caja, cuando la producción varía de 20 a 70 cajas de latas de pasta de tomate.

9) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva f(**x**) en el punto indicado, y graficar.

   a) $f(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x} + 1}{\mathbf{x}^2}$ en $\mathbf{x} = \dfrac{3}{5}$
   b) $f(\mathbf{x}) = \log_2(\mathbf{x} + 1)$ en $\mathbf{x} = 5$

10) ¿En qué puntos f(**x**) tiene una tangente cuya pendiente es la dada?

   a) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 e^{\mathbf{x}}$, $m = 0$

   b) $f(\mathbf{x}) = 3 + \sqrt{\mathbf{x}^2 + 2}$, $\mathbf{m} = \dfrac{1}{2}$

Análisis marginal

Hasta el momento se han trabajado razones de cambio promedio e instantáneo. El propósito es considerar ahora el cambio producido en una función, respecto al cambio de una cantidad muy pequeña (1 unidad) en la variable independiente, llamado **análisis marginal.**

Considérese el siguiente ejemplo:

El costo total de producir x cantidad de corbatas semanalmente en la empresa «Carl», está dado, en pesos, por la función:

$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^3 + 2\mathbf{x} + 9800$ Si en la primera semana de cada mes se producen 50 corbatas, el costo total de las 50 corbatas es:

$\mathbf{C}(50) = \$\ 72400$ y, el costo promedio de cada una es:

$$\frac{\mathbf{C}(50)}{50} = \frac{\$72400}{50} = \$1448$$

¿Qué ocurre si la empresa toma la decisión de incrementar la producción a 65 corbatas?

Existe una variación en la producción: Δ_x, y, una variación en el costo: Δ_C.

Para el caso: $\Delta_x = 15$ (Unidades extras o adicionales)
$\Delta_C = C(65) - C(50)$ (Costo total extra de producir las 15 corbatas adicionales).

luego, $\Delta_C = \$\ 147242.5 - \$\ 72400$
$\Delta_C = \$\ 74842.5$

y, el costo promedio de cada una de estas corbatas adicionales es:

$$\frac{\Delta_C}{\Delta_X} = \frac{\$74842.5}{15} = \$4989.5$$

Disminúyase ahora, la cantidad adicional de producción.

Sea $\Delta_x = 5$. El costo adicional de producir las 5 corbatas extra es: $\Delta_C = \mathbf{C}(55) - \mathbf{C}(50) = \$\ 93097.5 - \$\ 72400 = \$\ 20697.5$ y, el costo promedio de producir cada una de estas corbatas es:

$$\frac{\$20697.5}{5} = \$4139.5$$

¿Qué ocurre para $\Delta_x = 1$?

$\Delta_C = \mathbf{C}(51) - \mathbf{C}(50) = \$\ 76227.5 - \$\ 72400$

$\Delta_C = \$\ 3827.5$ equivalente al costo real de producir la corbata Nº 51.

Cuando el incremento tiende a ser pequeño (1 unidad), este costo adicional también se puede calcular aproximadamente, usando la primera derivada así:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^3 + 2\mathbf{x} + 9800$$

$$\mathbf{C}^{I}(\mathbf{x}) = \frac{3}{2}\mathbf{x}^2 + 2$$

$$\mathbf{C}^{I}(50) = \$3752$$

Equivalente al costo aproximado de producir la corbata No 51.

Observar que el costo real de producir la corbata 51:

$\mathbf{C}(51) - \mathbf{C}(50) = \$\ 3827.5$,

está muy cerca al costo obtenido utilizando la primera derivada:

$\mathbf{C}^{I}(50) = \$\ 3752$.

En general:

1) Si **C**(**x**) es el costo total de producir x unidades, se define: Costo marginal = $\mathbf{C}^{\prime}(\mathbf{x})$ ≈ Costo de producir 1 unidad adicional a x.

2) Si **I**(**x**) es el ingreso total obtenido de la venta de **x** unidades, se define: Ingreso marginal = $\mathbf{I}^{\prime}(\mathbf{x})$ ≈ Ingreso obtenido de la venta de una unidad adicional a **x**.

3) Si **U**(**x**) es la utilidad total de producir y vender x unidades, se define: Utilidad marginal = $\mathbf{U}^{\prime}(\mathbf{x})$ ≈ Utilidad obtenida si la producción sufre un pequeño incremento.

❏ EJERCICIO Nº 30

1) Para cada una de las siguientes funciones de costo, hallar la función de costo promedio y costo marginal e interpretarlas.

   a) $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 3000 + 20\mathbf{x}$

   b) $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}\mathbf{x}^3 - \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 + 10\mathbf{x} + 5000$

   c) $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}e^{0.2\mathbf{x}}$

   d) $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \ln(3\mathbf{x} + 2) + 5\mathbf{x}$

   e) $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 7\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} + 3000$

   f) $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 500\mathbf{x} + 500$

2) Para las funciones de los literales **a**, **c**, **e** del anterior numeral:

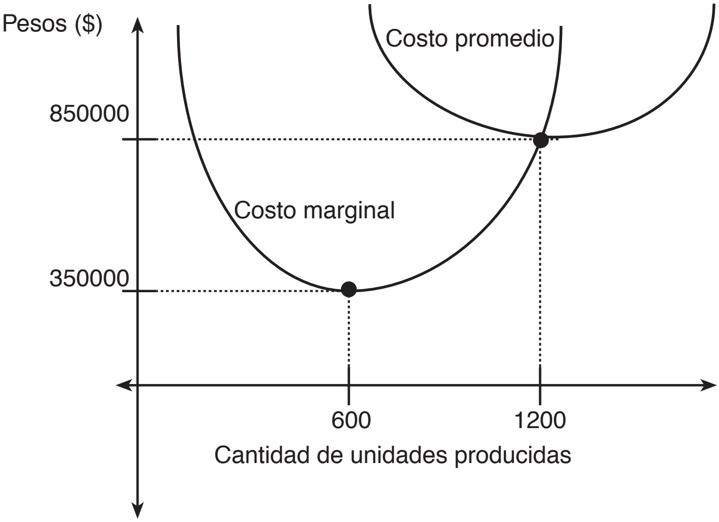
   a) Graficar en cada caso las funciones de costo marginal y costo promedio en un mismo plano cartesiano (Utilice un paquete matemático o calculadora)

b) Determinar la producción (número de unidades), que hace que el costo promedio sea igual al costo marginal.
c) En cada caso, hallar **C**(12) y **C**^{l}(12) e interpretar las respuestas.

3) Dada la ecuación de demanda: $\mathbf{e}^{x} - \mathbf{p} = 10$, donde **x** es el número de unidades y **p** es el precio unitario:

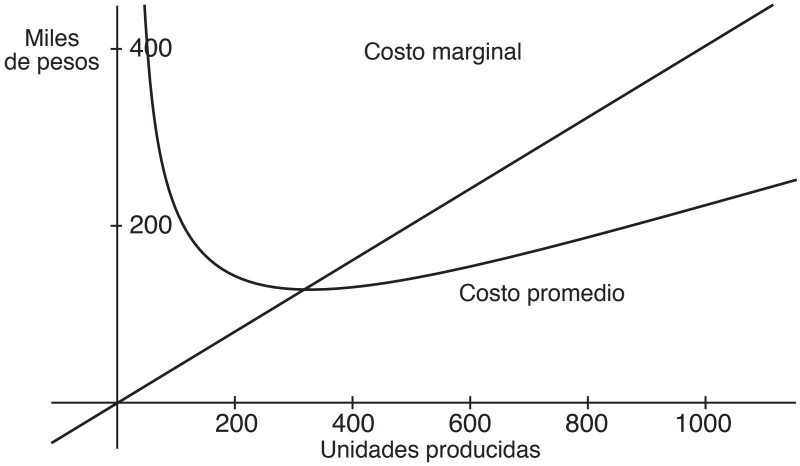
a) Determinar ingreso total (**I**), ingreso marginal e ingreso promedio en función de **x**
b) Hallar e interpretar: **I**(5), $I'(5)$, $\overline{I(5)}$

4) En la siguiente gráfica se presentan las funciones de costo promedio y costo marginal para cierta empresa.



