





**MATEMÁTICA BÁSICA  
MERCADERO Y PUBLICIDAD**



**MATEMÁTICA BÁSICA  
MERCADERO Y PUBLICIDAD**

**Primera edición**

**EDGAR ALBERTO BARÓN POVEDA**

**LOGO EDITORIAL**

© **Edgar Alberto Barón Poveda**

© **Fundación Politécnico Grancolombiano 2006**

Editorial Politécnico Grancolombiano

Calle 57 No. 3 – 00 Este

Telfax: 3 46 88 00 ext. 568

Bogotá, D.C. Colombia

**Primera Edición 2006**

ISBN 958-8085-62-4

**Editor**

Eduardo Norman Acevedo

**Coordinador de Producción Editorial**

Carolina Jaramillo Carvajal

**Corrección de Estilo**

Lilián Bernal Rozo

**Diseño y diagramación**

Santiago García Bermúdez

**Impresión y encuadernación**

**Impreso y hecho en Colombia**

Editorial perteneciente a la Asociación de Editoriales Universitarias de Colombia, ASEUC.

Todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida ni en su totalidad ni en sus partes, ni registrada en o transmitida por un sistema de recuperación de información en ninguna forma ni por ningún medio sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electro óptico para fotocopia o cualquier otro, sin el permiso previo de la editorial.

*A la brisa de mayo.*

# CONTENIDO

## PRESENTACIÓN

## CAPÍTULO 1. SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

### I. INTRODUCCIÓN

1.1. EJERCICIOS

1.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

### II. OPERACIONES ENTRE NÚMEROS REALES

2.1. EJERCICIOS

2.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

### III. POTENCIACIÓN

3.1. PROPIEDADES

3.1.1. Ejercicios

3.1.2. Respuestas a los ejercicios

### IV. OPERACIONES CON FRACCIONARIOS

4.1. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

4.1.1. Ejercicios

4.1.2. Respuestas a los ejercicios

4.2. TANTO POR CIENTO O PORCENTAJE

4.3. EL TANTO POR MIL O PORMILAJE

4.3.1. Ejercicios

4.3.2. Respuestas a los ejercicios

### V. POTENCIAS RACIONALES

5.1. EJERCICIOS

5.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

### VI. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

## **VII. FACTORIZACIÓN**

7.1. EJERCICIOS

7.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

## **VIII. FRACCIONES ALGEBRAICAS**

## **IX. OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS**

9.1. EJERCICIOS

9.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

## **X. ECUACIONES**

10.1. PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

10.2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

10.2.1. Ejercicios

10.2.2. Respuestas a los ejercicios

10.3. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO

10.3.1. Ejercicios

10.3.2. Respuestas a los ejercicios

10.4. ECUACIONES CUADRÁTICAS

10.4.1. Ejercicios

10.4.2. Respuestas a los ejercicios

10.5. ECUACIONES CON RADICALES

10.5.1. Ejercicios

10.5.2. Respuestas a los ejercicios

## **XI. INECUACIONES**

11.1. PROPIEDADES DE LAS IGUALDADES

11.1.1. Ejercicios

11.1.2. Respuestas a los ejercicios

11.2. APLICACIONES DE LAS INECUACIONES

11.2.1. Ejercicios

11.2.2. Respuestas a los ejercicios

# **CAPÍTULO 2. FRACCIONES REALES DE VARIABLE REAL**

## **I. INTRODUCCIÓN**

- 1.1. EJERCICIOS
- 1.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

## **II. FUNCIÓN LINEAL**

- 2.1. EJERCICIOS
- 2.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

## **III. FUNCIÓN CUADRÁTICA**

- 3.1. EJERCICIOS
- 3.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

## PRESENTACIÓN

La intención al escribir este libro, es la de proponer un trabajo orientado a la recuperación significativa de las nociones y conceptos de matemáticas que hacen parte de la formación básica del estudiante que inicia la carrera de Mercadeo y Publicidad.

En este material se abordan dos grandes temas: El estudio del sistema de los números reales y el estudio de funciones de valor real. Las explicaciones se presentan desde la matemática. Se invita al lector a leer cuidadosamente el material y a realizar cada uno de los ejercicios propuestos, cuyas respuestas se incluyen en el texto.

El mercadeo así como la publicidad necesitan de un escenario cuantitativo que apoye la toma de decisiones, y para ello el trabajo con matemáticas es parte importante para implementar de manera comprensiva algunos modelos, escritos en lenguaje matemático, que permiten realizar análisis sobre las situaciones problema, tales como: proyectar ingresos, proyectar utilidades, definir rutas, ayudar a fortalecer las estrategias de comunicación y el ciclo de vida del producto, para apoyar la estrategia de mercadeo en general. En este material se presentan unos modelos sencillos que intentan mostrar un primer acercamiento a este tipo de trabajo.



# 1

## SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

### I. INTRODUCCIÓN ●●●●

En lo que sigue, nos ocuparemos de presentar las distintas clases de números que conforman el conjunto de los números reales y luego nos centraremos en la comprensión y utilización de las propiedades de las operaciones definidas en este conjunto.

El conjunto de los números naturales, notado por  $\mathbf{IN}$ , lo escribimos así:

$$\mathbf{IN} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

El conjunto de los números enteros, notado por  $\mathbf{Z}$  lo escribimos:

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Observe que este conjunto está conformado por todos los números naturales, el cero y los opuestos de cada número natural.

El conjunto de los números racionales, notado por  $\mathbf{Q}$ , lo escribimos así:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbf{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

Esta simbolización nos dice en primer lugar, que para que un número pertenezca al conjunto  $\mathbb{Q}$  debe poder ser escrito en la forma  $\frac{a}{b}$ .

En segundo lugar,  $a$  y  $b$  representan números enteros, es decir,  $a$  y  $b$  varían o toman valores en el conjunto de los números enteros y, por último,  $b$  no puede asumir el valor cero.

Es así como podemos afirmar que los números naturales, los números enteros y cocientes entre ellos con la condición dada, forman el conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$ .

Así que:  $\mathbb{Q} = \{ \dots, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{7}, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \dots \}$

Consideramos ahora algunos números del conjunto  $\mathbb{Q}$ , y escribámoslos en forma decimal:

$$\frac{3}{2} = 1,5 \quad , \quad \frac{1}{3} = 0,3333\dots \quad , \quad -\frac{9}{4} = -2,25$$

$$\frac{729}{16} = 45,5625 \quad , \quad -\frac{7}{3} = -2,3333\dots$$

Puede apreciarse que a cada uno de los anteriores números racionales le corresponde una única expansión decimal ya sea finita, como en el caso de  $\frac{3}{2}$ ,  $-\frac{9}{4}$ ,  $\frac{729}{16}$ , o infinita periódica como ocurre para  $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{7}{3}$ . En general, esto mismo se da para cada uno de los números del conjunto  $\mathbb{Q}$ .

Existen también otros números como por ejemplo:

$$\sqrt{3} = 1,7320508\dots \quad , \quad \pi = 3,1415964\dots \quad , \quad \sqrt{2} = 1,4142\dots$$

cuya expansión decimal es infinita no periódica. Estos números no se generan a partir de un número racional y forman el conjunto de los números irracionales, que se denota mediante  $\mathbb{I}_r$ .

Un criterio para obtener números irracionales: si  $n \in \mathbb{N}$  y  $n$  no es cuadrado perfecto, entonces,  $\sqrt{n}$  es un número irracional.

A partir de lo que hemos presentado, podemos clasificar los números de acuerdo con su expansión decimal, de la siguiente manera:

- Si la expansión decimal de un número es finita o infinita periódica, el número es racional.
- Si la expansión decimal de un número es infinita no periódica, el número es irracional.

Así, decimos entonces que el conjunto formado por los números racionales junto con los números irracionales, recibe el nombre de conjunto de los números reales. Este conjunto, el de los números reales, lo notamos mediante  $\mathbb{R}$ .

En notación conjuntista:

$$\mathbb{R} = \{ x : x \in \mathbb{Q} \text{ o } x \in \mathbb{I}_r \}$$

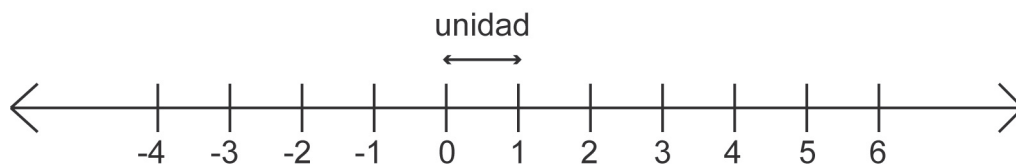
En síntesis, un número es real si el número es racional o es irracional.

Los números reales pueden ser también representados geoméricamente en una recta numérica, haciendo corresponder a cada número real un único punto de la recta numérica.

Para ello, determinamos en la recta numérica un punto de referencia: el cero, de tal manera que a la derecha de este punto se escriben los reales positivos, notados  $\mathbb{R}^+$ ; y a la izquierda del punto, se escriben los reales negativos, notados  $\mathbb{R}^-$ .

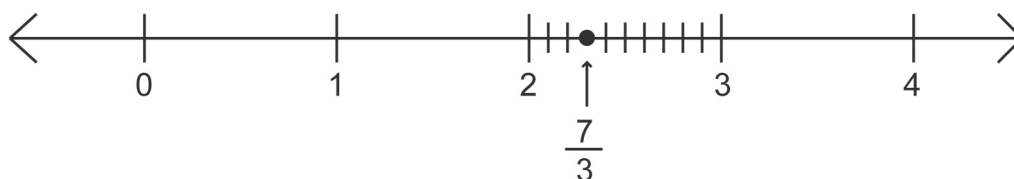
A partir del punto de referencia, el cero, ubicamos un nuevo punto. La distancia que hay entre el punto de referencia y el nuevo punto, determina una unidad que será la que utilizaremos para dividir la recta numérica en partes iguales.

Observemos la figura siguiente. Allí aparece el punto de referencia y algunas divisiones de la recta numérica a partir de la unidad que hemos definido.



Para ubicar en esta recta numérica, de manera aproximada, el número  $\frac{7}{3}$ , lo expresamos en forma decimal, esto es,  $\frac{7}{3} = 2,3333\dots$  que podemos aproximar a 2,3.

2,3 se encuentra entre 2 y 3. Dividimos en diez partes iguales este segmento y tomamos 3 de ellas:



## NOTAS

1. Un conjunto se define como una colección o agrupación de elementos de la misma naturaleza. Se designa con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas.

Si un elemento  $x$  hace parte de un conjunto  $A$ , se escribe  $x \in A$  ( $x$  pertenece a  $A$ ); si el elemento  $x$  no hace parte del conjunto  $A$ , se escribe  $x \notin A$  ( $x$  no pertenece a  $A$ ).

Un elemento  $x$  hace parte de un conjunto  $A$ , si  $x$  cumple con la propiedad  $P$  que se define para los elementos de  $A$ , en símbolos:

$$A = \{x : x \text{ cumple con } P\}$$

**Ejemplo:**

Sea  $A = \{x : x \text{ es un número par}\}$

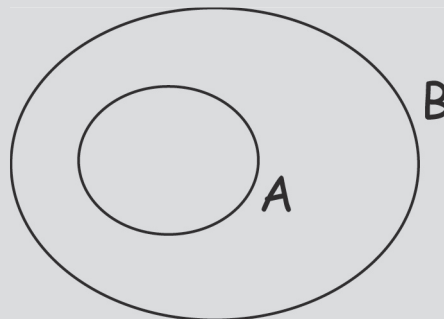
$$2 \in A \quad , \quad 3 \notin A \quad (3 \text{ no es par})$$

2. Un conjunto  $A$  se dice que es un subconjunto de un conjunto  $B$  si todos los elementos de  $A$  están o pertenecen a  $B$ .

También se dice, de manera equivalente, que  $A$  está contenido en  $B$ , o que  $B$  contiene a  $A$ .

El hecho de que  $A$  sea subconjunto de  $B$ , se simboliza  $A \subseteq B$ .

En un diagrama, aparece así:



$$A \subseteq B$$

**Ejemplos:**

- El conjunto de los números naturales,  $\mathbb{N}$ , es subconjunto del conjunto de los números enteros,  $\mathbb{Z}$ . En símbolos:  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

- El conjunto de los números naturales,  $\mathbb{N}$ , es subconjunto del conjunto de los números racionales,  $\mathbb{Q}$ . En símbolos:  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ .
- El conjunto de los números racionales,  $\mathbb{Q}$ , contiene al conjunto de los números enteros,  $\mathbb{Z}$ . En símbolos:  $\mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z}$  o lo que es lo mismo,  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ .

## 1.1. EJERCICIOS ●●●●

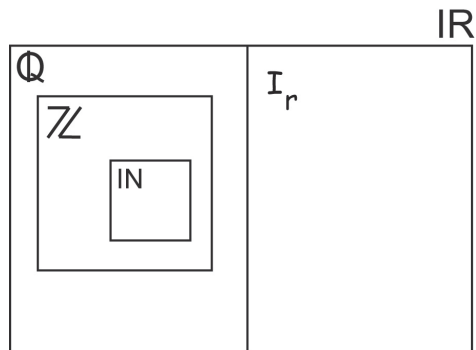
- 1. Escribir el siguiente cuadro a cuál o cuáles conjuntos numéricos pertenece cada número real.

NÚMERO REAL	CONJUNTO(S) NUMERICO(S)
$\frac{7}{9}$	
0	
$-\sqrt{5}$	
-3	
6,2127	
$\frac{8}{4}$	
9	

- 2. Ubicar (de manera aproximada) los siguientes números en la recta numérica:

$$-3,4, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{3}, \quad -\frac{7}{4}, \quad \sqrt{3}, \quad -\sqrt{2}, \quad -\frac{13}{4}, \quad 0, \quad -2, \quad 5$$

→ 3. Un diagrama utilizado para visualizar los números reales es el siguiente:



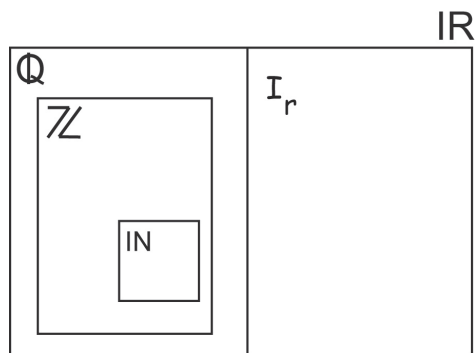
En él, se muestran las contencencias que hay entre los conjuntos numéricos.

Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

- a) Todo número entero es también número natural.
- b) Existen números racionales que son también números irracionales.
- c) Todo número entero es también número racional.

→ 4. Sea  $X = \{ -3, 7,2125, -\frac{5}{4}, 9, \sqrt{15}, 12, -17, \sqrt{7} \}$

Ubicar los elementos del conjunto X en el siguiente diagrama, según corresponda.



↳ 5. Escribir tres números racionales que se encuentren entre:

- a)  $\frac{1}{2}$  y 1      b) -4 y  $-\frac{7}{2}$       c) 0 y 1

↳ 6. Escribir:

- a) Un número racional no entero.
- b) Un número entero que no sea número natural.
- c) Dos números racionales cuya expansión decimal sea finita.
- d) Dos números racionales cuya expansión decimal sea infinita periódica.
- e) El mayor número natural menor que  $\frac{3}{2}$ .

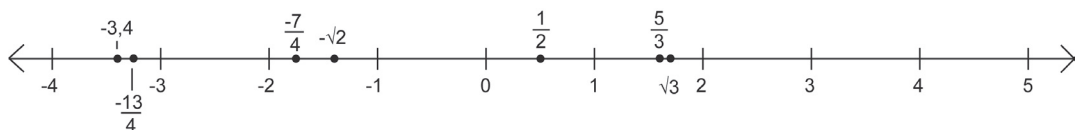
## 1.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS ●●●●

1.

$$-\frac{7}{4} \in \mathbb{Q} , \quad 0 \in \mathbb{Z} , \quad -\sqrt{5} \in \mathbb{I}_r , \quad -3 \in \mathbb{Z} \text{ y } -3 \in \mathbb{Q} ,$$

$$6,2127 \in \mathbb{Q} , \quad \frac{8}{4} \in \mathbb{Q} \text{ y } \frac{8}{4} \in \mathbb{Z} \text{ y } \frac{8}{4} \in \mathbb{N} , \quad 9 \in \mathbb{N} \text{ y } 9 \in \mathbb{Z}$$

2.