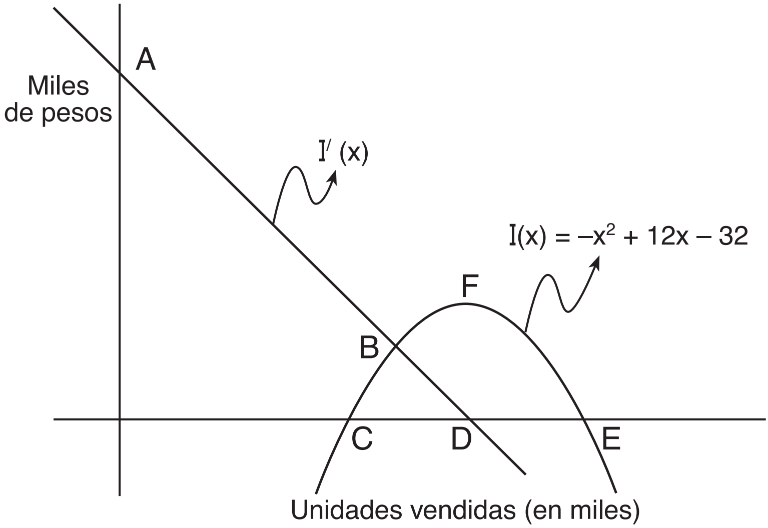
a) ¿Cuántas unidades se deben producir para que el costo promedio sea igual al costo marginal?
b) ¿Cuál es el mínimo costo marginal que se obtiene?
c) ¿En qué intervalo decrece el costo promedio?
d) ¿Siempre ocurre que el punto donde el costo marginal es igual al costo promedio, es el mismo punto mínimo del costo promedio? Indique este punto en la gráfica. (Consulte al respecto)

5) El costo total de producir x unidades de cierto artículo está dado por la función $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}\mathbf{x}^2 + 20000$ Miles de pesos. La siguiente gráfica representa las funciones de costo marginal y costo promedio, determinar:



a) La función de costo promedio
b) La función de costo marginal.
c) El número de unidades producidas para que el costo promedio sea igual al costo marginal (indíquelo en la gráfica)
d) ¿En qué intervalo el costo promedio es mayor al costo marginal?
e) ¿Cuántas unidades se deben producir para que el costo promedio por unidad sea de $140 mil pesos? (indicar este punto en la gráfica)
f) ¿Cuánto cuesta producir una unidad extra cuando la producción es de 100 artículos? (indicar este punto en la gráfica).
g) ¿Para qué intervalo de producción el costo promedio es decreciente?

6) Dada la gráfica de ingreso total semanal e ingreso marginal semanal:



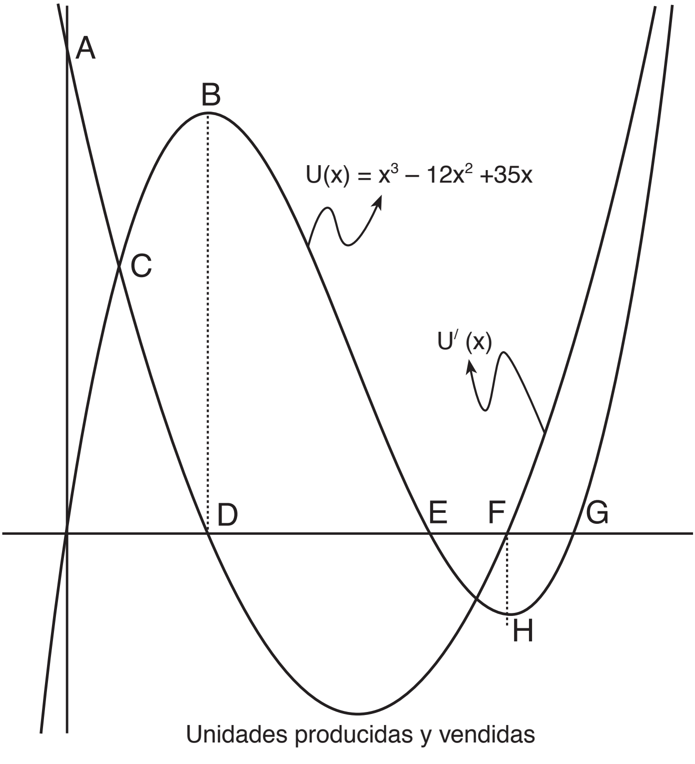
a) Hallar e interpretar si es posible las coordenadas de los puntos:
A, B, C, D, E y F

b) Determinar el intervalo de ventas.

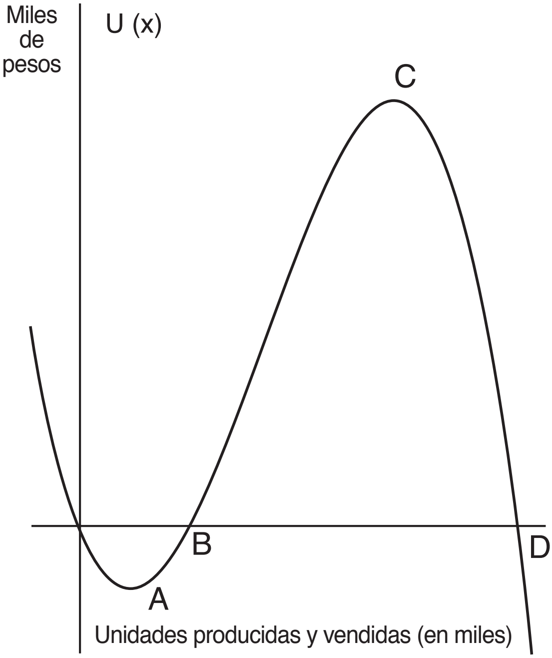
c) ¿Cuál es el máximo ingreso que se puede obtener?

7) Dada la gráfica de utilidad total y utilidad marginal:

   a) Hallar e interpretar si es posible las coordenadas de cada uno de los puntos: A, B, C, D, E, F, G y H.
   b) Determinar los puntos de equilibrio.
   c) Determinar el intervalo de producción y venta donde hay ganancias.
   d) En qué intervalo crece la función de utilidad marginal.



8) La utilidad (en cientos de pesos) de producir y vender tornillos (en miles), está dada por $\mathbf{U(x)} = -2\mathbf{x}^3 + 5\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}$



a) Graficar, en el mismo plano cartesiano dado, la función de utilidad marginal.
b) Determinar e interpretar las coordenadas de los puntos A, B, C y D.
c) ¿Cuál es la utilidad marginal máxima? Interpretar este valor.
e) Hallar e interpretar **U**(1.2) y **U** ^{I} (1.2).

9) Un fabricante estima que cuando se producen **x** unidades de determinado artículo, el costo total será

$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8}\mathbf{x}^2 + 3\mathbf{x} + 98$ dólares, y que $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}(75 - \mathbf{x})$ dólares por unidad es el precio al cual se venderán las **x** unidades.

a) Hallar el costo y el ingreso marginales.
b) Emplear el costo marginal para calcular el costo de producir la novena unidad.
c) ¿Cuál es el costo real de producir la novena unidad?

d) ¿Cuál es el ingreso real obtenido de la venta de la novena unidad?

10) El ingreso total mensual de un fabricante es $\mathbf{R}(\mathbf{q}) = 240\mathbf{q} + 0.05\mathbf{q}^2$ dólares cuando se producen y venden q unidades durante el mes. En la actualidad el fabricante produce 80 unidades al mes y planea incrementar la producción mensual en una unidad.

a) Utilizar análisis marginal para estimar el ingreso adicional que genera la producción y venta de la unidad número 81.
b) Calcular el ingreso adicional real que generará la producción y venta de la unidad número 81.

❑ TALLER Nº 14

1) Para cada una de las siguientes funciones de costo total (dadas en miles de pesos), determinar el número de unidades que se deben producir para que el costo marginal sea igual al costo promedio. ¿Cuál es este costo? Graficar (costo marginal y costo promedio en un mismo plano cartesiano), e indicar este punto en la gráfica.

a) $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{0.003x}$

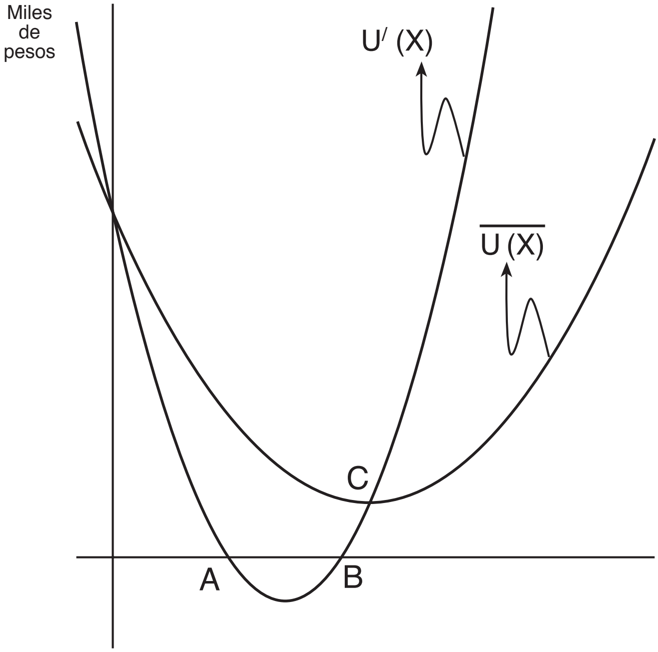
b) $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} + 100$

c) $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 2\ln\mathbf{x} - 10$

d) $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^4 + \mathbf{x}^2 + 4$

e) $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{x} + 2}$

2) La función de utilidad (en miles de pesos) de producir y vender **x** cantidad de artículos semanalmente en una empresa se rige por la función: $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^3 - 9\mathbf{x}^2 + 12\mathbf{x}$. En la siguiente gráfica se encuentran representadas las funciones de utilidad promedio y utilidad marginal.