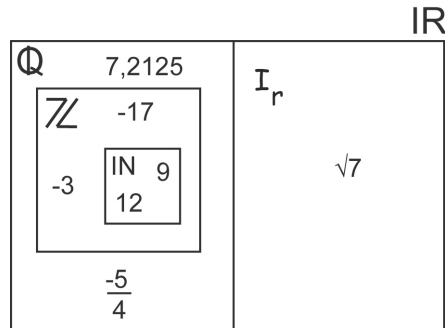
3.

a) Falsa.  $-3 \in \mathbb{Z}$  ,  $-3 \notin \mathbb{IN}$

b) Falsa. Un número real o bien es racional, o bien es irracional.

c) Verdadera, ya que todo número entero puede escribirse en la forma  $\frac{a}{b}$ .  
Además, observe que  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  .

4.



5.

a) 0,6 , 0,8 y 0,94

b) -3,60 , -3,56 , -3,59

c) 0,001 , 0,03 , 0,8

6.

a)  $\frac{1}{2}$

b) -4

c)  $\frac{5}{2}$  y  $\frac{7}{4}$

d)  $\frac{3}{7}$  y  $\frac{1}{3}$

e) 1

## II. OPERACIONES ENTRE NÚMEROS REALES ●●●●

En el conjunto de los números reales,  $\mathbb{R}$ , se definen dos operaciones binarias: adición, notada por  $+$ ; y multiplicación, notada por  $\cdot$ .

Se dice que las operaciones son binarias porque se establecen entre dos números reales. A continuación se enuncian las propiedades que tienen estas operaciones.

Sean  $x, y, z, k$  números reales. Al escribir esto, se está indicando que las letras  $x, y, z, k$  representan a cualquier número real. Es decir, que  $x, y, z, k$  pueden asumir valores en el conjunto de los números reales. Como no hay otra condición para estas letras, se debe entender que pueden tomar el mismo valor real o valores diferentes.

### 1. Propiedad clausurativa

- Al sumar dos números reales  $x, y$ , el resultado obtenido es nuevamente un número real que además es único. Este hecho se simboliza por medio de  $x + y$ .
- Al multiplicar dos números reales  $x, y$ , el resultado obtenido es nuevamente un número real que además es único. Este hecho se simboliza por medio de  $x \cdot y$  o también por  $xy$ .

### 2. Propiedad conmutativa

- $x + y = y + x$ . Es posible cambiar el orden de los sumandos y el resultado sigue siendo el mismo.
- $xy = yx$ . Es posible cambiar el orden de los factores y el resultado sigue siendo el mismo.

### 3. Propiedad asociativa

$$x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z = (x + z) + y$$

Aquí se exhibe la propiedad aplicada a tres sumandos, con lo cual se quiere mostrar la necesidad de agrupar de a dos sumandos para poder realizar la operación, ya que no es posible operar al mismo tiempo los tres sumandos.

Las asociaciones que se escriben se encuentran avaladas por las propiedades clausurativa y conmutativa.

Igual ocurre para la multiplicación:

$$x y z = x (y z) = (x y) z = (x z) y$$

### 4. Propiedad modulativa

$$\begin{aligned} x + 0 &= 0 + x = x \\ x \cdot 1 &= 1 \cdot x = x \end{aligned}$$

### 5. Propiedad invertiva

- Para cada número real  $x$ ,  $x \neq 0$ , existe su correspondiente opuesto (inverso aditivo), notado  $-x$ , tal que  $x + (-x) = 0$

**Ejemplo:**

NÚMERO	OPUESTO
5	-5
$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
-10	$-(-10) = 10$
$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$

Observe que si el número es - 10, su opuesto se escribe - (- 10) que es a la postre 10.

- Para cada número real  $x$ ,  $x \neq 0$ , existe su correspondiente recíproco (inverso multiplicativo), notado  $x^{-1}$ , tal que  $x x^{-1} = 1$  en donde  $x^{-1} = \frac{1}{x}$ .

**Ejemplo:**

NÚMERO	RECÍPROCO
7	$7^{-1} = \frac{1}{7}$
-15	$(-15)^{-1} = -\frac{1}{15}$
$\sqrt{6}$	$(\sqrt{6})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}}$
$\frac{5}{2}$	$(\frac{5}{2})^{-1} = \frac{2}{5}$

### 6. Propiedad distributiva

El producto de dos factores, en el que cada factor aparece como una suma de dos o más términos, se puede expresar de la siguiente manera:

$$(x + y)(z + k) = xz + xk + yz + yk$$

**Ejemplos:**

1. a) Operar:  $2 + 3 \cdot 5$

Observe que aparecen dos sumandos: 2 y  $3 \cdot 5$ . De acuerdo con la propiedad clausurativa, para operar se deben tener dos sumandos cuyos valores sean conocidos. Para este caso, el sumando  $3 \cdot 5$  necesita ser operado para obtener su valor, luego:

$$\begin{aligned} & 2 + 3 \cdot 5 \\ &= 2 + 15 \\ &= 17 \end{aligned}$$

b) Operar:  $7 - 3(4 - 6)$

Aparecen dos sumandos: 7 y  $3(4 - 6)$ . Teniendo en cuenta la propiedad clausurativa y la propiedad invertiva, se puede escribir:

$$\begin{aligned} & 7 - 3(4 - 6) \\ &= 7 - 3(-2) \\ &= 7 - (-6) \\ &= 7 + 6 \\ &= 13 \end{aligned}$$

O también de la siguiente manera, considerando además la propiedad distributiva y asociativa:

$$\begin{aligned} & 7 - 3(4 - 6) \\ &= 7 - 3 \bullet 4 - 3(-6) \\ &= 7 - 12 - (-18) \\ &= 7 - 12 + 18 \\ &= (7 - 12) + 18 \\ &= (-5) + 18 \\ &= 13 \end{aligned}$$

2. Simbolizar y calcular.

a) El doble del opuesto de 7:

$$2(-7) = -14$$

b) La suma entre, cinco veces el opuesto de - 2 y el triplo de 9:

$$5[-(-2)] + 3(9) = 5(2) + 27 = 10 + 27 = 37$$

c) Cuatro veces la diferencia entre el opuesto de 5 y el triplo de 2:

$$4[-5 - 3(2)] = 4[-5 - 6] = 4[-11] = -44$$

## 2.1. EJERCICIOS ●●●●

→ 1. Si  $a$  representa el opuesto de  $b$ ,  $b = 5c$  y  $c = -3$ , encontrar el valor numérico de:  $7 - 2[a - (b + c)(-2)] - (-c)$

→ 2. Si  $m - n = -5$ , encontrar el valor de:  
*Nota:* Indicar qué propiedades de las operaciones entre números reales utilizó.

a)  $4 + m - (7 + n)$

b)  $5(m - 3) + 2(-2m + n) - 3n$

c)  $3 - (n - m) + (-5)$

→ 3. Si  $xy = 12$ , encontrar el valor en cada caso. Indicar las propiedades de las operaciones que utilizó.

a)  $3 - (2x)(-y)$

b)  $4(y)(5x)$

c)  $5(4x)(7 - 3)(-2)(y)$

→ 4. Completar la siguiente tabla:

x	y	-x	-y	-(x+y)	-x-(xy)	$[-x-(xy)]^{-1}$	$-[-x-(xy)]$
-3	5						
		-2	-4				
	6	-9					

→ 5. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o es falsa. Justificar.

a) Si  $k$  es un entero negativo,  $m$  es un entero negativo y  $n$  es un número natural, entonces,  $-5km + nkm$  es un entero negativo.

b) Si  $a = -3$ ,  $b$  es el opuesto del doble de  $a$ , entonces:

$$-a - b(7 + a)(2) - (-b - a) = 54$$

c) El conjunto formado por los números pares es subconjunto del conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$ .

6. Lea cuidadosamente el procedimiento que aparece para operar y simplificar  $10 - 4[-3(4 - 2)(-5) - (-7 - 2)] - 3$ ; señale los errores cometidos, e indique cuál o cuáles de las propiedades de las operaciones entre números reales es infringida. Luego, realícelo de manera correcta.

$$\begin{aligned}
 & 10 - 4[-3(4 - 2)(-5) - (-7 - 2)] - 3 \\
 & = 6[-3(2)(-5) - (9)] - 3 \\
 & = 6[-6 + 15 - 9] - 3 \\
 & = 6[0] - 3 \\
 & = -3
 \end{aligned}$$

7. Realice lo mismo que se indica en el ejercicio 6, para:

$$\begin{aligned}
 & -9 - 4 - 3 [ - (3 - 5 + 7) (-2 - 1 - 3) - (-4) ] + (-11 - 10) \\
 & = -9 - 4 - 3 [ -3 + 5 - 7 (-6) + 4 ] + 21 \\
 & = -9 - 4 - 3 [ -3 + 5 + 42 + 4 ] + 21 \\
 & = -9 - 4 - 3 [ 48 ] + 21 \\
 & = -9 - 4 - 144 + 21 \\
 & = -136
 \end{aligned}$$

## 2.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS ●●●●

1.  $a = 15$ ,  $b = -15$ ,  $c = -3$ . El valor numérico de la expresión es: 46

2. a) - 8 b) - 20 c) - 7

3. a) - 72 b) 240 c) - 1920

4.

x	y	-x	-y	-(x+y)	-x-(xy)	$[-x-(xy)]^{-1}$	$-[-x-(xy)]$
-3	5	3	-5	-2	18	$\frac{1}{18}$	-18
2	4	-2	-4	-6	-10	$-\frac{1}{10}$	10
9	6	-9	-6	-15	-63	$-\frac{1}{63}$	63

5. a) Falsa. (Sugerencia: reemplace las letras por valores para los cuales ellas están definidas).

b) Verdadera.

c) Verdadera.

### III. POTENCIACIÓN ●●●●

Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ veces}}$ . Es decir, la base  $x$  es el factor

que se multiplica por sí mismo  $n$  veces.

En  $x^n$ ,  $x$  se denomina la base y  $n$  la potencia.

Si  $x \neq 0$ , entonces  $x^0 = 1$

Si  $x \in \mathbb{R}$ , entonces,  $x^1 = x$

#### 3.1. PROPIEDADES ●●●●

a)

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

Observe por qué esta propiedad es cierta. Basta con aplicar la definición de potenciación así:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ veces}}$$

$$x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{m \text{ veces}}$$

Luego

$$\begin{aligned} x^n \cdot x^m &= \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{m \text{ veces}} \\ &= \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{m+n \text{ veces}} \\ &= x^{n+m} \end{aligned}$$

**Ejemplo:**

$$2^4 \cdot 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10} = 1.024$$

O lo que es lo mismo:

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\text{Luego. } 2^4 \cdot 2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 1.024$$

b)

$$(x^n)^m = x^{m \cdot n}$$

Observe por qué:

$$(x^n)^m = \underbrace{x^n \cdot x^n \cdot x^n \cdot \dots \cdot x^n}_{m \text{ veces}} \quad [\text{Por definición de potenciación}]$$

$$= x^{\underbrace{n+n+n+\dots+n}_{m \text{ veces}}}$$

$$= x^{m \cdot n}$$

**Ejemplo:**

$$(5^2)^3 = 5^{3(2)} = 5^6 = 15.625$$

c)

$$(xy)^n = x^n y^n$$

Queda, como ejercicio, mostrar por qué es cierto.

**Ejemplo:**

$$(3a^2)^5 = 3^4 (a^2)^5 = 3^4 a^{5(2)} = 3^4 a^{10} = 81a^{10}$$

d)

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

**Ejemplo:**

Calcular  $\frac{2^5}{2^7}$

Aplicando la propiedad,  $\frac{2^5}{2^7} = 2^{5-7} = 2^{-2}$

Pero, ¿qué significa la notación  $2^{-2}$  en la cual el exponente es un número entero, en este caso - 2?

Aplicando la propiedad b) se puede escribir  $2^{-2} = (2^2)^{-1}$ , lo cual

equivale a decir que se está refiriendo al recíproco de  $2^2$ , luego:

$$2^{-2} = (2^2)^{-1} = (4)^{-1} = \frac{1}{4}$$

En general, la notación  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ , con  $x \neq 0$  se puede interpretar como el recíproco de  $x^n$ .

**Ejemplo:**

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

(El recíproco de  $5^3$  es  $\frac{1}{125}$ )

### 3.1.1. Ejercicios



1. Simbolizar y calcular:



a) La diferencia entre, siete y el cubo de 4.

b) El cuadrado de la diferencia entre 9 y 6.

c) La diferencia de los cuadrados de 9 y 6.

d) Dos veces el cubo de la suma de 4 y el opuesto de - 3.

2. ¿Es cierto que: el cuadrado del opuesto de 3 es igual al opuesto del cuadrado de 3? Justificar.



3. ¿Es cierto que  $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ? Justificar.



4. Efectuar:



a)  $(-3-x)^2$

b)  $(2-a)^3$

$$c) \quad (-2 - 3 - n)^2$$

→ 5. Operar y simplificar:

$$a) \quad -(5-3)^2(-3) - 2 + 4 \left[ (-3-2)(-2-3)^2 - (-4) \right]$$

$$b) \quad -(x-a)^2(-3) + 5x^2 - 7(x-4) - (-2)^2$$

$$c) \quad (x-3)(3-x) - (x-3)^2(-5)$$

$$d) \quad -(-2-4+7)(-5) - (-3-2)^2 \left[ (-2-3)^5 (-2-3)^{-5} \right] + 7$$

→ 6. Simplificar:

$$a) \quad \frac{3(a^2b)^{-3}d}{15a^4b^{-2}d}; \quad a, b, d \neq 0$$

$$b) \quad \frac{5(2n)^{-2}(m^{-3}n^{-1})^3}{4m^7n^5}; \quad m, n \neq 0$$

→ 7. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o es falsa. Justificar.

a) Si  $k$  es un entero negativo y  $m \in \mathbb{N}$ , entonces,  $-5km^2 + k^4m^3$  es un entero negativo.

b) Para todo  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  el opuesto del recíproco de  $a^n$  es  $-\frac{1}{a^n}$ .

→ 8. Mostrar por qué son ciertas las propiedades c) y d).

→ 9. Si  $x = 5y^3$ ,  $z = 3y^6$  comprobar que  $\frac{x^2 - 8z}{y}$  es igual a  $y^5$ .

### 3.1.2. Respuestas a los ejercicios ●●●●

1. a)  $7 - (4)^3 = 7 - 64 = -57$

b)  $(a - 6)^2 = (3)^2 = 9$

c)  $9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45$

d)  $2[4 + 3]^3 = 2[7]^3 = 2(343) = 686$

2. Falso. El cuadrado del opuesto de 3 es:  $(-3)^2 = 9$

El opuesto del cuadrado de 3 es:  $-(3)^2 = -9$

3. Falso.  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$  [Por definición de potenciación]  
 $= a(a + b) + b(a + b)$  [Aplicando propiedad distributiva]

$$= a^2 + ab + ba + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

**NOTA:** Tenga en cuenta que dos términos son semejantes si poseen la misma parte literal. Un término consiste en el producto indicado entre un número real y una o varias letras que toman valores en el conjunto de los números reales o en otro subconjunto determinado.

**Ejemplo:**

- a)  $5a^2 b$  es un término
- b)  $7a^2 b^2$  no es semejante a  $5ab^2$  ya que sus partes literales son diferentes.