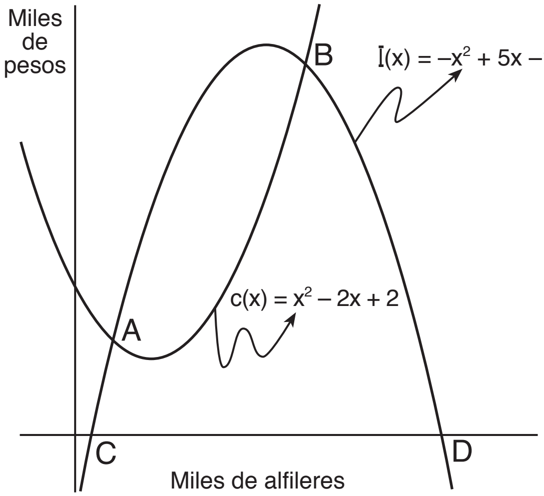


a) Determinar las coordenadas de los puntos **A**, **B** y **C** e interpretarlas, si es posible.

b) Para qué nivel de producción y venta la utilidad promedio es igual a la utilidad marginal? (Justificar la respuesta).

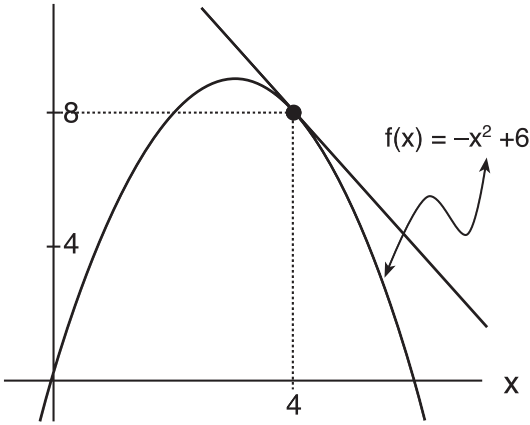
c) Hallar e interpretar $\overline{\mathbf{U}(20)}$ **y** $\mathbf{U}^{\prime}(20)$

3) El siguiente gráfico muestra las funciones de costo e ingreso (en miles de pesos), de producir y vender alfileres (en miles de unidades); en la empresa «Pinchazo Ltda».



a) Determinar e interpretar las coordenadas de los puntos A, B, C y D, si es posible.
b) Determinar el ingreso máximo.
c) Para qué intervalo de producción, el costo es decreciente? Justificar.

4) Hallar la ecuación de la recta que se representa en la siguiente gráfica:



Respuestas a algunos ejercicios

EJERCICIO No. 1

1. Algunos racionales no enteros: $\frac{5}{4}, -\frac{11}{3}$ **3.** No. $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \phi$.

5. No. Obsérvese el ejercicio 1.

EJERCICIO No. 2

3. **a.** Algunos racionales decimales finitos: $\frac{3}{4}, -\frac{7}{5}, \frac{37}{10}$ **b.** Algunos racionales que no son enteros, ni naturales: $\frac{2}{3}; -\frac{11}{8}; \frac{17}{13}$

c. 0,1,2 3, 4, 5, 6, 7.

5. **a.**Naturales: $\sqrt{9}$ **b.**Racionales pero no enteros: $-0.28;\ -7.4;\ -8.2$

c. Irracionales: $-\pi;\ \sqrt{10}$ **d.** Enteros pero no naturales: No hay.

e. Racionales mayores que –1: $\sqrt{9},\ -0.28$

EJERCICIO No. 3

1. **a.** –86 **b.** –30 **c. 1099**

2. **a.** V **c.** V **e. F**

3. **a.** $6\mathbf{x} - 4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$ **b.** $-\mathbf{n}$ **c.** $-2\mathbf{m} - 7$ **d.** $-4\mathbf{x} - \mathbf{y}$

e. $27\mathbf{x} - 3\mathbf{y} - 14$ **f.** $21.5\mathbf{m} + 77$ **g.** $17\mathbf{d} - 19$ **h.** $7\mathbf{x} + 5\mathbf{y}$

i. $-7\mathbf{ab} - 5\mathbf{b}^2$ **j.** $8\mathbf{x}^2 - 7\mathbf{xy}$

k. $48\mathbf{a}^2 - 24\mathbf{ab} - 12\mathbf{a} - 24\mathbf{b}^2 - 12\mathbf{b} + 39$

EJERCICIO No. 4

1. **a.** F **b.** F **c.** F **d.** F **e.** V **f.** F **g.** F **h.** V **i.** V

2. **a.** –33 **c.** $\frac{-16\mathbf{y}}{\mathbf{x}^4}$ **d.** $3\mathbf{a}^2+3\mathbf{ab}+2\mathbf{b}^2$ **e.** $30\mathbf{x}^6\mathbf{y}$

5. **a.** $-\frac{5}{4}$ **b.** $-\frac{43}{4}$ **c.**–3 **d.** $-\frac{33}{4}$

6. **a.** $0.7\mathbf{x}^2+5.8\mathbf{x}+1.9$ **e.** $-11\mathbf{n}^2-16\mathbf{nw}-9\mathbf{w}^2+21$

EJERCICIO No. 5

1. $(\mathbf{a}+2\mathbf{b})(\mathbf{m}+1)$ **3.** $(\mathbf{a}-\mathbf{b})(3\mathbf{a}-3\mathbf{b}+5)$

5. $(\mathbf{b}+\mathbf{c})(4\mathbf{b}+4\mathbf{c}+1)$ **7.** $(\mathbf{x}+\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{y}+4)$

9. $(\mathbf{x}-\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}-5)$ **11.** $\left(\mathbf{x}^2-\sqrt{7}\right)\left(\mathbf{x}^2+\sqrt{7}\right)$

13. $\mathbf{x}^2\mathbf{y}^3\left(1-\mathbf{x}^2\mathbf{y}^3\right)$ **15.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathbf{z}^4\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathbf{z}^4\right)$

17. $\mathbf{t}(2\mathbf{t}-5)(3\mathbf{t}+4)$ **19.** $\mathbf{x}^3(\mathbf{x}+7)(\mathbf{x}+8)$

21. $(2\mathbf{x}-\mathbf{y})(2\mathbf{x}+\mathbf{y}+2)$ **23.** $(\mathbf{a}+1)(\mathbf{a}-1)\left(\mathbf{a}^2-\mathbf{a}+1\right)$

25. $\mathbf{m}\left(\mathbf{p}^3+\mathbf{m}\right)\left(\mathbf{p}^3-\mathbf{m}\right)\left(\mathbf{p}^6+\mathbf{m}^2\right)$ **27.** $\mathbf{x}^3(\mathbf{x}-1)(\mathbf{x}+1)^2$

29. $(\mathbf{x}+\mathbf{y}-3)(\mathbf{x}-\mathbf{y}-3)$ **31.** $(2\mathbf{x}+5)(3\mathbf{x}-2)$

33. $2(2\mathbf{x}-7)(3\mathbf{x}+5)$ **35.** $(\mathbf{a}-2)(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

37. $\left(\frac{3}{2}\mathbf{z}-\frac{1}{5}\right)^2$ **39.** $\mathbf{x}(\mathbf{x}-7)(5\mathbf{x}-1)$

EJERCICIO COMPLEMENTARIO

a. $(\mathbf{b}-1)(\mathbf{b}+1)^2$ c. $(\mathbf{a}-2)(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ e. $3\left(3\mathbf{y}^2+\mathbf{a}^2\right)\left(\mathbf{a}^2-3\mathbf{y}^2\right)$

g. $\left(\mathbf{x}-\sqrt{5}\right)\left(\mathbf{x}+\sqrt{5}\right)$ i. $\left(2\mathbf{m}+3\right)\left(4\mathbf{m}-3\right)$

EJERCICIO No. 6

1. **a.** $-\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ **c.** $\dfrac{\left(\mathbf{a}+2\right)\left(\mathbf{a}^2+4\right)}{\left(\mathbf{a}-2\right)}$ **e.** $40\mathbf{x}^4\mathbf{y}$ **g.** $\dfrac{1-\mathbf{y}}{\mathbf{x}-\mathbf{y}}$ **i.** $\dfrac{\mathbf{m}^2+1}{2}$

3. **a.** $\dfrac{\mathbf{a}-3}{\mathbf{a}+3}$ **c.** $\dfrac{6\mathbf{a}}{13}$ **e.** $\dfrac{9}{2}$ **g.** $\dfrac{\mathbf{a}^4\mathbf{b}^4+1}{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2}$ **i.** $\dfrac{9\mathbf{x}^2}{2}$ **k.** $\dfrac{\mathbf{x}+1}{\left(\mathbf{x}+2\right)\left(2\mathbf{x}-1\right)}$

m. $\dfrac{5}{8}$ **o.** $\dfrac{23}{3}$ **q.** 0. **t.** $\dfrac{2\left(\mathbf{x}-4\right)}{3-\mathbf{x}}$ **v.** $\dfrac{2(\mathbf{y}-1)(\mathbf{y}-2)}{-2\mathbf{y}+7}$