4. a)  $(-3 - x)^2 = 9 + 6x + x^2$

b)  $(2 - a)^3 = 8 - 12a + 6a^2 - a^3$

c)  $(-2 - 3 - n)^2 = (-5 - n)^2 = 25 + 10n + n^2$

5. a)  $-474$

b)  $8x^2 - 6ax + 3a^2 - 7x + 24$

c)  $4x^2 - 24x + 36$

d)  $2$

6. a)  $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{a^{10}} \cdot \frac{1}{b^1} = \frac{1}{5a^{10}b}$

b)  $\frac{5}{16m^{16}n^8}$

7. a) Falso. (Sugerencia: reemplazar k y m por valores de los conjuntos en donde están definidas).

b) Verdadero.

8. c)  $(xy)^n = x^n y^n$

$$\begin{aligned} (xy)^n &= \underbrace{(xy)(xy)(xy)\cdots(xy)}_{n \text{ veces}} \\ &= \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdots x)}_{n \text{ veces}} \underbrace{(y \cdot y \cdot y \cdots y)}_{n \text{ veces}} \\ &= x^n y^n \end{aligned}$$

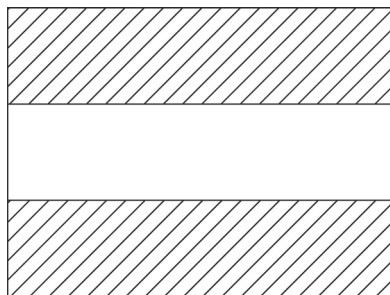
## IV. OPERACIONES CON FRACCIONES

Una fracción es el cociente entre dos números enteros, en donde el denominador no es cero. La fracción nombra un número racional.

**Ejemplo:**

$$\frac{3}{2} \quad , \quad \frac{1}{5} \quad , \quad \frac{-7}{4}$$

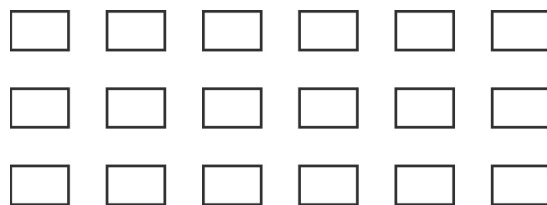
Una fracción también indica un número de las partes iguales en las que se divide una unidad. Por ejemplo, en la figura a continuación:



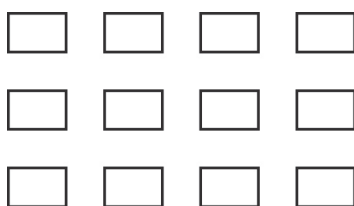
la parte rayada es  $\frac{2}{3}$  y la parte que no lo está es  $\frac{1}{3}$ .

$\frac{2}{3}$  son lo mismo que  $2\left(\frac{1}{3}\right)$ : “Dos veces la tercera parte de la unidad”.

Si se tienen no objetos continuos como en el ejemplo anterior, la figura puede representar una hoja de papel; sino, objetos discretos, por ejemplo 18 borradores:

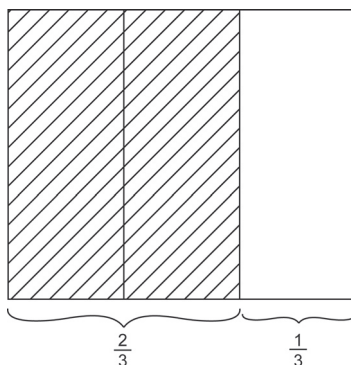


Las  $\frac{2}{3}$  partes de 18 borradores equivalen a 12 borradores:

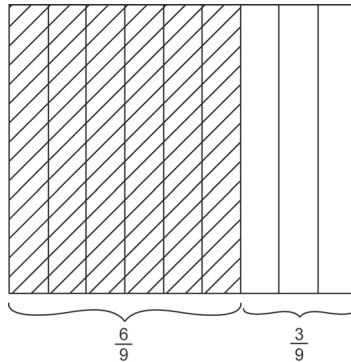


Dicho lo anterior, a continuación se presenta la manera como se operan las fracciones. Es importante mencionar que se operan objetos de la misma naturaleza. Así, si se quiere realizar  $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ , que como se observa son números de distinta naturaleza en el sentido de que representan partes distintas de la unidad, se hace necesario escribirlos en fracciones del mismo tamaño para luego poder contarlas.

¿Cómo encontrar fracciones equivalentes a una fracción dada? Observe lo siguiente: la parte rayada de la figura, representa  $\frac{2}{3}$ .



Si se divide esta unidad en nueve partes iguales, es decir, en novenos, se tiene:



Como puede observarse,  $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ , ya que representan la misma parte rayada.

Decimos que  $\frac{2}{3}$  es equivalente a  $\frac{6}{9}$ .

Puede también fijarse la atención en las partes no rayadas de cada figura y encontrar que  $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ . Decimos que  $\frac{1}{3}$  es equivalente a  $\frac{3}{9}$ .

La idea de equivalencia en este contexto es la de poder expresar una fracción dada, en términos de otra que la represente. Para conseguirlo basta con realizar nuevas divisiones en partes iguales de la unidad.

En el ejemplo se dividió la unidad en novenos; también pudo haberse dividido en 15 - avos, en 24 - avos, en 18 - avos, pero no en medios, ni en décimos, ya que no es posible con estos últimos obtener la misma parte rayada inicial:  $\frac{2}{3}$ .

En términos prácticos, para encontrar una fracción equivalente a una fracción dada  $\frac{a}{b}$ , basta con multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número entero, k.

En símbolos:  $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 0$

Se lee: “la fracción  $\frac{a}{b}$  es equivalente a la fracción  $\frac{ak}{bk}$ ”

**Ejemplo:** encontrar algunas fracciones equivalentes a  $\frac{2}{3}$ .

$$\frac{2}{3} = \frac{2(5)}{3(5)} = \frac{10}{15}, \text{ es decir, } \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2(8)}{3(8)} = \frac{16}{24}, \text{ es decir, } \frac{2}{3} = \frac{16}{24}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2(-4)}{3(-4)} = \frac{-8}{-12} = \frac{8}{12}, \text{ es decir, } \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

**Ejemplo:**

¿Es  $\frac{2}{3}$  equivalente a  $\frac{7}{10}$ ?

La respuesta es no, porque no representan la misma parte.

Un criterio práctico para determinar si dos fracciones son o no equivalentes, es el siguiente:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{Sí y solo sí} \quad ad = bc$$

Para el ejemplo considerado, se tiene que:

$$\frac{2}{3} \stackrel{?}{=} \frac{7}{10}$$

$$(2)(10) \stackrel{?}{=} (3)(7)$$

$$20 \neq 21$$

Luego  $\frac{2}{3}$  no es equivalente a  $\frac{7}{10}$ , lo cual lo escribimos:  $\frac{2}{3} \neq \frac{7}{10}$

Veamos entonces cómo realizar  $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ :

Ya que estas fracciones no son de la misma naturaleza, debe expresarse a

$\frac{2}{3}$  y a  $\frac{1}{4}$  en el mismo tamaño. Para ello se busca el mínimo común múltiplo de

3 y 4, que es igual a 12. 12 es el número más pequeño que contiene (en el cual cabe exactamente) 3 y 4.

Luego, escribimos a  $\frac{2}{3}$  y a  $\frac{1}{4}$  como fracciones equivalentes a otra de tamaño 12, es decir:

$$\frac{2}{3} = \frac{\quad}{12}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\quad}{12}$$

Con estas fracciones puede acudir a la representación gráfica debido a que se puede lograr un buen dibujo para verlas, o acudir a buscar el número k del que se habló atrás.

Así que:

$$\frac{2}{3} = \frac{(2)(4)}{(3)(4)} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{(1)(3)}{(4)(3)} = \frac{3}{12}$$

Se tiene ahora que:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{8}{12} + \frac{3}{12}$$

$$= \underbrace{8\left(\frac{1}{12}\right) + 3\left(\frac{1}{12}\right)}_{\text{"8 veces un doceavo"} \quad \text{"3 veces un doceavo"}} = \underbrace{11\left(\frac{1}{12}\right)}_{\text{"11 veces un doceavo de la unidad"}} = \frac{11}{12}$$

En términos prácticos, para realizar una operación como por ejemplo:  $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ ,

se busca el mínimo común múltiplo de los números 3 y 4 b, se procede así:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4(2) + 3(1)}{12} = \frac{8 + 3}{12} = \frac{11}{12}$$

¿Cómo encontrar el mínimo común múltiplo de dos o más números naturales?

Para ello, se debe recordar que un número natural o es primo o es compuesto. Si el número natural es primo, es porque tiene únicamente dos divisores: 1 y el mismo número.

**Ejemplo:**

7 es un número primo porque únicamente es divisible por 1 y por 7.

Se designa  $D_7$ , al conjunto de los divisores de 7.

$$D_7 = \{1, 7\}$$

Si un número es compuesto es porque tiene más de dos divisores.

**Ejemplo:**

12 es un número compuesto porque

$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Si, por ejemplo, se quiere encontrar el mínimo común múltiplo de 5 y 8, se busca:

$$D_5 = \{1, 5\}$$

$$D_{12} = \{1, 2, 4, 8\}$$

De modo que, si se escoge el mayor de los divisores en cada caso y luego se multiplican entre sí, da como resultado el más pequeño de los números en el cual caben exactamente 5 y 8. Para este ejemplo, el mínimo común múltiplo de 5 y 8 es 40.

Una manera mecánica para hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números naturales, es escribir al lado derecho de estos números y en columna, los factores primos que los dividen y luego realizar la multiplicación de dichos factores primos. El resultado es el mínimo común múltiplo de los números en cuestión.

Así que para encontrar el mínimo común múltiplo de 5 y 8 se aplica el anterior procedimiento:

$$\begin{array}{r|l}
 5 & 8 \\
 1 & 8 \\
 & 4 \\
 & 2 \\
 & 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 5 \\
 2 \\
 2 \\
 2
 \end{array}$$

$$(5)(2)(2)(2) = 40$$

Considere el siguiente ejemplo. Operar y simplificar:

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{4} - \frac{9}{12}$$

Se busca el mínimo común múltiplo de 5, 4 y 12 así:

$$\begin{array}{r|l}
 5 & 4 & 12 \\
 1 & 4 & 12 \\
 & 2 & 6 \\
 & 1 & 3 \\
 & & 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 5 \\
 2 \\
 2 \\
 3
 \end{array}$$

$$\text{Luego, } (5)(2)(2)(3) = 60$$

Entonces se tiene que:  $\frac{3}{5} + \frac{7}{4} - \frac{9}{12}$

$$= \frac{12(3) + 15(7) - 5(9)}{60}$$

$$= \frac{36 + 105 - 45}{60} = \frac{96}{60} = \frac{8}{5} = 8 \left( \frac{1}{5} \right)$$

"8 veces un quinto"

Para encontrar que  $\frac{96}{60} = \frac{8}{5}$ , puede pensarse en conseguir el número por el cual se puede dividir a 96 y a 60 de manera simultánea, hasta obtener una fracción irreducible, es decir, una fracción a la que no se pueda simplificar por ningún otro número. Para este caso, dicha fracción es  $\frac{8}{5}$ .

#### 4.1. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES ●●●●

##### MULTIPLICACIÓN

Observe lo siguiente:

- $\frac{5}{7} = 5 \left( \frac{1}{7} \right)$ : "Cinco veces un séptimo"
- $\frac{5}{7} = \frac{1}{7} (5)$ : "La séptima parte de cinco"

- $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$ : "La mitad de un cuarto". Es decir,  $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$
- $\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ : "La cuarta parte de la mitad". Esto es,  $\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$
- $\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{7}{9}\right)$ : "Las cuatro partes de las siete novenas partes"

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{7}{9}\right) &= 4\left(\frac{1}{5}\right) \cdot 7\left(\frac{1}{9}\right): \text{"Cuatro quintos de 7 veces } \frac{1}{9} \text{"}. \\ &= (4)(7)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{9}\right) \\ &= 28\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{9}\right): \text{"Veintiocho veces la quinta parte de un noveno"}. \\ &= 28\left(\frac{1}{45}\right): \text{"Veintiocho veces un cuarenta y cinco avo de una} \\ &\quad \text{unidad"}. \\ &= \frac{28}{45} \end{aligned}$$

De modo que:  $\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{z}{w}\right) = x\left(\frac{1}{y}\right) \cdot z\left(\frac{1}{w}\right) = xz\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{w}\right)$

Luego, se puede escribir que:

$$\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{xz}{yw}$$

### Ejemplos:

Operar y simplificar.

a)  $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{7}{4}\right)$

$$\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{(3)(7)}{(5)(4)} = \frac{21}{20} = 21\left(\frac{1}{20}\right): \text{“Veintiuna veces un veinteavo”}.$$

b)  $\left(\frac{-9}{5}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{(-9)(3)}{(5)(8)} = \frac{-27}{40} = -27\left(\frac{1}{40}\right): \text{“El opuesto de 27 veces un cuarentavo”}.$

c)  $\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{9}{7}\right)\left(\frac{21}{2}\right) = \frac{(4)(9)(21)}{(3)(7)(2)} = (2)(3)(3) = 18$

### DIVISIÓN

Sean  $\frac{x}{y}$  y  $\frac{z}{w}$  números racionales:

$$\frac{x}{y} \div \frac{z}{w} = \frac{x}{y} \cdot \frac{w}{z} = \frac{xw}{yz}$$

Es decir,  $\frac{x}{y}$  se multiplicó por el recíproco de  $\frac{z}{w}$  que es  $\frac{w}{z}$ .

## Ejemplos:

a) operar:  $\frac{3}{2} \div \frac{5}{7}$

$$\frac{3}{2} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{10}$$

b) operar:  $2 \div \frac{1}{4}$

$$2 \div \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{4}{1} = 8$$

c) operar:  $\frac{3}{2} \div 4$

$$\frac{3}{2} \div 4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Como puede observarse en los ejemplos, la aplicación de la regla dada es bastante fácil. Sin embargo, siguiendo con la idea de comprender qué significa lo que se está haciendo, surgen preguntas que se le proponen al lector para que las reflexione y trabaje sobre ellas.

En  $\frac{3}{2} \div 4$ , se está buscando la cuarta parte de  $\frac{3}{2}$ , que es  $\frac{3}{8}$ .

1. ¿Qué se está buscando en  $2 \div \frac{1}{4}$ ?
2. ¿Qué representa el resultado 8 en  $2 \div \frac{1}{4}$ ?
3. ¿Qué significa  $\frac{3}{2} \div \frac{5}{7}$ ?

### 4.1.1. Ejercicios ●●●●

→ 1. Escribir 3 fracciones equivalentes para:

a)  $\frac{3}{7}$

b)  $\frac{5}{2}$

→ 2. ¿Es  $\frac{4}{9}$  equivalente a  $\frac{16}{27}$ ? Justificar.

→ 3. Escribir en palabras la interpretación de:

a)  $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$

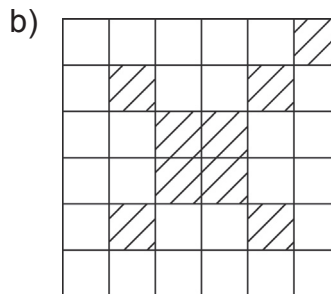
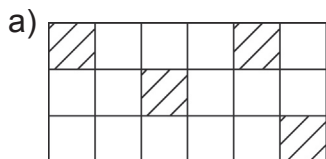
b)  $\left(\frac{2}{7}\right)^3$

c)  $3 \div \frac{1}{2}$

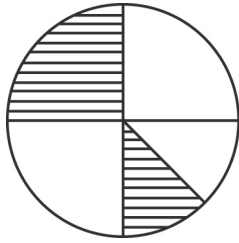
d)  $\frac{1}{2} \div 3$

e)  $\left(\frac{4}{9}\right)^{-1}$

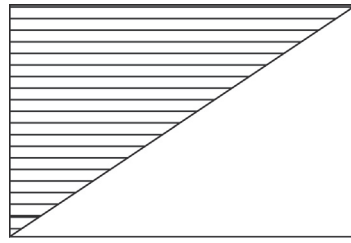
→ 4. Escribir la fracción que representa la parte rayada en cada caso.



c)



d)



→ 5. ¿Cuánto es la quinta parte de 12.000 botones?

→ 6. Representar gráficamente:

a)  $\frac{5}{2}$

b)  $\frac{8}{3}$

→ 7. Operar y simplificar:

a)  $-5 + \left(\frac{1}{5}\right)$

b)  $3^{-2} - 2^{-3}$

c)  $\left(1 - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{5} - 3\right) + 2(10)^{-1}$

d)  $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)^{-1} + (2)^{-2}$

e)  $\frac{2}{3} \div \left[\frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - (-3)\right]$

$$f) \left(4 \div \frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{2} \div \frac{1}{5}\right) \left(\frac{1}{15}\right)$$

$$g) \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{7}{4}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$$

→ 8. Simbolizar y calcular:

a) La quinta parte de la mitad de siete.

b) El cuadrado de la diferencia entre la mitad de 5 y el doble de  $\frac{1}{3}$ .

c) La cuarta parte de la quinta parte de \$10.000.

d) El recíproco del cubo de  $\frac{1}{2}$ .

e) El opuesto de la suma entre, el doble de  $\frac{1}{5}$  con el cuadrado de  $\frac{1}{2}$ .

→ 9. Encontrar el valor numérico para cada expresión:

$$a) \frac{1}{2} \left[ a^{-1} + b^{-1} - 2b - c \right], \text{ si } a = \frac{1}{2}, b = 2a, c = a^{-1}$$

$$b) \frac{3}{4} (x - y) - xy, \text{ si } x \text{ es el opuesto de } y \text{ e } y \text{ es el recíproco de } 2.$$

→ 10. ¿Es cierto que la suma de los recíprocos de 2, 3 y 5 es igual a  $\frac{31}{30}$ ?  
Justificar.

→ 11. Si  $a = \frac{1}{5}$ ,  $b = a^{-1}$ ,  $c = a + b$ , comprobar que

$$2 - a \left( b - \frac{1}{5} \right) - c (a - b) = 24$$

#### 4.1.2. Respuestas a los ejercicios ●●●●

1. a)  $\frac{3}{7} = \frac{12}{28}$ ,  $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$ ,  $\frac{3}{7} = \frac{18}{42}$

b)  $\frac{5}{2} = \frac{20}{8}$ ,  $\frac{5}{2} = \frac{30}{12}$ ,  $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$

2. No, ya que no representan la misma parte. Observe que  $\frac{4}{9} \neq \frac{16}{27}$  porque

$$(4)(27) \neq (9)(16)$$

$$108 \neq 144$$

3. a) La mitad de  $\frac{3}{5}$

b) El cubo de  $\frac{2}{7}$

c) La cantidad de partes de tamaño  $\frac{1}{2}$  que caben en 3 unidades.

d) La tercera parte de  $\frac{1}{2}$

e) El recíproco de  $\frac{4}{5}$

4. a)  $\frac{2}{9}$

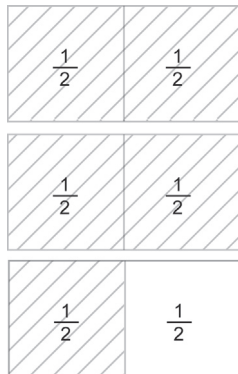
b)  $\frac{1}{4}$

c)  $\frac{3}{8}$

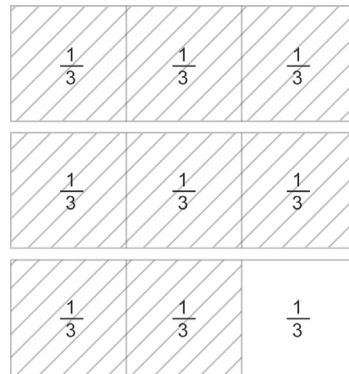
d)  $\frac{1}{2}$

5.  $\frac{1}{5}(12.000) = 2.400$  botones

6. a)



b)



$\frac{5}{2}$  está representada por la parte rayada

$\frac{8}{3}$  está representada por la parte rayada

7. a)  $-\frac{23}{5}$

b)  $-\frac{1}{72}$

c) 1

d)  $\frac{17}{4}$

e)  $\frac{10}{87}$

f) 3

g)  $-\frac{13}{12}$

8. a)  $\frac{1}{5} \left[ \frac{1}{2} (7) \right] = \frac{7}{10}$

b)  $\left( \frac{5}{2} - 2 \left( \frac{1}{3} \right) \right)^2 = \left( \frac{11}{6} \right)^2 = \frac{121}{36}$

c)  $\frac{1}{4} \left( \frac{1}{5} (10.000) \right) = \$500$

d)  $\left[ \left( \frac{1}{2} \right)^3 \right]^{-1} = \left[ \frac{1}{8} \right]^{-1} = 8$

e)  $- \left[ 2 \left( \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right] = \frac{-13}{20}$

9. a)  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$  el resultado final es  $\frac{-1}{2}$

b)  $x = \frac{-1}{2}$ ,  $y = \frac{1}{2}$  el resultado final es  $\frac{-1}{2}$

10. Sí.

#### 4.2. TANTO POR CIENTO O PORCENTAJE ●●●●

A un número de las cien partes iguales en las que se divide una unidad, se le llama el tanto por ciento o porcentaje.

En  $\frac{x}{100}$ , la letra  $x$  representa el tanto por ciento. Se escribe también  $x\%$ .

La idea con la que se presenta en este contexto el tanto por ciento o porcentaje, es la de mostrar otra manera de acercarse a comprender una información en la cual se comparan las partes de un todo.

Observe la siguiente situación:

- Con  $\frac{1}{20}$  se representa “uno de cada veinte”.

“Uno de cada veinte” es equivalente a decir “dos de cada cuarenta”. Esto es,  $\frac{1}{20} = \frac{2}{40}$ .

O también, “uno de cada veinte” es equivalente a decir “3 de cada 60”. Esto es,  $\frac{1}{20} = \frac{3}{60}$ .

O también, “uno de cada veinte” es equivalente a decir “4 de cada 80”. Esto es,  $\frac{1}{20} = \frac{4}{80}$ .

O también, “uno de cada veinte” es equivalente a decir “5 de cada 100”. Esto es,  $\frac{1}{20} = \frac{5}{100}$ .

“5 de cada 100” son el 5 %.

Si se tiene un conjunto de, por ejemplo 10 vallas publicitarias sobre un cierto producto, distribuidas en distintos puntos de una ciudad y, luego de un estudio acerca del impacto comercial producido por este tipo de publicidad, se determina que el 20 % de las vallas permite dar a conocer el producto, ¿A cuántas vallas equivale el 20 % ?

20 % de 10 es lo mismo que  $\frac{20}{100}$  de 10, que es lo mismo que  $\frac{20}{100}(10) = 2$  vallas.

¿Tiene sentido preguntar a cambio del 20 %, el 5%?

En general, el  $x\%$  de  $b$  se escribe:  $x\% (b) = \frac{x}{100} (b)$

#### 4.3. EL TANTO POR MIL O PORMILAJE ●●●●

A un número de las mil partes iguales en que se divide una unidad se le llama el tanto por mil o pormilaje. Se representa:  $x\text{‰}$ .

El  $x\text{‰}$  de  $b$  se escribe:  $x\text{‰} (b) = \frac{x}{1.000} (b)$

**Ejemplo:**

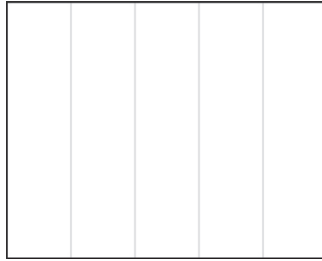
Calcular el  $x\text{‰}$  de \$50.000.000

$$x\text{‰} (50.000.000) = \frac{4}{1.000} (50.000.000) = \$200.000$$

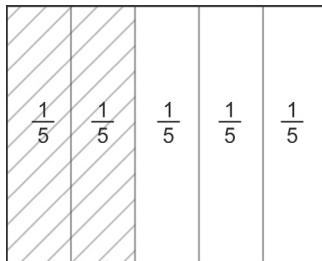
A continuación se proponen algunos ejemplos.

1. Las  $\frac{2}{5}$  partes de un presupuesto se destinan para la adquisición de maquinaria; de la parte restante, la mitad es utilizada para comprar equipo de oficina; de lo que queda, con las  $\frac{2}{3}$  partes se paga nomina y con el resto se hacen gastos administrativos. ¿Que cantidad de dinero es destinado para los gastos administrativos, si el presupuesto es de \$30.000.000?

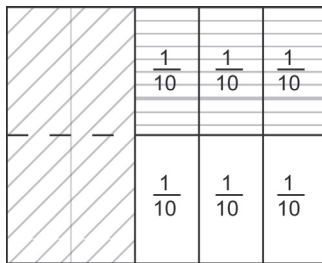
En la figura, el rectángulo representa el presupuesto, es decir, los \$30.000.000



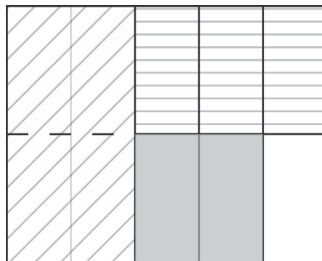
La parte rayada representa las  $\frac{2}{5}$  partes del presupuesto: lo destinado para la adquisición de maquinaria.



La parte rayada de manera horizontal representa la mitad de la parte restante, lo utilizado para comprar equipo de oficina.



La parte sombreada representa lo destinado para el pago de la nómina y, la parte en blanco representa lo destinado para gastos administrativos.



Lo destinado para gastos administrativos equivale entonces a  $\frac{1}{10}$  del presupuesto, es decir,  $\frac{1}{10} (30.000.000) = \$3.000.000$

El anterior problema se escribe aritméticamente así:

Presupuesto : \$30.000.000

Adquisición de maquinaria :  $\frac{2}{5} (30.000.000) = \$12.000.000$

Parte restante :  $\$30.000.000 - \$12.000.000 = \$18.000.000$

Compra de equipos de oficina :  $\frac{1}{2} (18.000.000) = \$9.000.000$

Lo que queda ahora:  $\$18.000.000 - \$9.000.000 = \$9.000.000$

Pago de nómina :  $\frac{2}{3} (9.000.000) = \$6.000.000$

Gastos administrativos :  $\$9.000.000 - \$6.000.000 = \$3.000.000$

Considere el siguiente ejemplo:

\$120.000.000 se distribuyen de la siguiente manera: las  $\frac{3}{5}$  partes para

adquirir una bodega; de la parte restante, el 12 % para la compra de un equipo de cómputo; de lo que queda ahora, la tercera parte para cancelar la cuarta parte del precio de un camión de carga y, el resto se invierte en un CDT.

a) ¿Cuál es el precio del camión de carga?

b) ¿Cuánto dinero es invertido en el CDT?

c) ¿A qué porcentaje del dinero inicial (\$120.000.000) equivale lo utilizado en la compra del equipo de cómputo?

d) ¿Qué parte de los \$120.000.000 fue invertida en el CDT?

Dinero utilizado para la adquisición de la bodega :

$$\frac{3}{5} (120.000.000) = \$72.000.000$$

Dinero que queda: \$120.000.000 - \$72.000.000 = \$48.000.000

Dinero utilizado para la compra del equipo de cómputo:

$$12\% (48.000.000) = \$5.760.000$$

Dinero que queda: \$48.000.000 - \$5.760.000 = \$42.240.000

Dinero utilizado para cancelar la cuarta parte del precio del camión de carga:

$$\frac{1}{3} (42.240.000) = \$14.080.000$$

Dinero que queda: \$42.240.000 - \$14.080.000 = \$28.160.000

Dinero invertido en el CDT: \$28.160.000

a) Precio del camión de carga: como \$14.080.000 es la cuarta parte del precio del camión de carga, entonces, el precio del camión de carga es:

$$4 (\$14.080.000) = \$56.320.000.$$

b) El dinero invertido en el CDT es: \$28.160.000

c) Sea x el porcentaje buscado. Luego tenemos que:

$$\frac{x}{100} (120.000.000) = 5.760.000$$

$$x (1.200.000) = 5.760.000$$

$$x = 4.8 \%$$

El 4.8 % de los \$120.000.000 fue utilizado para la compra del equipo de cómputo.

También podemos utilizar la siguiente manera de expresar la situación planteada:

\$	%
120.000.000	100
5.760.000	x

$$\text{En donde: } x = \frac{(5.760.000)(100\%)}{120.000.000} = 4.8\%$$

$$\text{d) } \frac{28.160.000}{120.000.000} = \frac{28.160}{120.000} = \frac{2.816}{12.000} = \frac{88}{375}$$

#### 4.3.1. Ejercicios ●●●●

- 1. Calcular el 4% de \$80.000.000.
- 2. Si al precio de cierto artículo se le hace un descuento del 15 % y, sobre este nuevo precio, se realiza un incremento del 15 %, ¿Qué le ocurrió al precio inicial del artículo?
- 3. En un anaquel de cierto supermercado hay:
- 12 cajas de jabón de tocador marca A.
  - 17 cajas de jabón de tocador marca B,
  - 7 cajas de jabón de tocador marca C,
  - 14 cajas de jabón de tocador marca D.

¿Cuál es la participación de cada una de estas marcas de jabón de tocador en este supermercado?

→ 4. El precio de venta por unidad de cierto artículo que maneja un distribuidor, es de \$1.200. Cuando el artículo llega al detallista, este está autorizado para incrementar el precio del distribuidor en el 12 %, ¿Cuál es entonces el precio de compra para el consumidor de este artículo?

→ 5. Una empresa decide invertir en publicidad para anunciar sus eventos deportivos \$36.000.000. De este presupuesto, destina las  $\frac{2}{5}$  partes para publicar el campeonato de patinaje; de la parte restante, el 20 % es utilizado para publicar el torneo de tenis y el resto, para publicar el torneo de fútbol.

a) ¿A qué porcentaje del presupuesto total equivale lo destinado para la publicidad del torneo de fútbol?

b) ¿Cuánto dinero se destina para la publicidad del campeonato de patinaje?

→ 6. Una bonificación de \$180.000.000 se reparte en partes iguales entre tres asesores comerciales. Si uno de ellos gasta tres quintas partes del 25 % del dinero que recibió como bonificación.

a) ¿Cuánto dinero le queda a este asesor?

b) ¿Qué porcentaje del total de la bonificación recibió este asesor comercial?

→ 7. Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o es falsa. Justificar.

Si al precio de lista de cierto artículo se le hace un descuento del 12 % y un cliente que compró dicho artículo pagó por él \$29.920, entonces, el precio de lista del artículo es \$34.080.

→ 8. ¿Qué cantidad es el 15 % de 96.000?

9. ¿De qué cantidad es 1.440 el 4 %?

10. ¿Qué cantidad es el 7 % de 350.000?

#### 4.3.2. Respuestas a los ejercicios ●●●●

1. \$320.000

2. Disminuyó [sugerencia: asigne cualquier precio y haga los cálculos correspondientes].

3. A: 24%, B: 34%, C: 14%, D: 28%

4. \$1.344

5. a) 48%

b) \$14.400.000

6. a) \$51.000.000

b) 33,33%

7. Falso. El precio de lista del artículo es \$34.000.

8. 14.400

9. 36.000

10. 2.450

## V. POTENCIAS RACIONALES ●●●●

Con este titular, se hace referencia a la siguiente pregunta: ¿Qué significa la notación  $x^{\frac{m}{n}}$ , en donde  $\frac{m}{n}$  es un número racional?

En el apartado III se definió  $x^n$  con  $n$  número entero y se establecieron algunas propiedades con las cuales realizar cálculos. La idea es definir  $x^{\frac{m}{n}}$  de tal manera que dichas propiedades se puedan seguir aplicando en este caso.