TALLER No. 1

1. **a.** $\dfrac{206}{45}$ **2. a.** $3\mathbf{a}^2+13\mathbf{a}+\dfrac{93}{8}$ **b.** $\dfrac{139}{60}-\dfrac{1}{5}\mathbf{b}$

3. **a.** Revise la división $\dfrac{\dfrac{-27}{2\mathbf{x}^2}}{2\mathbf{x}}$ **4. a.** $\dfrac{\mathbf{x}-5}{2\mathbf{x}^2\left(\mathbf{x}+3\right)\left(\mathbf{x}+2\right)}$

c. $\dfrac{3\mathbf{a}+8}{3\mathbf{a}-8}$ **e.** $\dfrac{2}{4-\mathbf{x}}$ **g.** $\dfrac{19}{6}$

EJERCICIO No. 7

1. **a.** $\sum_{\mathbf{k}=20}^{103}\mathbf{d}_{\mathbf{k}}$ **c.** $\sum_{\mathbf{i}=1}^{12}\dfrac{2\mathbf{i}-1}{4\mathbf{i}}$ **e.** $\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}\Omega^{\mathbf{i}}$ **g.** $\sum_{\mathbf{k}=1}^{28}\nabla$

3. **a.** $-\dfrac{25}{12}$ **c.** $\delta+\delta+\delta=3\delta$ **e.** $-1-2-3-4-5=-15$

TALLER No. 2

1. **a.** $\sum_{k=1}^{13}(2k+1)*$ **b.** $\sum_{i=2}^{120}\frac{11}{i}$

2. **a.** $b^3+b^2+b+\frac{1}{b}+1$ **c.** $\frac{29}{10}$ **e.** -3

EJERCICIO No. 8

2. **a.** -404 **c.** $\frac{75}{2}$ **e. 54** **3. a.** $-\frac{11}{14}$ **c.** $-10\sqrt{2}-\frac{31}{14}$ **e.** $-\frac{15}{2}$

5. **a.** 0 **b.** 4 **c.** $\frac{3}{2}$ **d.** $\frac{16}{21}$ **e.** 66 **f.** 18 **g.** $\frac{49}{100}$ **h.** 1600

i. **Aprox 1.7609**

7. **a.** Cantidad de estudiantes de ingeniería de sistemas de la Universidad Nacional. **c.** Cantidad de estudiantes de ingeniería de sistemas, finanzas y matemáticas de la Universidad Nacional. **e.** Cantidad de estudiantes de matemáticas y comunicación de las universidades detalladas.

8. **a.** Precio de venta de 55 saleros.

9. **b.** 66.2 millones de dólares.

TALLER No. 3

1. **a.** $\sum_{j=1}^{10}T_{2j}$ **b.** $\sum_{i=3}^{5}\sum_{j=1}^{10}T_{ij}$

2. **a.** $\sum_{k=6}^{6}C_{k1}$ **c.** $\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}C_{kj}$ **e.** $\sum_{j=1}^{3}C_{8j}$

3. **a.** Cantidad de palabras que tienen 5 letras, y que están en la página 100

5. **a.** X_{32} representa el valor promedio de una acción del Banco Santander en Junio de 1997

b. $\frac{\sum_{j=1}^{5} X_{7j}}{5}$ representa el promedio del valor de la acción de la empresa Noel entre Diciembre/96, y Junio/98.

c. $\sum_{j=1}^{4} \left(X_{3j}\right)^2 = 30803783$

EJERCICIO No. 9

1. **a.** F **b.** V **c.** V **d.** V **e.** V **f.** F

3. **a.** F **b.** F **c.** F **d.** V **e.** F **f.** F **g.** V **h.** F.

EJERCICIO No. 10

1. **a.** $\left[-\frac{5}{3},\rightarrow\right)$ **c.** $\left[-\frac{9}{2},-2\right]$ **e.** $\left(\leftarrow,\frac{79}{19}\right]$ **g.** $\left(\leftarrow,-\frac{15}{2}\right)$

i. $\left(\frac{19}{18},\rightarrow\right)$ **k.** $\left(-\frac{11}{14},\frac{1}{70}\right]$

2. **a.** $\left(\leftarrow,-\frac{5}{7}\right)$ **c.** $\left(\leftarrow,-\frac{21}{6}\right)$ **e.** $(\leftarrow,12)$

3. **a.** $(0,\rightarrow)$ **c.** $\left(\frac{39}{16},\rightarrow\right)$ **e.** $(\leftarrow,16)$

EJERCICIO No. 11

1. **a.** $\left(\leftarrow,\frac{5}{17}\right)$ **c.** $\left[-\frac{1}{3},4\right]$ **e.** $(\leftarrow,0)\cup\left(\frac{7}{6},\rightarrow\right)$

g. $(-4,3)$ **i.** $\left(\leftarrow,-\frac{1}{14}\right)$ **k.** $(-2, 3)$ **n.** $\left(\leftarrow,\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{8}{5},\rightarrow\right)$

2. **a.** Deben venderse un número de unidades, y menos de 40. **b.** Deben venderse más de 90 unidades, y menos de 110. **c.** Se deberían producir y vender más de 200 artículos a la semana. **d.** Se deben vender 1469 artículos o más. **e.** Se deben producir menos de 55 artículos. **f.** Para que el precio unitario sea mayor de 165 hay que vender menos de 196 chaquetas. **g.** Si el costo debe ser inferior a $8550, se pueden producir menos de 55 artículos.

TALLER No. 4

1. **a.** $\left[-\frac{1}{15},\rightarrow\right)$ **b.** $\left(\leftarrow,-\frac{61}{195}\right]$

2. Debe producir y vender 436 unidades o más

3. **a.** F **b.** F **c.** F. **d.** F **e.** F **f.** V **g.** V **h.** F **i.** F

4. Deben venderse entre 200 y 1000 bolsos

5. **a.** $(0,3)$ **b.** $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ **c.** $\left(\leftarrow,\frac{7}{3}\right)$ **d.** $(\leftarrow,-10]\cup[-3,\rightarrow)$

e. $\left(-\frac{1}{2},\rightarrow\right)$ **f.** $(-4,1)$ **g.** $(1,\rightarrow)$ **h.** $\left(-\frac{3}{10},0\right)$

EJERCICIO No. 12

1. **a.** $\mathbf{x}=\frac{4}{3}$ **b.** $\mathbf{x}=\frac{39}{5}$ **c.** $\mathbf{x}=\frac{3}{1100}$ **d.** $\mathbf{x}=\frac{4}{3}$ **e.** $\mathbf{x}=-16$

f. $\mathbf{x}=6$ **g.** $\mathbf{x}=-\frac{1}{12}$ **h.** $\mathbf{x}=-\frac{2}{17}$ **i.** $\mathbf{x}=90$ **j.** ϕ

k. $\mathbf{x}=-\frac{1}{8}$ **l.** $\mathbf{R}$ **m.** ϕ **n.** ϕ **o.** $\mathbf{x}=\frac{5}{3}$ **p.** $\mathbf{R}-\{0,4\}$

2. **a.** 2m **c.** $\frac{\mathbf{x}^2}{5}$ **e.** $0.06\left(\mathbf{x}^2+5\right)$ **g.** $3\left(\mathbf{x}+9\mathbf{y}\right)$

3. **a.** $\mathbf{N}\approx 4566.67$ **b.** $\mathbf{P}=80$ **c.** $\mathbf{R}=3910000$ **d.** $\mathbf{N}\approx 3966667$

e. Raúl tenía inicialmente $ 2234043 aproximadamente

5. La persona tiene en el banco $ 3500000

7. Para un valor de ventas de $ 2000000 se recibirá el mismo salario semanal.

9. **a.** $w = \frac{c}{a+b}$ **c.** $w = \frac{b}{b-1}$ **g.** $w = \frac{r}{d(a-b)}$ **i.** $w = 0$

10. **b.** $b = \frac{a + n^2 w + w}{nw}$ **d.** $b = \frac{p - 2w}{2}$ **f.** $b = \frac{ac}{cd - w}$

h. $b = \frac{c^3}{w - a}$ $j = -\frac{ad + w(d-1)}{r}$

11. **a.** El artículo A costó $6000 c. Presupuesto: $ 6000000.