Veamos: se mostró en el apartado III que  $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

También se dijo que  $x^1 = x$

Ahora, en  $x^{\frac{m}{n}}$  tomemos  $m = 1$ , es decir,  $x^{\frac{1}{n}}$

$$\text{Entonces, } \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\left(\frac{1}{n}\right)^n} = x^1 = x$$

Ahora, sea  $b = x^{\frac{1}{n}}$ , esto es equivalente a escribir:  $b^n = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n$ , lo que equivale a escribir  $b^n = x$

Consideramos lo siguiente:

a)  $25^{\frac{1}{2}} = 5$  ya que  $5^2 = 25$ . Se acuerda desde ya que  $25^{\frac{1}{2}} = 5$ , aunque  $25^{\frac{1}{2}} = 5$  porque también  $(-5)^2 = 25$ . Este acuerdo se hace para definir qué se va a entender por  $25^{\frac{1}{2}}$ , es decir,  $25^{\frac{1}{2}}$  es 5.

b)  $(-8)^{\frac{1}{2}} = ?$

$(-8)^{\frac{1}{2}} = b$  significa que  $b^2 = -8$ , pero el cuadro de cualquier número real nunca es negativo. Esto quiere decir entonces que si  $x$  es negativo y en  $\frac{1}{n}$ ,  $n$  es par, entonces,  $x^{\frac{1}{n}}$  no está definido.

c)  $(-125)^{\frac{1}{3}} = -5$  porque  $(-5)^3 = -125$

### En síntesis:

- Si  $x$  es un número real positivo y  $n$  es un número natural, entonces, se dice que el número  $b$  es la raíz  $n$ -ésima de  $x$  si  $b^n = x$ .

En símbolos:  $\sqrt[n]{x} = b$  significa que  $b^n = x$

Nota: 1.  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

2. En  $\sqrt[n]{x}$ ,  $n$  se llama índice de la raíz, y  $x$  se llama cantidad subradical.

- Si  $x$  es un número real y  $n$  es un número natural impar, entonces,  $\sqrt[n]{x}$  está definida.

En general,  $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$  con las condiciones que se acabaron de describir.

Así, por ejemplo,  $(32)^{\frac{2}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^2 = (2)^2 = 4$

Utilizando el hecho  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ,  $x \neq 0$

$$x^{\frac{-m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^m}$$

Podemos decir que:  $x^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^m}$

Es decir,  $(36)^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{(36)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(6)^3} = \frac{1}{216}$

**Por ejemplo:**

Estudie los siguientes ejemplos: (aquí se asume que la cantidad subradical, en cada caso está bien definida. Por esta razón no se hace énfasis en las condiciones).

a) Simplificar:  $\sqrt[4]{81x^8y}$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{81x^8y} &= \left(81x^8y\right)^{\frac{1}{4}} = (81)^{\frac{1}{4}} \left(x^8\right)^{\frac{1}{4}} \left(y\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= 3x^{\frac{8}{4}}y^{\frac{1}{4}} = 3x^2y^{\frac{1}{4}} = 3x^2\sqrt[4]{y}\end{aligned}$$

b) Simplificar:  $\sqrt[3]{\frac{64m^{12}n^9}{k^{15}}}$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{64m^{12}n^9}{k^{15}}} &= \left(\frac{64m^{12}n^9}{k^{15}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(64m^{12}n^9k^{-15}\right)^{\frac{1}{3}} = (64)^{\frac{1}{3}} \left(m^{12}\right)^{\frac{1}{3}} \left(n^9\right)^{\frac{1}{3}} \left(k^{-15}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 4m^{\frac{12}{3}}n^{\frac{9}{3}}k^{\frac{-15}{3}} = 4m^4n^3k^{-5} = \frac{4m^4n^3}{k^5}\end{aligned}$$

c) Utilizar la calculadora para encontrar el resultado de la siguiente ecuación y aproximar el resultado a dos cifras decimales:

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{17} - 3\sqrt[4]{20} + \frac{1}{5}\sqrt{81} + 0,36 \\ &= 1,76 - 3(2,11) + 0,2(9) + 0,36 \\ &= 1,76 - 6,33 + 1,8 + 0,36 \\ &= -2,41\end{aligned}$$

## 5.1. EJERCICIOS ●●●●

→ 1. Utilizar la calculadora para encontrar el resultado para cada caso. Aproximar a dos cifras decimales, el valor obtenido.

a)  $\sqrt{\frac{16}{26} \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}} - \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{5}}$

b)  $-5 \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{-2}{7}} + 0,27$

c)  $\sqrt[6]{5\sqrt{541}} - \left(\sqrt{0,125}\right)^{-2}$

→ 2. Simplificar. Se asume que la cantidad subradical está bien definida.

a)  $\sqrt[5]{243 m^{10} b^6 x^{16}}$

b)  $\sqrt[10]{\frac{1.024 a^{-5} b^2}{n^{-20} m}}$

c)  $\left(169 x^{-3} y^2 z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

→ 3. Si  $x^{-1} = a^3$ ,  $y = \left(2a^3 x^{-2}\right)^9$ , ¿Es cierto que  $\sqrt[3]{xy^9} = \frac{2}{a^8}$ ? Justificar.

→ 4. Si  $m = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ ,  $n = m^2$  y  $p = m + 1$ , encontrar el valor numérico de

$$\left(\frac{n}{p+m}\right)^{1-m} - m\sqrt{\frac{n}{p^2} + nm}$$

## 5.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS ●●●●

1. a) -0,24

b) 4,34

c) -2,77

2. a)  $3m^2 bx^3 5 \sqrt{bx}$

$$b) \frac{2b^{\frac{1}{5}} n^2}{a^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{10}}} = \frac{2n^2 5\sqrt{b}}{\sqrt{a} \cdot 10\sqrt{m}}$$

$$c) \frac{x^{\frac{3}{2}}}{13yz^{\frac{1}{4}}} = \frac{x \sqrt{x}}{13y 4\sqrt{z}}$$

3. Verdadero. [Sugerencia: Expresé la cantidad subradical en términos de a].

4.  $\frac{103}{12}$

## VI. EXPRESIONES ALGEBRAICAS ●●●●

Un plan para teléfono celular pospago tiene como tarifa mensual \$ 50.000 y 100 minutos. Por cada minuto o fracción adicional después los 100 minutos del plan, el usuario debe cancelar \$ 50.

Así, que si después de haber utilizado los 100 minutos del plan, habla un minuto más, la factura de pago del servicio registrará:

$$\text{\$ } 50.000 + 50 (1) = \text{\$ } 50.050$$

- Si habla dos minutos, deberá cancelar:  $50.000 + 50 (2) = \text{\$ } 50.100$
- Si habla tres minutos, deberá cancelar:  $50.000 + 50 (3) = \text{\$ } 50.150$

Si hacemos que la letra  $x$  represente el número de minutos adicionales, podemos escribir una expresión que permita encontrar el valor por cancelar de acuerdo con los minutos adicionales utilizados, así:

$$50.000 + 50x$$

Este tipo de expresión se denomina expresión algebraica con una variable. En este caso, la variable asume valores en el conjunto de los números naturales. Ya el lector recordará la similitud de esto que estamos planteando, con el trabajo de encontrar el valor numérico de una expresión dada.

En general, expresiones como:

$$5x^2 + 3x - 1, \quad x^2 - y^2, \quad \frac{x+7}{2y}, \quad \sqrt{5}xy - 3x^2 + 7x^5, \quad a^2bc, \quad \frac{3x}{2} + 9x^2,$$

se llaman expresiones algebraicas. Las expresiones algebraicas están conformados por términos.

En  $5x^2 + 3x + 1$ :  $5x^2$ ,  $3x$ ,  $1$  son los términos. Los términos están conformados por una parte numérica, llamada coeficiente, que es un número real y, por una parte literal que toma valores en el conjunto de los números reales.

En  $5x^2$ ,  $5$  es el coeficiente y  $x^2$  la parte literal.

Observe que en un término, la parte literal y el coeficiente aparecen multiplicándose. Si el término no posee parte literal, se dice que es una constante. En  $5x^2 + 3x + 1$ ,  $1$  es el término constante.

Los polinomios son expresiones algebraicas en las cuales aparecen números reales y partes literales operándose con adición y multiplicación. Las partes literales aparecen con exponentes naturales o cero y toman valores en el conjunto de los números reales.

Por ejemplo,  $2x^2 + 5x - 9$  es un polinomio que por tener tres términos, recibe el nombre de **trinomio**;  $2n - d$ , es un polinomio que tiene dos términos y recibe por ello el nombre de **binomio**;  $x^2$  y  $\frac{1}{3}mn^3$  son ejemplos de polinomios que por tener un solo término, se denominan **monomios**.

Expresiones como:  $3x^{-2} + 7x - 9$ ,  $\frac{x^2bx + c}{x + m}$ ,  $5x^{\frac{-1}{2}}$  **no son polinomios.**  
(¿Por qué?)

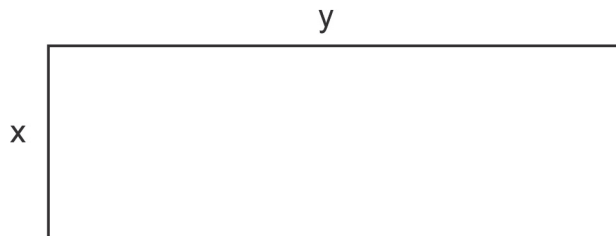
El grado de un polinomio en una variable es el mayor exponente de la variable. Por ejemplo, el polinomio  $7x^9 + 5x^7 - 3x^2 + 16$  tiene grado 9.

Decimos que dos o más términos son semejantes, si ellos tienen la misma parte literal. Por ejemplo,  $15a^3b^2c$  y  $-7a^3b^2c$  son términos semejantes; pero  $4m^7nk^8$  y  $11m^8nk^7$  no lo son, observe que aunque tienen las mismas variables, estas no aparecen como factores el mismo número de veces.

Las expresiones algebraicas se pueden sumar y multiplicar con otras, y estas operaciones cumplen con las mismas propiedades que hemos venido señalando. Esto es claro, ya que como se dijo, las expresiones algebraicas están constituidas por coeficientes y variables, las cuales toman valores en el conjunto de los números reales.

### Ejemplos:

a) En la figura,  $x$  representa la longitud de un lado, y la longitud de otro lado.



El perímetro de la figura geométrica se encuentra sumando entre sí todas las longitudes de los lados que la conforman.

Luego, si  $P$  representa el perímetro de la figura:

$$P = x + x + y + y = 2x + 2y$$

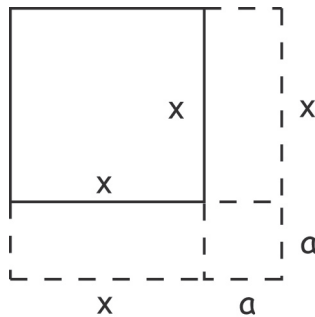
b) Si se tiene un cuadrado cuyo lado tiene longitud  $x$ .



Su área,  $A$ , será:  $A = x \cdot x$

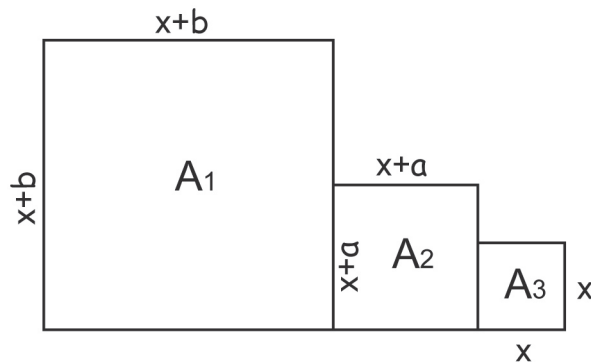
$$A = x^2$$

Ahora, si el lado del cuadrado anterior lo aumentamos en una longitud  $a$



el área,  $A$ , estará dada por:  $A = (x + a)(x + a) = (x + a)^2$

b) En la figura, se muestra la longitud de los lados que la conforman



Se quiere escribir una expresión que represente el área total de dicha figura.

Sea  $A$  el área total,

Luego:  $A = A_1 + A_2 + A_3$  en donde  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  representan el área en cada parte.

$$\text{Así, } A_1 = (x + b)(x + b) = (x + b)^2$$

$$A_2 = (x + a)(x + a) = (x + a)^2$$

$$A_3 = (x)(x) = x^2$$

$$\text{Entonces, } A = (x + b)^2 + (x + a)^2 + x^2$$

$$A = (x + b)(x + b) + (x + a)(x + a) + x^2$$

$$A = x(x + b) + b(x + b) + x(x + a) + a(x + a) + x^2$$

$$A = x^2 + xb + bx + b^2 + x^2 + xa + ax + a^2 + x^2$$

$$A = 3x^2 + 2xb + 2xa + a^2 + b^2$$

Escriba las propiedades de las operaciones entre reales que fueron utilizadas.

## VII. FACTORIZACIÓN ●●●●

Hasta el momento se ha empleado la propiedad distributiva para realizar, por ejemplo:  $(a + m)(b + n)$

$$\begin{aligned}(a + m)(b + n) \\ &= a(b + n) + m(b + n) \\ &= ab + an + mb + mn\end{aligned}$$

En  $(a + m)(b + n)$ ,  $(a + m)$  y  $(b + n)$  se denominan factores de la expresión  $ab + an + mb + mn$ , ya que es posible escribir que

$$ab + an + mb + mn = (a + m)(b + n)$$

Se entiende por factorizar una expresión algebraica, el proceso de escribirla como el producto de sus factores y a este producto, se le denomina factorización de la expresión algebraica.

Como se propuso en el ejemplo anterior, la propiedad distributiva es el eje central para el trabajo de factorizar una expresión algebraica ya que:  $x(y + z) = xy + xz$  equivale a escribir que  $xy + xz = x(y + z)$

A continuación se muestra la manera de encontrar la factorización de expresiones algebraicas, utilizando la propiedad distributiva y la propiedad asociativa. La idea es que se justifique y se estudie en detalle cada paso seguido.

a) *Factor común*

- Factorizar  $2am + 8bm$

$$2am + 8mb = 2am + 2^3 bm \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= 2m (a + 4b) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= 2m(a+4b)$$

- Factorizar  $2ax - by + bx - 2ay$

$$2ax - by + bx - 2ay = (2ax + bx) - (by + 2ay) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= x(2a+b) - y(b + 2a) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= x(2a+b) - y(2a + b) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= (2a + b)(x - y)$$

b) *Diferencia de los cuadrados*

- Factorizar  $36 - x^2$

$$36 - x^2 = 36 + 6x - 6x - x^2 \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= (36 + 6x) - (6x + x^2) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= 6(6 + x) - x(6 + x) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= (6 + x)(6 - x)$$

c) *Trinomios*

- Trinomio  $x^2 + bx + c$

Factorizar  $x^2 - x - 6$

$$x^2 - x - 6 = x^2 + 2x - 3x - 6 \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= (x^2 + 2x) - (3x + 6) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= x(x + 2) - 3(x + 2) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= (x + 2)(x - 3)$$

- Trinomio  $ax^2 + bx + c$

Factorizar  $2x^2 + 11x + 12$

$$2x^2 + 11x + 12 = 2x^2 + 8x + 3x + 12 \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= (2x^2 + 8x) + (3x + 12) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= 2x(x + 4) + 3(x + 4) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= (2x + 3)(x + 4)$$

## 7.1. EJERCICIOS ●●●●

↳ Encontrar la factorización correspondiente en cada caso.

1.  $3a + 6$

2.  $5x^2 y^4 z^3 - 15 xy^3 z^2 + 20 x^3 y^5 z^7$

3.  $3mnz - 8 + 6mn - 4z$

4.  $ab + cd - ca - bd$

5.  $64 - 9x^2$

6.  $25m^4 - 16n^{12}$

7.  $\frac{1}{4} x^8 - \frac{1}{9} y^6$

8.  $x^2 + 2x - 24$

9.  $x^2 + 4x + 3$

10.  $a^2 - (c + b) a + bc$

11.  $m^2 - 9m + 18$

12.  $2x^2 + x - 3$

13.  $3a^2 + 7a - 6$

14.  $2n^2 + 3n - 20$

15.  $25x^2 - 20x + 4$

16.  $-x^2 + 6x - 8$

17.  $2x^2 - 9x + 9$

18.  $x^2 - y^2$
19.  $15mn + 3nb - 2ab - 10am$
20.  $9 + 24b + 16b^2$
21.  $x^3 - 3x^2 - 28x$
22.  $a^2 - 9$
23.  $12m - 21mn + 36nz$
24.  $b(x + 7) - 3(x + 7)$
25.  $t^3 + 7t^2 + 10t$

## 7.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS ●●●●

1.  $3(a + 2)$
2.  $5xy^3 z^2 (xyz - 3 + 4x^2 y^2 z^5)$
3.  $(3mn - 4)(z + 2)$
4.  $(b - c)(a - d)$
5.  $(8 - 3x)(8 + 3x)$
6.  $(5m^2 - 4n^6)(5m^2 + 4n^6)$
7.  $\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}y^3\right)\left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}y^3\right)$
8.  $(x - 5)(x + 7)$
9.  $(x + 3)(x + 1)$
10.  $(a - b)(a - c)$
11.  $(m - 3)(m - 6)$

12.  $(2x+3)(x-1)$
13.  $(3a-2)(3+a)$
14.  $(2n-5)(n+4)$
15.  $(5x-2)(5x-2) = (5x-2)^2$
16.  $(x-4)(2x-3)$
17.  $(x-3)(2x-3)$
18.  $(x-y)(x+y)$
19.  $(3n-2a)(5m+b)$
20.  $(3+4b)(3+4b) = (3+4b)^2$
21.  $x(x-7)(x+4)$
22.  $(a-3)(a+3)$
23.  $3m(4-7mn-12nz)$
24.  $(b-3a)(x+7)$
25.  $t(t+2)(y+5)$

## VIII. FRACCIONES ALGEBRAICAS ●●●●

Decimos que expresiones como  $\frac{3x-2}{x+7}$ ,  $5a-12$ ,  $\frac{3}{k}$ ,  $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$  reciben el nombre de fracciones algebraicas porque están expresadas en la forma  $\frac{a}{b}$ , en donde  $a$  y  $b$  son expresiones algebraicas.

De acuerdo con lo que hemos discutido,  $b$  no puede ser igual a cero.

Para garantizar que una fracción algebraica esté bien definida o represente un número racional, es necesario escribir con precisión el subconjunto de números reales en donde la variable o variables que hacen parte de la expresión algebraica  $b$ , pueden tomar valores sin que  $b$  llegue a ser igual a cero.

### Ejemplos:

a) Escribir el subconjunto de números reales para el cual  $\frac{3x-2}{x+7}$  **esta bien definida**. Basta con encontrar el número real que sumando a 7 es igual a cero, y retirarlo. Esto es, la variable  $x$  no puede ser igual a  $-7$  porque  $x+7$  cuando  $x = -7$ , se hace igual a cero.

Luego,  $\frac{3x-2}{x+7}$  está bien definida o representa un número racional para todo  $x \in \mathbb{R}$  excepto para  $x = -7$ .

b) ¿La expresión  $\frac{3}{k}$  representa un número racional?  
Si, siempre y cuando  $k \neq 0$ .

c) ¿La fracción algebraica  $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$  está definida para cualquier valor real de  $x$ ?

No, porque si  $x = 2$ ,  $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(2)^2 - 5(2) + 6}{(2)^2 - 4} = \frac{4 - 10 + 6}{4 - 4} = \frac{0}{0}$

d) ¿Para qué valores reales de  $x$ ,  $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$  está bien definida?

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + 5x + 6}{(x - 2)(x + 2)}, \text{ luego } x \neq 2, -2$$

Así que  $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$  representa un número racional para  $x \in \mathbb{R}$ , excepto para  $x = 2$  o  $x = -2$ .

Otra manera equivalente de escribir la condición es:

$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$  representa un número racional si  $x \in \mathbb{R}$  y  $x \neq 2, -2$

e) Simplificar:  $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 5x}$

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 5x} = \frac{(x + 5)(x - 2)}{x(x + 5)}$$

[ Se escribió la factorización correspondiente para cada expresión algebraica ]

$$= \frac{x+5}{x+5} \cdot \frac{x-2}{x}; \quad x \neq -5, 0 \quad [\text{Se escribió la condición que garantiza que cada factor representa un número racional}]$$

$$= 1 \cdot \frac{x-2}{x} = \frac{x-2}{x}$$

$$\text{Luego,} \quad \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 5x} = \frac{x-2}{x}, \quad \text{con } x \neq -5, 0$$

$$\text{f) Simplificar: } \frac{w^2 - 9}{2w^2 - w - 15}$$

$$\begin{aligned} \frac{w^2 - 9}{2w^2 - w - 15} &= \frac{(w-3)(w+3)}{(2w+5)(w-3)}; \quad w \neq \frac{-5}{2}, 3 \\ &= \frac{w+3}{2w+5} \end{aligned}$$

$$\text{Luego,} \quad \frac{w^2 - 9}{2w^2 - w - 15} = \frac{w+3}{2w+5}, \quad \text{con } w \neq \frac{-5}{2}, 3$$

## IX. OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

Operar y simplificar sin olvidar imponer las condiciones necesarias.

$$1) \quad \frac{4}{m^2 + 2m} = \frac{m}{m + 2}$$

$$\frac{4}{m^2 + 2m} = \frac{m}{m + 2} = \frac{4}{m(m + 2)} - \frac{m}{m + 2}, m \neq 0, -2$$

Ahora, observe que  $m(m + 2)$  es el mínimo común múltiplo de  $m(m + 2)$  y de  $m + 2$ , los denominadores de 4 y de  $m$ , respectivamente. Luego, se puede escribir que:

$$\frac{4}{m(m+2)} = \frac{4}{m(m+2)} \text{ y que } \frac{m}{m+2} = \frac{m(m)}{(m)(m+2)} = \frac{m^2}{m(m+2)}$$

Entonces,

$$\frac{4}{m^2 + 2m} = \frac{m}{m + 2} = \frac{4}{m(m + 2)} - \frac{m}{m + 2}, m \neq 0, -2$$

$$= \frac{4}{m(m + 2)} - \frac{m}{m(m + 2)}$$

$$= \frac{4 - m^2}{m(m + 2)}$$

$$= \frac{(2 - m)(2 + m)}{m(m + 2)}$$

$$= \frac{2 - m}{m}$$

$$2) \quad \frac{2a^2 + a - 3}{a^2 - 4} \div \frac{a^2 - 2a + 1}{3a - 6}$$

$$\frac{2a^2 + a - 3}{a^2 - 4} \div \frac{a^2 - 2a + 1}{3a - 6} = \frac{(2a-3)(a-1)}{(a-2)(a+2)} \div \frac{(a-1)(a-1)}{3(a-2)}, a \neq 2, -2$$

Como  $x \div y = x \cdot \frac{1}{y}$ , según se estudió en el apartado sobre fracciones aritméticas, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{(2a+3)(a-1)}{(a-2)(a+2)} \div \frac{(a-1)(a-1)}{3(a-2)} &= \frac{(2a+3)(a-1)}{(a+2)(a+2)} \cdot \frac{3(a-2)}{(a-1)(a-1)}, a \neq 1 \\ &= \frac{(2a+3)(a-1)3(a-2)}{(a+2)(a+2)(a-1)(a-1)} \\ &= \frac{3(2a+3)}{(a+2)(a-1)} \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \frac{2a^2 + a - 3}{a^2 - 4} \div \frac{a^2 - 2a + 1}{3a - 6} = \frac{3(2a+3)}{(a+2)(a-1)}, a \neq 2, -2, 1$$

$$3) \quad \frac{9}{5x+3} - \frac{4x-3}{5x+3}$$

$$\frac{9x}{5x+3} - \frac{4x-3}{5x+3} = \frac{9x - (4x-3)}{5x+3} = \frac{9x - 4x + 3}{5x+3} = \frac{5x+3}{5x+3} = 1$$

$$\text{con } x \neq \frac{-3}{5}$$

$$4) \left( w - \frac{9}{w} \right) \left( 1 - \frac{3}{w} \right)^{-1}$$

$$\left( w - \frac{9}{w} \right) \left( 1 - \frac{3}{w} \right)^{-1} = \left( \frac{w^2 - 9}{w} \right) \left( \frac{w - 3}{w} \right)^{-1} \quad w \neq 0$$

$$= \left( \frac{w^2 - 9}{w} \right) \left( \frac{w}{w - 3} \right), \quad w \neq 3$$

$$= \frac{(w - 3)(w + 3)w}{w(w - 3)}$$

$$= w + 3$$

$$5) \frac{3y + 1}{y - 2} - \left( \frac{y - 2}{2y - 1} \right)^{-1}$$

$$\frac{3y + 1}{y - 2} - \left( \frac{y - 2}{2y - 1} \right)^{-1} = \frac{3y + 1}{y + 2} - \frac{2y - 1}{y + 2}, \quad y \neq -2, \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3y + 1 - (2y - 1)}{y + 2}$$

$$\bullet \bullet \bullet \bullet = \frac{3y + 1 - 2y + 1}{y + 2} = \frac{y + 2}{y + 2} = 1$$

→

## 9.1. EJERCICIOS

Operar y simplificar. No olvidar imponer las condiciones necesarias.

$$1. \left[ \frac{3}{m+3} + \frac{5m-1}{m^2+m-6} - \frac{1}{m-2} \right] \left[ \frac{m-1}{m-2} \right]^{-1}$$

$$2. \left( \frac{a-2}{a^2+a-6} + \frac{2a-6}{a^2-9} \right) \div \frac{a}{a+3}$$

$$3. \left( \frac{n}{n^2-9} - \frac{2}{3n+9} \right) \left( \frac{2n^2+11n-6}{2n-6} \right)^{-1}$$

$$4. \left( \frac{3w+6}{2w^2-13w+6} \right)^{-1} \div \left( \frac{w}{w^2-4} - \frac{3}{4w-} \right)$$

$$5. \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} \div \frac{2x^2+7x+3}{x^2+x}$$

$$6. \left( b + \frac{2}{b-3} \right) \left( b - \frac{4}{b-3} \right)^{-1}$$

$$7. \left( \frac{9a^2-4}{a+1} \right) \left( \frac{a^2+2a-1}{3a-2} \right)$$

$$8. \left( \frac{3}{y^2+5y+6} - \frac{1}{y+3} + \frac{2}{y+2} \right) \div \frac{5y-2}{y+3}$$

$$9. \quad \frac{3+x}{x^2-9} \div \frac{x+5}{x-3}$$

$$10. \quad \left( \frac{x^2-2x-3}{8x} - \frac{2x-2}{3x+2} \right) \left( \frac{6x-18}{x^2-1} \right)^{-1}$$

$$11. \quad \frac{5x-2}{5x-2}$$

$$12. \quad \frac{x+1}{4x-1} - \frac{2-3x}{4x-1}$$

$$13. \quad \left( \frac{2}{m^2-4} + \frac{1}{m^2-m-2} \right) \div \frac{3m+4}{m+2}$$

$$14. \quad \left[ \frac{x+5}{x^2+8x+15} + \frac{2x+5}{x+3} \right]^{-1}$$



$$15. \quad \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^2-2xy-y^2}{x^2-y^2}$$

## 9.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

$$1. \quad \frac{7m-10}{(m+3)(m-1)}; m \neq -3, 2, 1$$

$$2. \quad \frac{3}{a}; a \neq -3, 0, 2, 3$$

$$3. \quad \frac{2}{3(n+3)(2n-1)}; n \neq 3, -3, -6, \frac{1}{2}$$

$$4. \quad \frac{4(w-2)(2w-1)}{3}; w \neq 6, \frac{1}{2}, 2, -2$$

5.  $\frac{x}{2x+1}$ ;  $x \neq 3, -1, 0, -3, -1$

6.  $\frac{(b-2)(b-1)}{(b-4)(b+1)}$ ;  $b \neq 3, 4, -1$

7.  $(3a+2)(a+1)$ ;  $a \neq -1, \frac{2}{3}$

8.  $\frac{y+7}{(y+2)(5y-2)}$ ;  $y \neq -3, -2, \frac{2}{5}$

9.  $\frac{1}{x+5}$ ;  $x \neq 3, -3, -5$

10.  $\frac{(x+1)^2}{12}$ ;  $x \neq 1, -1, 3$

11.  $1$ ;  $x \neq \frac{2}{5}$

12.  $1$ ;  $x \neq \frac{1}{4}$

13.  $\frac{1}{(m-2)(m+1)}$ ;  $m \neq 2, -2, -1, \frac{-4}{3}$

14.  $\frac{1}{2}$ ;  $x \neq -3, -5$

## X. ECUACIONES

La noción de equilibrio, con la que de manera intuitiva se hace referencia a las ecuaciones, junto con las acciones contrarias de agregar-quitar y multiplicar-dividir, propone un proceso de solución de una ecuación.

El paso a la simbolización y el trabajo operativo para encontrar el conjunto solución de una ecuación, se realiza desde la igualdad y sus propiedades y, las propiedades de las operaciones entre números reales.

Iniciamos este apartado trabajando en la simbolización de algunas proposiciones

- La quinta parte de un número es igual a 20.  
Representamos mediante la letra  $n$  el número cuya quinta parte es igual a 20.

Luego, la proposición dada queda simbolizada así:  $\frac{1}{5}n = 20$

- La suma de cuatro veces un número y el opuesto de 9, es igual a tres.  
Sea  $w$  el número en cuestión.  
Luego, la proposición dada queda simbolizada así:

$$4w + (-9) = 3$$

- El cuadrado de la diferencia entre un número  $k$  y 4 es igual a 16.

$$(k - 4)^2 = 16$$

- El número total de productos de las marcas  $A$  y  $B$  es igual a 150.  
Sea  $p$  el número de productos de la marca  $A$  y,  
 $q$  el número de productos de la marca  $B$ .

Así,  $p + q = 150$

- La suma de tres números naturales consecutivos es 18  
Sea  $x$  el primer número  
 $x + 1$  el segundo número  
 $x + 2$  el tercer número

Entonces,  $x + x + 1 + x + 2 = 18$

En los anteriores ejemplos, se muestra la manera como se simbolizó la situación planteada en cada caso.

Este tipo de simbolización, en donde aparece la igualdad relacionando dos expresiones algebraicas en las cuales hay una o más incógnitas, se denomina ecuación.

La ecuación es entonces una proposición que nos dice que dos expresiones algebraicas son iguales.

Resolver una ecuación es encontrar el conjunto de todos los valores reales del dominio de la(s) incógnita(s) o variable(s) que hacen de la ecuación una igualdad. A dicho conjunto se le llama conjunto solución. La palabra variable está indicando que la letra que representa a la(s) incógnita(s) toma valores en un conjunto de sustitución o dominio de variación.

## 10.1. PROPIEDADES DE LA IGUALDAD ●●●●

### 1. Propiedad de la adición

Si  $a = b$  y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces,  $a + c = b + c$

### 2. Propiedad de la multiplicación

Si  $a = b$  y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces,  $a \cdot c = b \cdot c$

### 3. Propiedad cancelativa

Si  $a \cdot c = b \cdot c$ , entonces,  $a = b$ , siempre que  $c \neq 0$ .