TALLER No. 5

1. Invirtieron $ 450000 al 27%

3. Invierte $225000 al 35%

5. La cantidad mínima de dinero que debe invertir al 68% es de $ 2500000.

7. El cheque representa el 40% del costo total del artículo.

9. El sueldo del señor Pérez fue de $ 1100000.

11. El precio del artículo es de $ 1´000.000.

EJERCICIO No. 13

1. **a.** $\left\{3, -\frac{3}{2}\right\}$ **b.** $\left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$ **c.** $\{0, 8\}$

d. $\{-5, -1\}$ **e.** $\left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$ **f.** $\{0, -3\}$

g. $\{\sim -0.3, \sim 3.3\}$ **h.** $\{\sim -1.37, \sim 5.12\}$

i. $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$ **j.** $\varnothing$ **k.** $\left\{-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right\}$

l. $\{\sim -17.55, \sim -2.05\}$ **m.** $\left\{-5, \frac{7}{2}\right\}$

n. $\{\sim -0.73, \sim 2.73\}$ **o.** $\varnothing$ **p.** $\{\sim -1.53, \sim 2.12\}$

3. Precio = 10 dólares.

TALLER No. 6

1. **a.** Una solución real. **b.** Ninguna solución real. **c.** Dos soluciones reales.

3. **a.** $\mathbf{w} = \pm\sqrt{\dfrac{\mathbf{bc} + \mathbf{d}}{\mathbf{ac}}}$ **c.** $\mathbf{w} = \sqrt{\mathbf{b}(\mathbf{a} - 1)}$ **e.** $\mathbf{w} = -1, \mathbf{w} = -23$

h. $= \dfrac{1+\sqrt{53}}{4}, \quad = \dfrac{1-\sqrt{53}}{4}$ **i.** $\mathbf{w} = \pm\dfrac{\sqrt{\mathbf{c}(\mathbf{a} + \mathbf{m})}}{\mathbf{a}}$ ~

4. **a.** $\mathbf{m} = \dfrac{2}{15}$ **c.** Solución no real

5. **a.** $\mathbf{P} = \pm\sqrt{\mathbf{Q} - \mathbf{M}}$ **c.** $\mathbf{P} = \pm\mathbf{R}$ **e.** $100\left(-1 \pm \sqrt{\dfrac{\mathbf{M}_1}{\mathbf{M}_2}}\right)$

EJERCICIO No. 14

1. **a.** $\mathbf{x} \le 0$ **b.** $\mathbf{x} > 0$ **c.** $\mathbf{x} \ge 0$ **d.** $\mathbf{x} \ge 0$, **y**, $\mathbf{y} \ge 0$ **e.** $\mathbf{x} \ge -1$

f. $-2 < \mathbf{x} < 2$ **g.** $\mathbf{x} \ge \sqrt{2}$, **o,** $\mathbf{x} \le -\sqrt{2}$ **h.** $\mathbf{x} < -\dfrac{5}{2}$ **i.** $\mathbf{x} \ge 0$, **o**, $\mathbf{x} \le -1$

2. **b.** $\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}\mathbf{xy}}$

3. **a.** 1.581 **b.** –0.294 **c.** 0.498 **d.** 0.03459 **e.** 13.92 **f.** 0.015

EJERCICIO No. 15

1. **a.** $\{6\}$ **b.** $\left\{\dfrac{22}{7}\right\}$ **c.** $\left\{\dfrac{25}{9}\right\}$ **d.** ϕ **e.** $\{\sim -1.382\}$

f. $\{\sim 0.194052\ ,\ \sim -2.19405\}$ **g.** $\{0.984375\}$ **h.** $\{-1.61539\}$

2. **a.** $\mathbf{w} = \mathbf{m}^4\mathbf{b}^4 - \mathbf{n}$ **c.** $\mathbf{w} = \dfrac{\mathbf{ar}^5 + \mathbf{b}}{\mathbf{cr}^5}$ **e.** $\mathbf{w} = \sqrt[4]{\dfrac{\mathbf{n}^2}{\mathbf{m}}}$

TALLER No. 7

1. **a.** $\mathbf{m}^2\mathbf{n}^3\sqrt{10\mathbf{m}}$ **b.** $5\mathbf{w}^4\sqrt[3]{2\mathbf{w}}$ **c.** $\dfrac{\mathbf{m}}{4}\sqrt{\mathbf{m}^2 + \mathbf{n}}$ **2.** **a.** F **c.** V

3. **a.** Aprox. 5.393 **b.** Aprox. –6.828 **c.** No es real. **d.** No es real.
e. Aprox. 2.46 **f.** Aprox. –1.767.

4. **a.** $\mathbf{S} = \phi$ **5.** **a.** $\mathbf{k} = \dfrac{\mathbf{mT}^2}{4\pi^2}$ **b.** $\mathbf{c} = \pm\dfrac{\sqrt{16\mathbf{r}^2 - 1}}{2}$

EJERCICIO No. 16

1. **a.** $2\mathbf{x}^3 - 3\mathbf{x}^2 + 4 = (\mathbf{x} + 2)\left(2\mathbf{x}^2 - 7\mathbf{x} + 14\right) - 24$

b. $-7\mathbf{x}^5 + 8\mathbf{x}^3 - 2\mathbf{x} + 5 = \left(\mathbf{x} - \dfrac{1}{2}\right)\left(-7\mathbf{x}^4 - \dfrac{7}{2}\mathbf{x}^3 + \dfrac{25}{4}\mathbf{x}^2 + \dfrac{25}{8}\mathbf{x} - \dfrac{7}{16}\right) + \dfrac{153}{32}$

c. $\mathbf{x}^4 - 3\mathbf{x}^5 + \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^2 + \dfrac{1}{4} = (2\mathbf{x} + 2)\left(-\dfrac{3}{2}\mathbf{x}^4 + 2\mathbf{x}^3 - 2\mathbf{x}^2 + \mathbf{x} - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{5}{4}$

d. $\mathbf{x}^6 - 3 = \left(\mathbf{x} + \dfrac{2}{3}\right)\left(\mathbf{x}^5 - \dfrac{2}{3}\mathbf{x}^4 + \dfrac{4}{9}\mathbf{x}^3 - \dfrac{8}{27}\mathbf{x}^2 + \dfrac{16}{81}\mathbf{x} - \dfrac{32}{243}\right) - \dfrac{2123}{729}$

e. $\dfrac{3}{4}\mathbf{x}^4 - 5\mathbf{x}^2 + 8 = \left(-\dfrac{3}{4}\mathbf{x}^3 - \dfrac{3}{4}\mathbf{x}^2 + \dfrac{17}{4}\mathbf{x} + \dfrac{17}{4}\right)(1 - \mathbf{x}) + \dfrac{15}{4}$

f. $2\mathbf{x}^2 + 3 = (\mathbf{x} + \mathbf{a})(2\mathbf{x} - 2\mathbf{a}) + 2\mathbf{a}^2 + 3$

2. **a.** 1 **c.** $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}$ **e.** $-4, -5, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}$ **g.** $-\dfrac{1}{2}$ **i.** 1

3. **a.** $\mathbf{b} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}, \mathbf{b} = \dfrac{-\sqrt{5} - 1}{2}$ **b.** **m**=1 **c.** $\mathbf{y} = \pm\sqrt{2}$ **d.** **n**=1

e. $\mathbf{x} = 1, \mathbf{x} = -2, \mathbf{x} = 3$ **f.** $\mathbf{x} = \dfrac{3}{2}, \mathbf{x} = \sqrt{3}, \mathbf{x} = -\sqrt{3}$

TALLER No. 8

1. **a.** $\mathbf{x}=-1$ **b.** $\mathbf{x}=-1,\ \mathbf{x}=-2,\ \mathbf{x}=-3,\ \mathbf{x}=1$

c. $\mathbf{x}=1,\ \mathbf{x}=-1,\ \mathbf{x}=3,\ \mathbf{x}=-3$ **d.** $\mathbf{x}=1,\ \mathbf{x}=-3$ $\mathbf{x}=\frac{3}{2},\ \mathbf{x}=-\frac{2}{3}$

3. Factor; $5\mathbf{x}^4+6\mathbf{x}^3-7\mathbf{x}^2+2\mathbf{x}-5$

4. **a.** $\mathbf{S}=\phi$

5. Ceros: $1,-1,\ 2,-2$

EJERCICIO No. 17

1. **a.** $\mathbf{m}>3$ **c.** $\mathbf{n}<3$ **e.** $\mathbf{x}>0$, **y,** $\mathbf{x}\neq\frac{1}{2}$ **f.** $\mathbf{x}>\sqrt{3}$, **o,** $\mathbf{x}<-\sqrt{3}$

g. $\mathbf{x}>0$

2. **a.** $2^3=8$ **c.** $2^{-2}=\frac{1}{4}$ **e.** $(3\mathbf{x}+1)^{-1}=10$

3. **a.** $\mathbf{log}_{144}12=\frac{1}{2}$ **b.** $\mathbf{log}_4\frac{1}{16}=-2$ **c.** $\mathbf{log}_2 5{,}7=\mathbf{w}+3$

d. $\mathbf{ln}\frac{1}{5}=2\mathbf{m}-1$

4. **a.** $\mathbf{w}=\frac{1}{9}$ **c.** $\mathbf{q}=\frac{3}{2}$ **e.** $\mathbf{w}=-3$ **g.** $\mathbf{q}=1$

EJERCICIO No. 18

1. **a.** $\mathbf{log}_2\left(\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{y}}\right)$ **b.** $\mathbf{log}_\mathbf{b}\left(\frac{\mathbf{x}^3\mathbf{y}^2}{\mathbf{z}^4}\right)$ **c.** $\mathbf{log}_\mathbf{b}\left(\sqrt[5]{\mathbf{x}^2\mathbf{y}^3}\right)$

2. **a.** $\mathbf{b}^{-\mathbf{kt}}=\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{C}}$ **c.** $3\mathbf{M}^2\mathbf{Y}=\frac{1}{10}$

EJERCICIO No. 19

1. **a. No solución** **b** **c.** $\mathbf{x} = 10$ **e.** $\mathbf{x} = 5$ **f.** $\mathbf{x} \approx -0.05958$

h. $\mathbf{x}$ — **j.** $\mathbf{x} =$ □100 **l.** $\mathbf{x} \approx 0.8246$ **n.** $\mathbf{x} \approx - 2\ 3691$

o. $\mathbf{x} \approx -1.1$

3. **a.** La población disminuye.
b. Después de 5 años, hay 452418 habitantes.
c. Aproximadamente 54.9 años.