Si se observa, las anteriores propiedades de la igualdad tienen su génesis en la noción de equilibrio. Así, si se está en la condición de equilibrio, expresada  $a = b$ , al agregar o al quitar la misma cantidad,  $c$ , el equilibrio se mantiene. Esto se expresa como  $a + c = b + c$ . [Propiedad de la adición]

Si se agrega el mismo número de veces cierta cantidad, partiendo de la condición de equilibrio, esta condición se mantiene. [Propiedad de la multiplicación]

Si se quita el mismo número de veces cierta cantidad, estando en la condición de equilibrio, esta condición se mantiene. [Propiedad cancelativa]

Adicional a las anteriores propiedades, es importante también observar que: una cosa es igual a ella misma, lo cual escribimos  $a = a$ , llamada propiedad reflexiva; Si  $a = b$  entonces,  $b = a$ , propiedad simétrica; si  $a = b$  y  $b = c$ , entonces,  $a = c$ , propiedad transitiva.

A continuación se presenta la ecuación de primer grado, la ecuación de segundo grado o cuadrática y la ecuación con radicales.

**NOTA:** Una proposición es una afirmación de la cual puede decirse que es verdadera o es falsa.

## 10.2. ECUACIÓN DE PRIMER GRADO ●●●●

Ecuaciones como:  $x + 7 = 5$ ,  $\frac{w}{3} = 4w$ ,  $3(n + 5) = 4 + 6$  son ejemplos de ecuaciones de primer grado con una incógnita o variable.

Estas ecuaciones se caracterizan porque su incógnita o variable tiene como mayor exponente al 1.

### Ejemplos:

Encontrar el conjunto solución para cada una de las siguientes ecuaciones. (Si este existe).

1)  $x + 7 = 5$

$$x + 7 = 5$$

$$x + 7 + (-7) = 5 + (-7) \quad :$$

[Se sumó el opuesto de 7 a ambos lados de la igualdad. Esto es, se aplicó la propiedad de la adición]

$$x + [7 + (-7)] = -2 \quad :$$

[Se asoció de manera conveniente al lado izquierdo de la igualdad y se realizó la operación al lado derecho de la igualdad. O sea que se aplicó la propiedad asociativa y clausurativa de la adición, respectivamente ]

$$x + 0 = -2$$

$$x = -2 \quad : \quad [\text{Por la propiedad modulativa: } x+0=x]$$

Luego, el conjunto solución de la ecuación:  $x + 7 = 5$  es  $\{-2\}$ , ya que si en  $x + 7 = 5$  reemplazamos a  $x$  por  $-2$ , se obtiene que  $5 = 5$ .

En palabras:  $x + 7 = 5$  nos está diciendo que hay un número que al sumarle 7, da como resultado 5. Ese número es el opuesto de 2, es decir,  $-2$ .

En la recta numérica, la solución de la ecuación se representa así:



$$2) \quad 3(n + 5) = 4n + 6$$

$$3(n + 5) = 4n + 6$$

$$3n + 3(5) = 4n + 6 \quad [\text{Se aplicó la propiedad distributiva}]$$

$$3n + 15 = 4n + 6$$

$$3n + 15 + (-15) = 4n + 6 + (-15) \quad : \quad \text{¿Por qué?}$$

$$3n + [15 + (-15)] = 4n + [6 + (-15)] \quad : \quad \text{¿Por qué?}$$

$$3n + 0 = 4n + (-9) \quad : \quad \text{¿Por qué?}$$

$$3n = 4n + (-9)$$

$$3n + (-4n) = 4n + (-4n) + (-9) \quad : \quad \text{¿Por qué?}$$

$$-1n = [4n + (-4n)] + (-9) \quad : \quad \text{¿Por qué?}$$

$$-1n = 0 + (-9) \quad : \quad \text{¿Por qué?}$$

$$-1n = -9$$

$$\frac{-1n}{-1} = \frac{-9}{-1} \quad : \quad \text{¿Por qué?}$$

Luego el conjunto solución de  $3(n + 5) = 4n + 6$  es  $\{9\}$ . Veamos la comprobación:

En  $3(n + 5) = 4n + 6$ , se reemplaza  $n$  por 9:

$$3(9 + 5) = 4(9) + 6$$

$$3(14) = 36 + 6$$

$$42 = 42$$

Se obtuvo la igualdad.

En la recta numérica, la solución de la ecuación se representa:



$$3) \quad \frac{w}{3} = 4$$

$$\frac{w}{3} = 4w$$

$$\frac{1}{3}w = 4w \quad :$$

¿Recuerde cómo en el apartado sobre fracciones se dijo que

$$\frac{a}{n} = \frac{1}{n} \cdot a \quad \text{¿} n \neq 0 \text{?}$$

$$3\left(\frac{1}{3}w\right) = 3(4w) \quad :$$

[Se multiplicó a ambos lados de la igualdad por el recíproco de  $\frac{1}{3}$  que es 3. Esto es, se aplicó la propiedad invertiva para la multiplicación]

$$\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)w = 12w \quad :$$

¿Por qué?

$$1 \cdot w = 12w \quad :$$

¿Por qué?

$$w = 12w$$

$$\frac{w}{w} = 12 \quad :$$

No olvide que  $w \neq 0$

$$1 = 12 \quad :$$

¡Inconsistencia! Esto significa que la ecuación  $\frac{w}{3} = 4w$  no tiene solución; es decir, que no hay ningún número real para el cual se cumpla que su tercera parte sea igual a cuatro veces el número.

$$4] \quad \frac{3x+2}{4} - \frac{2x-3}{7} = \frac{x}{3}$$

$$\frac{3x+2}{4} - \frac{2x-3}{7} = \frac{x}{3}$$

$$\frac{3x+2}{4} - \frac{2x-3}{7} - \frac{x}{3} = 0 \quad :$$

¿Por qué?

$$\frac{21(3x+2) - 12(2x-3) - 28(x)}{84} = 0$$

$$\frac{63x + 42 - 24x + 36 - 28x}{84} = 0$$

$$\frac{11x + 78}{84} = 0$$

$$11x + 78 = 0 \text{ (84)} \quad : \quad \text{¿Por qué?}$$

$$11x + 78 = 0$$

$$11x + 78 + (-78) = 0 + (-78) \quad : \quad \text{¿Por qué?}$$

$$11x [78 + (-78)] = -78 \quad : \quad \text{¿Por qué?}$$

$$11x + 0 = -78 \quad : \quad \text{¿Por qué?}$$

$$11x = -78 \quad : \quad \text{¿Por qué?}$$

$$\frac{11x}{11} = \frac{-78}{11}$$

Luego, el conjunto solución de  $\frac{3x + 2}{4} - \frac{2x - 3}{7} = \frac{x}{3}$  es  $\left\{ \frac{-78}{11} \right\}$ .

Compruébelo.

En cada uno de los ejemplos anteriores, se llevó a cabo un proceso para buscar el conjunto solución de la ecuación dada.

Este proceso estuvo apoyado en las propiedades de las operaciones de números reales y en las propiedades de la igualdad. En cada renglón apareció una nueva ecuación, que si comprobamos, tiene como conjunto solución al encontrado al final del proceso.

Estas ecuaciones que aparecen en el proceso seguido para encontrar, si existe, el conjunto solución, se llaman ecuaciones equivalentes.

Dos o más ecuaciones se llaman ecuaciones equivalentes, si tienen el mismo conjunto solución.

### 10.2.1. EJERCICIOS ●●●●

→ 1. La ecuación  $8x - 4 = 11$ , ¿tiene solución en el conjunto de los números enteros? Justificar la respuesta.

→ 2. ¿Es  $k = -7$  solución de la ecuación  $-2 + 5k = 3k - 9$ ? Justificar la respuesta.

→ 3. ¿Son equivalentes las ecuaciones  $5x + 7 = 9$  y  $-21 - 15x = -27$ ? Justificar la respuesta.

→ 4. Encontrar, si existe, el conjunto solución para cada una de las siguientes ecuaciones.

a)  $\frac{1}{2}(y + 3) - 2 = y - 5$

b)  $(x - 3)(x + 5) = x^2 + 7x - 2$

c)  $\frac{x - 2}{3} - \frac{x - 2}{6} = \frac{12x + 48}{2}$

d)  $\frac{3 - x}{x + 7} = \left(\frac{x + 7}{10}\right)^{-1}$

$$e) \quad \frac{1}{3}(2x - 3) = -1 - \frac{1}{3}(1 + 5x)$$

$$f) \quad 5(2x + 1) = 10x - 3$$

$$g) \quad \frac{3x + 10}{20 + 4x} = 1$$

$$h) \quad \frac{x}{2} = 9$$

$$i) \quad \frac{3}{x - 7} + \frac{2}{x - 1} = \frac{2}{x^2 - 8x + 7}$$

→ 5. Una ecuación como por ejemplo:  $3x + 2y = 9$  es una ecuación de primer grado con dos variables o incógnitas. Aquí, varían  $x$  e  $y$ . Es decir, si  $x$  asume algún valor real, el valor de  $y$  dependerá del valor asumido por  $x$  o inversamente.

**Por ejemplo:**

Si  $x = 5$ , entonces,  $3(5) + 2y = 9$ . Luego,

$$3(5) + 2y = 9$$

$$15 + 2y = 9$$

$$2y = -6 \quad : \text{¿Por qué?}$$

$$y = -3 \quad : \text{¿Por qué?}$$

Así que, una posible solución para la ecuación  $3x + 2y = 9$  es  $x = 5$ ,  $y = -3$ , ya que al reemplazar estos valores en la ecuación se obtiene una igualdad.

Veamos:

$$3x + 2y = 9$$
$$3(5) + 2(-3) = 9$$
$$9 = 9$$

Como puede observarse, esta ecuación tiene tantas soluciones como valores reales asuma una de las variables, pues la otra, queda determinada automáticamente.

Considere la siguiente situación: la ecuación  $2a + 4b = 20$ .

Escriba los valores enteros que pueden asumir  $a$  ó  $b$  que solucionan la ecuación.

Dos o más ecuaciones de primer grado con dos variables o incógnitas que están relacionadas entre sí y cuya solución corresponde a los valores de cada variable que satisfacen de manera simultánea a ambas ecuaciones, se denomina un sistema de ecuaciones con dos variables.

### Ejemplos:

1.  $3x + 2y = 7$   
 $4x + 3y = 10$

2.  $x + y = 3$   
 $2x + y = 4$

Encontrar los valores de  $x$  y  $y$  que satisfacen simultáneamente al sistema 2. Sugerencia: antes de recurrir a algún procedimiento mecánico para resolver este tipo de sistema de ecuaciones, encuentre soluciones para cada ecuación del sistema 2. Y observe cómo se logra la solución.

### 10.2.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS ●●●●

1. No, porque su conjunto solución es  $\left\{\frac{15}{8}\right\}$  y  $\frac{15}{8}$  no es un conjunto entero.
2. Basta con reemplazar a  $k = -7$  en la ecuación. Se observa que no se obtiene una igualdad. Otro camino es encontrar el conjunto solución de la ecuación, que es  $\left\{\frac{-7}{2}\right\}$ .
3. Sí, su conjunto solución es  $\left\{\frac{2}{5}\right\}$ .
4. a)  $y = 9$  ó  $\{9\}$   
b)  $x = \frac{-13}{5}$  ó  $\left\{\frac{-13}{5}\right\}$   
c)  $x = \frac{-30}{7}$  ó  $\left\{\frac{-30}{7}\right\}$   
d) No tiene solución, ya que obtenemos  $x = -7$ , pero el valor  $-7$ , según la condición para el denominador, no puede ser asumido.  
e)  $x = -\frac{1}{7}$  ó  $\left\{-\frac{1}{7}\right\}$   
f) No hay solución. Se llega a la inconsistencia  $0 = -8$   
g)  $x = -10$  ó  $\{-10\}$   
h)  $x = 18$  ó  $\{18\}$

i)  $x = \frac{19}{5}$  ó  $\left\{ \frac{19}{5} \right\}$  Observe que  $x \neq 7, 1$

5.  $a = 0$  ,  $b = 5$   
 $a = 10$  ,  $b = 0$   
 $a = 2$  ,  $b = 4$   
 $a = 6$  ,  $b = 2$

6.  $x = 1, y = 2$  Al considerar las soluciones para cada una de las ecuaciones del sistema dado, aunque son muchas, se encuentra que  $x = 1, y = 2$  son las únicas que satisfacen a ambas ecuaciones de manera simultanea.

### 10.3. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO ●●●●

Los siguientes ejercicios de aplicación se pueden realizar apoyándose en una figura y sobre ella dibujar las partes que se indiquen en el problema. También, se puede sistematizar un proceso en el cual se definan variables y se escriban ecuaciones con esas variables, para luego resolverlas y finalmente, escribir la interpretación del resultado obtenido dentro del contexto del problema.

A continuación se presenta esta segunda manera de resolver ejercicios de aplicación de ecuaciones de primer grado.

1. El precio de un producto se cancela así: las dos quintas partes en efectivo; el 35% de la parte restante, con cheque; \$ 780.000 con tarjeta de crédito.

- a) ¿Cuál es el precio del producto?
- b) ¿A qué porcentaje del precio del producto corresponde lo cancelado con tarjeta de crédito?

a) 1) *Definición de variables.*  
Sea  $p$  el precio del producto.

2) *Escritura de ecuaciones.*

La información que trae el ejercicio se escribe en términos de la variable, así:

$\frac{2}{5}p$ : representa el pago en efectivo.

$35\% \left(\frac{3}{5}p\right)$ : representa el pago con cheque

$\$ 780.000$ : lo que se paga con tarjeta de crédito.

Luego, la ecuación que representa el problema planteado es:

$$p = \frac{2}{5}p + 35\% \left(\frac{3}{5}p\right) + 780.000$$

3) *Resolver la ecuación e interpretar la solución dentro del contexto del problema.*

$$p = \frac{2}{5}P + 35\% \left(\frac{3}{5}p\right) + 780.000$$

$$p = \frac{2}{5}P + \frac{35}{100} \left(\frac{3}{5}p\right) + 780.000$$

$$p = \frac{2}{5}P + \left(\frac{35}{100} \cdot \frac{3}{5}\right)p + 780.000$$

$$p = \frac{2}{5}P + \left(\frac{7}{100} \cdot \frac{3}{1}\right)p + 780.000$$

$$p = \frac{2}{5} P + \frac{21}{100} p + 780.000 \quad : \quad \text{¿Por qué?}$$

$$p - \frac{2}{5} P + \frac{21}{100} p = 780.000$$

$$\frac{100P - 20(2p) - 21p}{100} = 780.000$$

$$\frac{39p}{100} = 780.000$$

$$\frac{100}{39} \cdot \frac{39}{100} p = \frac{100}{39} (780.000) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$P = 2.000.000$$

**Conclusión:** el precio del producto es \$ 2.000.000

b) Con tarjeta de crédito se canceló: \$ 780.000,

$$\begin{array}{l} \text{Luego,} \quad \$ 2.000.000 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 100\% \\ \quad \quad \quad \$ 780.000 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad x \end{array}$$

$$x = \frac{(\$780.000)(100\%)}{\$2.000.000} = 39\%$$

**Conclusión:** lo cancelado con tarjeta de crédito corresponde al 39% del precio del producto.

2. El 10% de las dos quintas partes del dinero que tiene como presupuesto diario una persona equivale a \$ 800, ¿De cuánto es el presupuesto diario de esta persona?

Sea  $x$  el presupuesto diario de la persona.

$$10\% \left( \frac{2}{5} x \right) = 800$$

$$\frac{10}{100} \left( \frac{2}{5} x \right) = 800$$

$$\frac{1}{10} \left( \frac{2}{5} x \right) = 800$$

$$\left( \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{5} \right) x = 800$$

$$\frac{1}{25} x = 800$$

$$x = (800)25$$

$$x = 20.000$$

**Conclusión:** el presupuesto diario de la persona es \$ 20.000

3. Una persona tiene 150.000 dólares para invertir. Una parte la invierte al 8% anual y el resto al 7% anual. Si al final del año, recibe en total 11.100 dólares por concepto de intereses, ¿cuanto dinero invirtió en cada tasa?