TALLER No. 9

1. **a.** F. **b.** F **c.** F **d.** F **e.** F **f.** V

3. a. $\mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{Cb^R - m}}{\mathbf{b^R} + 1}$ b. $\mathbf{A} = \dfrac{(\mathbf{b} + \mathbf{c})^3}{\mathbf{M}}$

4. **a.** $\mathbf{k} = 16,3095$ **c.** $\mathbf{k} = 1$

5. El hijo recibe el dinero a los $14^1/_2$ años aproximadamente.

EJERCICIO No. 20

1. **a.** $\mathbf{D_f} = \mathbf{R}$ **c.** $\mathbf{D_f} = \Re$ **e.** $\mathbf{D_f} = \Re - \left\{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right\}$

g. $\mathbf{D_f} = \Re - [-4, 4]$ **i.** $\mathbf{D_f} = \Re$ **k.** $\mathbf{D_f} = \Re - \left[\dfrac{3}{5}, \infty\right)$

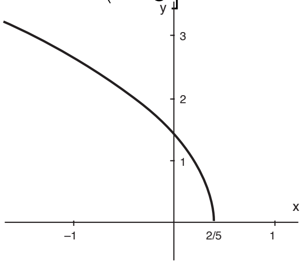
m. $\mathbf{D_f} = [-2, 2]$ **o.** $\mathbf{D_f} = \left[-4, \dfrac{1}{2}\right] \cup [3, \infty)$

2. **a.** $\mathbf{D_f} = (-\infty, 1]$, $\mathbf{D_g} = \Re$ **c1.** $\mathbf{f(a + b)} = \sqrt{1 - \mathbf{a} - \mathbf{b}}$

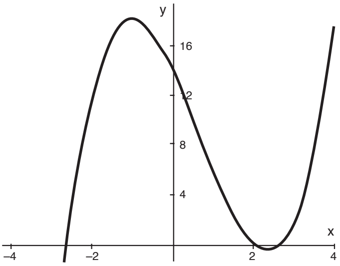
3. **a.** Para que la imagen por la función **f** sea 0, el valor de **x** debe ser 1.

EJERCICIO No. 21

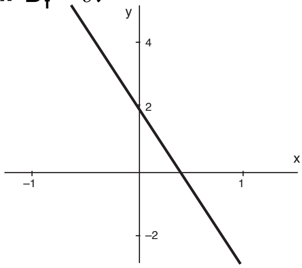
1. **a.** $\mathbf{D_f} = \left(\leftarrow, \frac{2}{5}\right]$



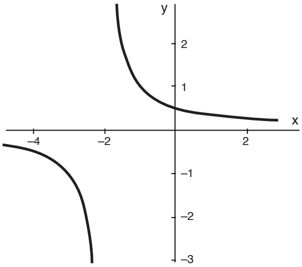
e. $\mathbf{D_f} = \Re$



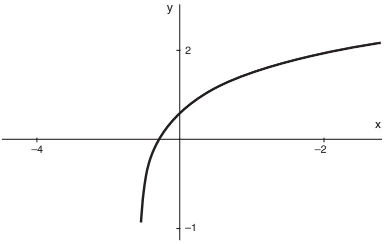
i. $\mathbf{D_f} = \Re$



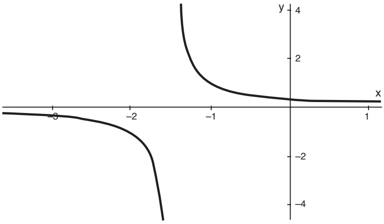
c. $\mathbf{D_f} = \mathbf{R} - \{-2\}$



g. $\mathbf{D_f} = \left(-\frac{2}{7}, \infty\right)$



k. $\mathbf{D_f} = \mathbf{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$



2. **a.** $\mathbf{B} = \left(\dfrac{10\ln 5}{3\ln 2}, 0\right)$ **b.** $\mathbf{R_f} = (-5, \infty)$

3. **a.** Sí. **c.** $\mathbf{R_g} = [-16, 20]$ **f.** $\mathbf{g}(4) = -16$

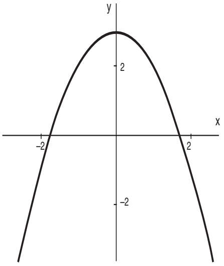
4. **a.** F **b.** V

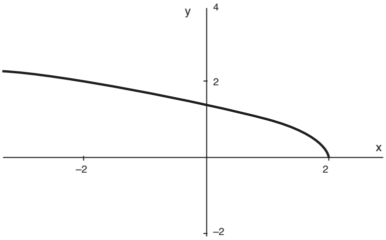
5. **a.** $\mathbf{D_f} = \Re - \{-2\}$ **c.** $\mathbf{P}\left(0, -\dfrac{5}{2}\right)$

e. $-\dfrac{25}{13}$ es el valor del dominio cuya imagen es 10**.**

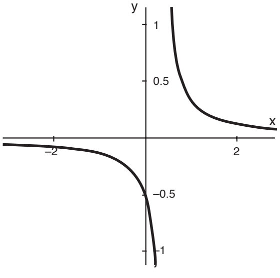
6. $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 3 - \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} - \mathbf{b}^2$; $\mathbf{g}\left(-\dfrac{1}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{9}{5}}$

7. $\mathbf{R_f} = (-\infty, 3]$ $\mathbf{R_g} = \Re^+ \cup \{0\}$





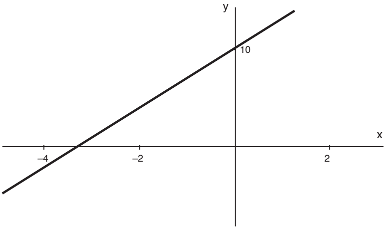
$\mathbf{R_h} = \Re - \{0\}$



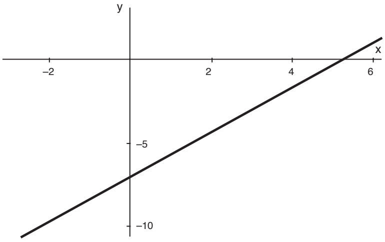
8. **a.** $\mathbf{D_f} = \left[-\dfrac{5}{2}, \infty\right)$ **b.** $\mathbf{R_f} = [-4, 4)$ **c.** $\mathbf{R_f} = \left\{1, \dfrac{3}{2}\right\}$

EJERCICIO No. 22

1. **a.** $\mathbf{m}=3$



c. $\mathbf{m}=\frac{4}{3}$



2. **a.** $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\frac{21}{8}\mathbf{x}-\frac{5}{8}$ **c.** $\mathbf{y}=-\frac{1}{5}\mathbf{x}+\frac{5}{2}$ **e.** $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\frac{105}{2}\mathbf{x}+4500$

3. **a.** $\mathbf{m}_1=\mathbf{m}_2$

4. **a.** Costos fijos de producción: $ 7000000 **c.** Los costos de producir 1500 pares de zapatos son $ 9250000

e. $\mathbf{U}(\mathbf{x})=3500\mathbf{x}-7000000$ **g.** El punto de equilibrio se alcanza cuando se producen y venden 2000 pares de zapatos.

5. **a.** $\mathbf{C}(\mathbf{x})=10\mathbf{x}+8000$ **c.** Produjo 500 unidades.

6. **a.** $\mathbf{C}(\mathbf{x})=100\mathbf{x}+25000$ **e.** Precio de venta es $150.

g. Precio por unidad: $2150

7. **a.** $20 **c.** En **40** unidades**.**

8. **a.** $\mathbf{C}(\mathbf{x})=1700\mathbf{x}+300000$ **c.** $\mathbf{I}(\mathbf{x})=2500\mathbf{x}$

e. Para menos de 375 artículos.

TALLER No. 10

1. Costo total: U$ 850.

3. $\mathbf{C}(\mathbf{x})=50\mathbf{x}+300$

5. **a.** $\mathbf{C}(\mathbf{x})=-5000\mathbf{x}+270000$ **c.** $\mathbf{U}(30)=\$90000$

7. Al producir y vender 500 artículos se alcanza el punto de equilibrio**.**

9. **a.** $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 55\mathbf{x} + 2000$

c. Punto de equilibrio de compañía B: 400 artículos.

11. **a.** $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = -45000\mathbf{x} + 850000$

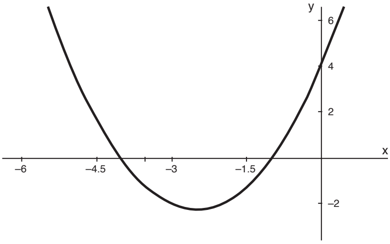
c. Aproximadamente a los 12,2 años de comprada

13. *Fábrica de Edilberto:* $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 500\mathbf{x} + 20000$, Punto de equilibrio: 20 unidades. *Fábrica de Aníbal:* Al producir y vender 60 bolígrafos se maximiza la utilidad, la cual es de $40000

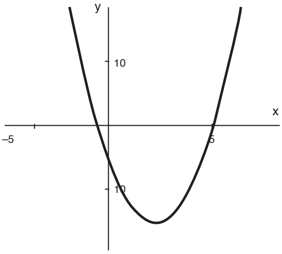
15. *Comercializar en Bogotá:* Costo total: $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 7000\mathbf{x} + 25000$. Ingreso: $\mathbf{I}(\mathbf{x}) = 15000\mathbf{x}$ *Comercializar fuera de Bogotá:* Utilidad: $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = 7080\mathbf{x} - 3000$.

EJERCICIO No. 23

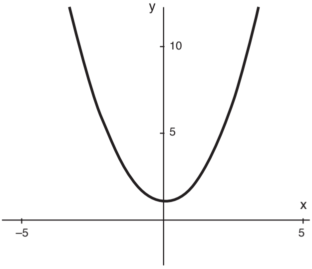
a. $\mathbf{R_f} = \left[-\frac{9}{4}, \infty\right)$



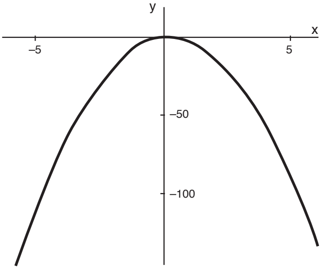
c. **Interceptos: eje x** $\left\{-\frac{1}{2}, 5\right\}$



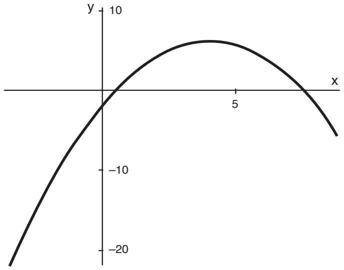
e. $\mathbf{R_f} = [1, \infty)$



g.



i.



2. **a.** Al vender 35 unidades se alcanza utilidad de $1075. **c.** Al vender menos de 7 unidades, y más de 73 unidades. **d.** Al producir y vender 40 unidades se alcanza ganancia máxima de $1100.

3. **a.** $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \frac{5}{8}\mathbf{x} + 5$ **b.** $\mathbf{C} = \left(\frac{7}{2}, \frac{49}{4}\right)$. El ingreso máximo se alcanza al vender 3500 unidades, y es de $**12 250000**

4. **a.** Aproximadamente $11538. **c.** $20000 **e.** Al producir y vender 80 unidades se obtiene una pérdida de $26923 aproximadamente. **g.** Debe producir y vender 26, o 44 unidades. **i**. 35 unidades.

5. **a.** Precio de equilibrio = 150. Cantidad de equilibrio = 75 unidades.

7. **a.** $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = -3\mathbf{x} + 79200$ **d.** Hay ganancias para una producción y venta entre 34 y 5966 unidades

8. **b**. La utilidad máxima se alcanza al producir y vender 1750 unidades, y es de $28625.

9. **a.** $\mathbf{I}(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}^2}{2} + 2500\mathbf{x}$

10. **a.** $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 560\mathbf{x} + 30000$ **c.** Al producir y vender **450** unidades se alcanza una ganancia de $ 43.000.

TALLER No. 11.

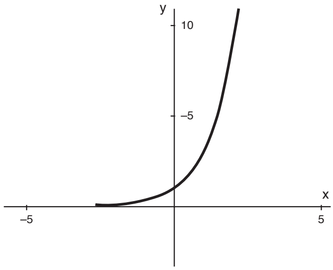
1. **$17.50**
2. Para alcanzar utilidades la fábrica debe producir de 2000 a 10000 palillos inclusive.
3. **b. 25, o 65** unidades. **d.** $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^2 + 620\mathbf{x} + 2800$
4. **a.** Cuatro millones de pesos. **b.** 3000 artículos.
5. 15 unidades.
6. **a.** $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 50\mathbf{x} + 4000$ **c.** 1750 unidades.

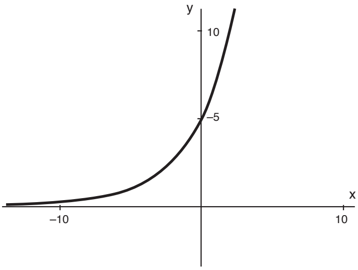
EJERCICIO No. 24

1. **a. 40 495700** habitantes.
2. **a.** Aprox. 714 personas. **c.** Al cabo de **1.77** semanas aprox.
3. **a. U$17854** aprox. **c.** Aprox. **11.2** años.
4. **263858** millones.
5. **b. Aprox. 1.9 minutos.**
6. **a.** La población decrece. **c.** Después de 3 años la población **es de 5120 habitantes.**

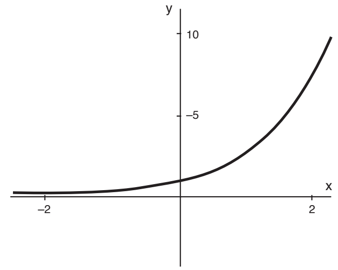
TALLER No. 12

1. a. $\mathbf{D_f} = \Re$ **c.** $\mathbf{R_f} = \Re^+$

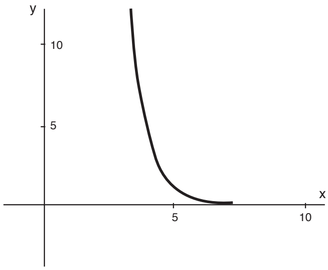




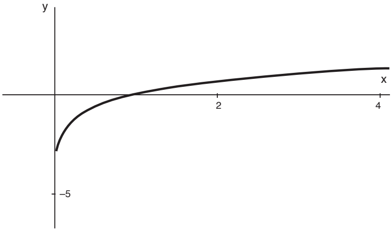
e. $\mathbf{D_f} = \Re$



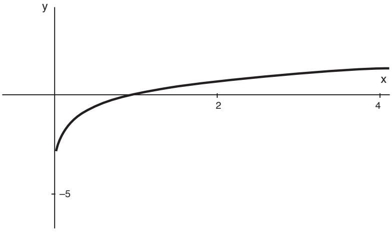
g. $\mathbf{R_f} = \Re^+$



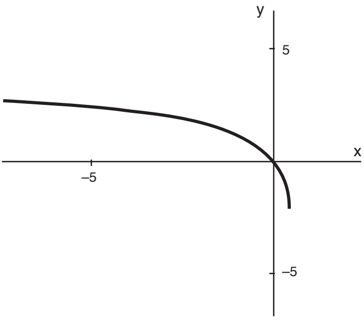
i. $\mathbf{D_f} = \Re^+$



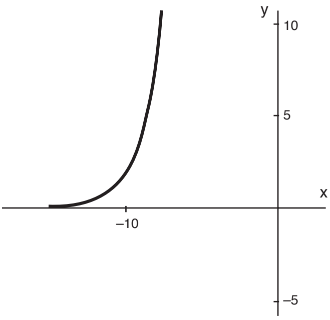
k. $\mathbf{R_f} = \Re$



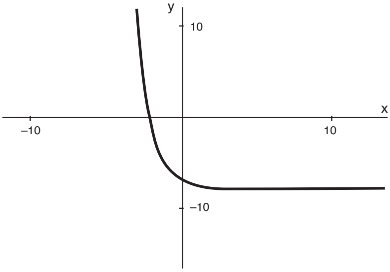
o.



q.



s. $R_f = (-8, \infty)$



2. **a.** No existe. **c.** $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ **e.** No existen. **g.** $-\dfrac{1}{2}$
3. **a.** Después de 2 años están funcionado aprox. 8270 aparatos.
   c. Deben producirse aprox. **30231** transistores
   e. Aprox. **10579** aparatos.
4. **a.** $C(t) = 100000e^{0.0314995t}$ **c. 16.8 meses.**
5. **a.** 30 millones de pesos **b. $369 628000**

EJERCICIO COMPLEMENTARIO

1. F **2.** F. **3.** F. **5.** F. **7.** V **9.** F **11.** V **13.** V **15.** F **19.** F

EJERCICIO No. 25

1. **a.** $(f o g)_x = 3\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 2$ **c.** $(h o g)_x = \log_3\left(-\sqrt{x+1} + 2\right)$
   e. $(h o f)_x = \log_3\left(-3x^3 + 4\right)$
2. **a.** 0.43243
3. **a.** $g(x) = x + 2,\ f(x) = \dfrac{2}{x}$ **c.** $g(x) = x^3 + 5,\ f(x) = \log x$
   e. $g(x) = 2x^5 - 1 \quad f(x) = x^3$ **g.** $g(x) = e^{x+2} - 1,\ f(x) = x^5$

EJERCICIO No. 26

1. **a.** 17 **c.** $\dfrac{-4(1+2a)}{a(a+2)(a+1)(a-1)}$

2. **a.** 13.6

3. Entre el año 0 y el año 15 la población crece a razón de 35 estudiantes por año.

4. **a.** Costo promedio en el intervalo dado es de $25,9 por unidad.
c. El costo promedio al producir 35 unidades es de $87,7 por unidad.

5. **a.** Tasa promedio de cambio del costo: $20000

6. $250

7. **a.** La población aumenta a 1659 aprox.

8. Promedio diario **$4800**

9. Costo promedio: $10000.

10. **a.** El ingreso se incrementa en $ 3360.

11 **a.** La utilidad se incrementa en $90000.

EJERCICIO No. 27

1. **a.** $f'(x) = 0$ **c.** $h'(x) = 14x$ **e.** $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ **g.** $f'(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$

i. $h'(x) = 5e^x\left(\log x + \dfrac{1}{x\ln 10}\right)$ **k.** $g'(r) = 0.04r - \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{9}{r^4}$

2. **a.** $f'(x) = 15x^4$ **c.** $f'(x) = 4 + \dfrac{15}{x^4}$ **e.** $y' = 4e^x - \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

g. $y' = \dfrac{x^2+2x-1}{\left(x^2+4x+5\right)^2}$ **i.** $y' = 6x\left(5x^3+2e^2\right)$

k. $y' = \dfrac{\ln x - 1}{x^2} - \dfrac{1-\ln x}{\ln^2 x}$ **m.** $f'(x) = \dfrac{n}{x}$ **o.** $y' = -\dfrac{5}{x^2} - \dfrac{12}{x^3} - \dfrac{21}{x^4}$

q. $\dfrac{e^x(3x-1) + x\left(5x^2 - 45x + 16\right)}{3x^{4/3}}$

EJERCICIO No. 28

1. **a.** $f'(x)=2x\ln\left(x^2+2x\right)+\dfrac{2x(x+1)}{x+2}$ **c.** $y'=\dfrac{20x\ln\left(x^2+5\right)^9}{\left(x^2+5\right)(\ln 3)^{10}}$

e. $f'(x)=0$ **g.** $y'=xe^{0.3x}(10+1.5x)$ **i.** $y'=1$

k. $f'(x)=\dfrac{4x^2(7x+15)}{(7x+10)^2}$ **m.** $e^{0.2x}\left(0.6\ln(7x-1)+\dfrac{21}{7x-1}\right)$

o. $f'(x)=\dfrac{3x^3+10}{2x^3}$ **q.** $f'(x)=5x^4-\dfrac{4}{7}x$

s. $f'(x)=-\dfrac{12x^2}{\left(x^3-1\right)^2}-3$ **u.** $f'(z)=\dfrac{e^{5z+2}\left(5z^3-3z^2-5\right)-9z^2}{\left(z^3-1\right)^2}$

3. **b. 2**

4. **a.** $-3e^3+1$

5. **a.** $(f\circ g)'=-\dfrac{4x}{\left(x^2-4\right)^2}$

6. Al comienzo del séptimo mes, la tasa de crecimiento de la epidemia es de 26919 personas infectadas por mes.

7. **b.** Entre 1994 y 1998 la población descendió en promedio 968,5 habitantes por año.

9. Al comienzo de la quinta semana, la tasa de cambio de uso del sistema fue de 950 personas por mes.

EJERCICIO No. 29

1. **a.** $y=x-1$ **c.** $y=12x+8$ **e.** $y=\dfrac{23}{27}x+1$ **g.** $y=x+b$

2. **a.** $x=\sqrt{37}-7,\ x=-\sqrt{37}-7$ **c.** $x=4+\sqrt{31},\ x=4-\sqrt{31}$

e. $x=2$ **g.** $x=0$ **i.** No existe.

3. **a.** $x=-1$ **c.** $x=0,\ x=-\dfrac{2}{3}$ **e.** $x=2$

TALLER No. 13

2. **a.** $x = -\frac{5}{4}$ **c.** $x = \frac{1}{2},\ x = \frac{1}{3},\ x = \frac{1}{12}$

e. $x = 0,\ x = 4, x = 5.\ x = -\frac{2}{3},\ x = -\frac{5}{33}$

3. **a.** $f'(x) = e^{5x}(5x+1) + \frac{4}{3(4x-1)^{2/3}}$ **c.** $6e^{6x} + 30x^2(5x^3+2)$

5. **a.** Aprox. 783 llaveros.

c. El promedio diario de incremento en la producción entre el día quinto y décimo es de 22.4 llaveros por día.

d. A un ritmo de 20.3 llaveros por día aprox.

6. **a.** 59 artículos.

7. **b.** En el quinto día.

8. **a.** El incremento en la utilidad es de 1500 dólares.

9. a. $y = -\frac{325}{27}x + \frac{35}{3}$

10. b. $x \approx -0.816$ **o** $x \approx 0.816$

EJERCICIO No. 30

1. **a.** $\overline{C(x)} = \frac{3000}{x} + 20,\ C'(x) = 20$

c. $\overline{C(x)} = e^{0.2x},\ C'(x) = e^{0.2x}(0.2x+1)$

e. $\overline{C(x)} = 7x - 2 + \frac{3000}{x}$ $C'(x) = 14x - 2$

3. **b.** $I(5) = 692.06,\ \overline{I(5)} = 138.4,\ I'(5) = 880.48$

4. **a.** 1200 unidades. **c.** $(0, 1200)$

5. **a.** $\overline{C(x)} = \frac{1}{5}x + \frac{2000}{x}$ **c.** 316 unidades aprox.

e. 200, o, 500 unidades. **g.** (0, 316.23)

6. **A**$(0, 12)$ **B**$(\sim 4.764\ ,\ \sim 2.472)$
C$(4, 0)$ **D**$(6,0)$ **E**$(8, 0)$ **F**$(6, 4)$

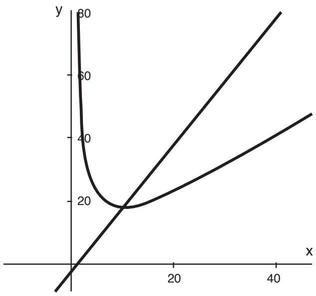
7. **b.** $\mathbf{x} = 0,\ \mathbf{x} = 5,\ \mathbf{x} = 7$ **d.** $(4,\ \infty)$

8. **b.** **A**$(\sim 0.2324\ ,\ \sim -0.21985)$
C$(\sim 1.4343\ ,\ 1.5)$
c. Utilidad marginal máxima: $ 2166.66

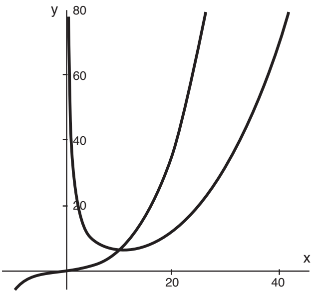
9. **a.** $\mathbf{C}'(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}\mathbf{x}^2 + 3,\ \mathbf{I}'(\mathbf{x}) = \frac{75 - 2\mathbf{x}}{3}$ **c.** $135.12

TALLER NO. 14

1b.



1d.



2. **a.** **A**$(1, 0)$ **B**$(2, 0)$ **C**$\left(\frac{9}{4}, \frac{15}{8}\right)$

3. **b.** Ingreso máximo: $9250

4. $\mathbf{y} = -2\mathbf{x} + 16$

Bibliografía

JAIME, Lida; MOSCOTE, Orlando; ACERO, Dora Elvira. *Matemáticas básicas. Sistemas.* Politécnico Grancolombiano, Santa Fe de Bogotá, D.C., 1995.

JAIME, Lida; MOSCOTE, Orlando; ACERO, Dora Elvira. *Matemáticas avanzadas. Sistemas.* Politécnico Grancolombiano, Santa Fe de Bogotá, D.C., 1988.

JAIMES, Nidia; ACERO, Dora Elvira. *Matemáticas básicas.* Politécnico Grancolombiano, Santa Fe de Bogotá, D.C., 1991.