1) *Definición de variables.*

Sea  $a$ : dinero invertido al 8% anual

$b$ : dinero invertido al 7% anual.

2) *Escritura de ecuaciones.*

$$a + b = 150.000$$

$$8\% a + 7\%b = 11.100$$

### 3) Solución e interpretación.

Tenemos un sistema de ecuaciones de primer grado con dos variables. Vamos a plantear el método de sustitución para resolverlo. El método consiste en despejar una variable en cualquiera de las dos ecuaciones, esto es, escribir una variable en términos de la otra, y luego reemplazarla en la otra ecuación. Veamos:

Como  $a + b = 150.000$ , entonces,  $a = 150.000 - b$

Ahora, se reemplaza  $a = 150.000 - b$  en  $8\%a + 7\%b = 11.100$

Entonces:  $8\% a + 7\%b = 11.100$

$$\frac{8}{100} a + \frac{7}{100} b = 11.100$$

$$\frac{8}{100} (150.000 - b) + \frac{7}{100} b = 11.1000$$

$$\frac{1.200.000}{100} - \frac{8b}{100} + \frac{7b}{100} = 11.100$$

$$12.000 - \frac{b}{100} = 11.100$$

$$12.000 - 11.100 = \frac{b}{100}$$

$$900 = \frac{b}{100}$$

$$90.000 = b$$

Como  $a + b = 150.000$ , basta con reemplazar  $b = 90.000$  y se obtiene que:

$$a + 90.000 = 150.000$$

$$a = 150.000 - 90.000$$

$$a = 60.000$$

**Conclusión:** la inversión al 8% es de % 60.000 y la inversión al 7% es de % 90.000

4. El saldo total de tres cuentas de ahorro es de \$ 20.000.000. El saldo de la segunda cuenta es \$ 5.000.000 más que el saldo de la primera cuenta; el saldo de la tercera cuenta es \$ 2.000.000 menos que el saldo de la segunda cuenta. ¿De cuánto es el saldo en cada una de las tres cuentas de ahorro?

1) *Definición de variables.*

P: saldo de la primera cuenta

S: saldo de la segunda cuenta

T: saldo de la tercera cuenta

2) *Escribir ecuaciones.*

$$P + S + T = 20.000.000$$

$$S = P + 5.000.000$$

$$T = S - 2.000.000$$

3) *Resolver e interpretar.*

Escribimos  $P + S + T = 20.000.000$  en términos de una variable, por ejemplo  $p$ , para lo cual utilizamos las otras dos ecuaciones:  
 $S = P + 5.000.000$  y  $T = S - 2.000.000$ .

Veamos:

$$P + S + T = 20.000.000$$

$$P + P + 5.000.000 + S - 2.000.000 = 20.000.000$$

$$P + P + 5.000.000 + P + 5.000.000 - 2.000.000 = 20.000.000$$

$$3P + 8.000.000 = 20.000.000$$

$$3P = 20.000.000 - 8.000.000$$

$$3P = 12.000.000$$

$$p = \frac{12.000.000}{3}$$

$$P = 4.000.000$$

Ahora, reemplazamos  $P = 4.000.000$  en  $S = P + 5.000.000$ :

Luego,  $S = 4.000.000 + 5.000.000$   
 $S = 9.000.000$

Finalmente, reemplazamos  $S = 9.000.000$  en  $T = S - 2.000.000$ :

Luego,  $T = 9.000.000 - 2.000.000$   
 $T = 7.000.000$

**Conclusión.** El saldo de la primera cuenta es \$ 4.000.000.  
El saldo de la segunda cuenta es \$ 9.000.000.  
El saldo de la tercera cuenta es \$ 7.000.000.

### 10.3.1. EJERCICIOS ●●●●

- 1. Un consultor de mercadeo sugiere a cierta empresa invertir en publicidad \$16.000.000. La inversión en la radio es \$2.000.000 menos que lo invertido en televisión; el doble de la inversión en prensa es \$3.000.000 más de lo invertido en radio. ¿Cuánto dinero fue invertido en cada medio?
- 2. Del salario mensual que recibe una persona, el 25% lo destina para pagar el alquiler de su vivienda; las tres quintas partes para pagar educación, servicios y transporte;  $\frac{4}{125}$  partes las otorga a una obra social y ahorra \$ 472.000. ¿Cuál es el salario mensual de esta persona?
- 3. Encontrar el número que sumado con su quinta parte equivale a 12.
- 4. Un pedido realizado por un comerciante al mayorista que lo atiende es como sigue: la cuarta parte de la cantidad de jabón de tocador más 10 unidades, equivale a la cantidad de cojines de champú del pedido; el doble de latas de talco para el cuerpo es 5 más que la cantidad de cojines de champú. Se sabe además, que el total de unidades de los productos pedidos por el comerciante es 45. ¿Cuántas unidades de cada producto fueron pedidas?
- 5. Dos facturas suman en total \$ 7.400.000. Por incumplimiento en el pago, se ejecuta una sanción que incrementa en el 13,5% el valor de la primera factura y en el 9%, el valor de la segunda factura. En total, por concepto del incremento realizado debido a la sanción, se canceló \$ 823.500. ¿De cuánto es el monto de cada factura?
- 6. Si las  $\frac{4}{5}$  partes del precio de cierto artículo se cancelan de contado; de

la parte restante se paga el 40% con cheque a 60 días y aún se adeuda \$ 240.000,

a) ¿Cuál es el precio del artículo?

b) ¿Qué porcentaje del precio del artículo se cancela de contado?

→ 7. Una persona tiene \$ 2.000.000. Invierte \$ 400.000 en un título valor que paga intereses del 5% anual y \$ 700.000 en otro título valor que paga intereses anuales del 6%. Si la persona está interesada en obtener ingresos anuales totales por concepto de intereses equivalentes a \$ 980.000, ¿a qué tasa de interés anual debe invertir el resto de su dinero?

### 10.3.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS ●●●●

1. En radio: \$ 5.000.000  
En prensa: \$ 4.000.000  
En televisión: \$ 7.000.000
2. El salario mensual de la persona es \$ 4.000.000.
3. El número es 10
4. Unidades de jabón de tocador: 20  
Unidades de cojines de champú: 15  
Unidades de latas de talco para el cuerpo: 10
5. Monto de la primera factura: \$ 3.633.333,33  
Monto de la segunda factura: \$ 3.766.666,67

6. El precio del artículo es \$ 2.000.000.  
Se canceló de contado el 12% del precio del artículo.
7. Debe invertir el resto de su dinero, \$ 900.000, al 102%.

#### 10.4. ECUACIÓN CUADRÁTICA ●●●●

Toda la ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , con  $a, b, c \in \mathbb{R}$  y  $a \neq 0$  recibe el nombre de ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado.

A continuación se muestra un proceso de solución para esta ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{1}{a}(ax^2 + bx + c) = \frac{1}{a}(0) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$\frac{1}{a}(ax^2) + \frac{1}{a}(bx) + \frac{1}{a}(c) = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{-4a^2c + b^2}{4a^3}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{a(-4ac + b^2)}{4a^3}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Ahora, tenemos una diferencia de cuadrados, luego:

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right] \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right] = 0$$

Observe que si  $mn = 0$ , entonces,  $m = 0$  ó  $n = 0$

Entonces,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0 \quad \text{ó} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right) - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0$$

Luego,

$$x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0 \quad \text{ó} \quad x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0$$

$$x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad \text{ó} \quad x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

$$x = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Así, como la incógnita o variable de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ , se puede expresar en términos de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , se pueden resolver ecuaciones cuadráticas aplicando directamente los resultados anteriores.

**Ejemplos:** resolver, si es posible, cada una de las siguientes ecuaciones:

1.  $2x^2 + x = 15$

Escribimos en la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  la ecuación  $2x^2 + x = 15$ .

Esto es,  $2x^2 + x = 15$   
 $2x^2 + x - 15 = 0$

Identificamos los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ :

$a = 2, b = 1, c = -15$

Ahora, aplicando  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  y  $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Se obtiene:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-15)}}{2(2)}, y, x = \frac{-1 - \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-15)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 120}}{4}, y, x = \frac{-1 - \sqrt{1 + 120}}{4}$$

$$x = \frac{-1 + 11}{4}, y, x = \frac{-1 - 11}{4}$$

$$x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad ,y, \quad x = \frac{-12}{4} = -3$$

Luego, el conjunto solución de:  $2x^2 + x = 15$  es  $\left\{\frac{5}{2}, -3\right\}$

Representado en la recta numérica, el conjunto solución de la ecuación se ve así:



$$2. \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = -1$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = -1, \text{ tiene que cumplir que } x \neq 0, 2$$

**Operando:**

$$\frac{1(x-2) - 1(x)}{x(x-2)} = -1$$

$$\frac{1-2-x}{x(x-2)} = -1$$

$$\frac{-2}{x(x-2)} = -1$$

$$-2 = -1 [x(x-2)]$$

[ Aplicamos el hecho de tener dos fraccionarios equivalentes, esto es, si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces, } ad = bc ]$$

$$-2 = -x(x - 2)$$

$$-2 = -x^2 + 2x$$

$$0 = -x^2 + 2x + 2$$

$$a = -1, \quad b = 2, \quad c = 2$$

Luego,

$$x = \frac{-2 + \sqrt{(2)^2 - 4(-1)(2)}}{2(-1)}, \quad y, \quad x = \frac{-2 - \sqrt{(2)^2 + 4(-1)(2)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{4 + 8}}{-2}, \quad y, \quad x = \frac{-2 - \sqrt{4 + 8}}{-2}$$

$$x = \frac{-2 + 3,46}{-2} = -0,73 \quad ,y, \quad x = \frac{-2 - 3,45}{-2} = 2,73$$

Luego el conjunto solución para  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = -1$  es  $\{-0,73, 2,73\}$ .

Gráficamente:



$$3. \quad 3m^2 = 2m - 8$$

$$3m^2 - 2m + 8 = 0$$

$$a = 3, \quad b = -2, \quad c = 8$$

Luego,

$$m = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(8)}}{2(3)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 96}}{9} = \frac{2 \pm \sqrt{-92}}{6}$$

Observe que  $\sqrt{-92}$  no está definida en el conjunto de los números reales ya que, como se estudió en el apartado sobre exponentes racionales, no hay ningún número real cuyo cuadrado sea un número negativo.

Esto significa que la ecuación  $3m^2 = 2m - 8$  no tiene solución.

### 10.4.1. EJERCICIOS ●●●●

→ 1. Encontrar, si existe, la solución de cada una de las siguientes ecuaciones.

a)  $4x^2 - 8x + 3 = 0$

b)  $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = -1$

c)  $\frac{m(m-1)}{2} = 66$

d)  $(-4-x)(-2x+3) = 0$

e)  $15a^2 + 11a - 14$

→ 2. Encontrar el número que sumado con su recíproco es igual a  $\frac{10}{3}$ .

→ 3. En  $k = \frac{m(m+10)}{44}$ , despejar  $m$

→ 4. En  $T = \frac{\sqrt{m} M}{d^2}$ , despejar  $d$ .

### 10.4.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS ●●●●

1. a)  $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$  o también se puede escribir:  $x = \frac{1}{2}$  ó  $x = \frac{3}{2}$

b) La ecuación no tiene solución, ya que se llega a  $x^2 + 1 = 0$

c)  $m = 12$  ó  $m = -11$  o también  $\{ 12, -11 \}$

d)  $x = -4$  ó  $x = \frac{3}{2}$

e)  $a = \frac{2}{3}$  ó  $a = \frac{-7}{5}$

2. El número es 3 ó  $\frac{1}{3}$

3.  $m = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 176k}}{2}$

4.  $d = \sqrt{\frac{VmM}{T}}$  ó  $d = -\sqrt{\frac{Vm m}{T}}$

### 10.5. ECUACIONES CON RADICALES ●●●●

Estas ecuaciones se caracterizan porque la variable o incógnita hace parte de la cantidad subradical.

Como en:  $\sqrt{5x - 2} = 3$  ,  $2 - \sqrt{x - 1} = 0$  ,  $\sqrt{5 - x} - \sqrt{x + 3} = 0$

Para encontrar, si existe, el conjunto solución, se aplican las propiedades de la potenciación a la manera como se trató en el apartado de exponentes racionales.

Veamos: resolver, si es posible, la ecuación  $\sqrt{3x - 2} = x - 2$

$$\sqrt{3x - 2} = x - 2$$

$$(3x - 2)^{\frac{1}{2}} = x - 2$$

$$\left[ (3x - 2)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = [x - 2]^2$$

$$(3x - 2)^{\frac{2}{2}} = (x - 2)^2$$

$$(3x - 2)^1 = (x - 2)^2$$

$$3x - 2 = (x - 2)(x - 2)$$

$$3x - 2 = x^2 - 2x - 2x + 4$$

$$3x - 2 = x^2 - 4x + 4$$

$$0 = x^2 - 4x + 4 - 3x + 2$$

$$0 = x^2 - 7x + 6$$

Como se obtuvo una ecuación cuadrática, se aplica la fórmula estudiada en el apartado sobre ecuaciones cuadráticas, y se obtiene que:

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \text{ tiene como solución a } x = 6 \text{ ó } x = 1$$

Al verificar estas posibles soluciones en la ecuación original, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \text{Para } x = 6 : \quad & \sqrt{3x - 2} = x - 2 \\
 & \sqrt{3(6) - 2} = 6 - 2 \\
 & \sqrt{16} = 4 \\
 & 4 = 4
 \end{aligned}$$

Luego  $x = 6$  es solución.

$$\begin{aligned}
 \text{Para } x = 1: \quad & \sqrt{3x - 2} = x - 2 \\
 & \sqrt{3(1) - 2} = 1 - 2 \\
 & \sqrt{1} = -1 \\
 & 1 \neq -1
 \end{aligned}$$

Luego,  $x = 1$  no es solución.

En síntesis, la única solución para  $\sqrt{3x - 2} = x - 2$  es  $x = 6$

Gráficamente:



Otro ejemplo: resolver, si es posible, la ecuación.

$$\sqrt[3]{2x - 1} = 2$$

$$\sqrt[3]{2x - 1} = 2$$

$$(2x - 1)^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$\left[ (2x - 1)^{\frac{1}{3}} \right] = [2]^3$$

$$(2x - 1)^3 = 8$$

$$(2x - 1)^1 = 8$$

$$2x - 1 = 8$$

$$2x = 9$$

$$x = \frac{9}{2}$$

Comprobación: reemplazamos  $x = \frac{9}{2}$  en  $\sqrt[3]{2x - 1} = 2$

Luego, 
$$\sqrt[3]{2\left(\frac{9}{2}\right)} - 1 = 2$$

$$\sqrt[3]{9 - 1} = 2$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$2 = 2$$

**Esto es,**  $x = \frac{9}{2}$  es solución de  $\sqrt[3]{2x - 1} = 2$



### 10.5.1. EJERCICIOS



1. Resolver, si es posible, cada una de las siguientes ecuaciones.

a) 
$$\sqrt{2x - 1} = \sqrt{x + 3}$$

b)  $\sqrt{2x - 4} = x - 2$

c)  $(1 + 0.03)^7 = (1 + i)^{12}$

d)  $5 - \sqrt{7x - 3} = 0$

e)  $(4)^{14} = (1 - i)^{-4}$

→

2. Despejar K en  $T = T = 2n\sqrt{\frac{k}{m}}$

→

3. Despejar x en  $m = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - y^2}$

### 10.5.2. Respuestas a los ejercicios

1. a)  $x = 4$  o también  $\{4\}$

b)  $\{4, 2\}$

c)  $i = 0,01739$

a)  $\{4\}$

b)  $i = \frac{63}{64}$

2.  $K = \frac{T^2 m}{4n^2}$

3.  $x = \frac{\sqrt{4m^2 + y^2}}{2}$

## XI. INECUACIONES

Sean  $a$ ,  $b$  números reales. La notación  $a > b$ , que se lee: “el número real  $a$  es mayor que el número real  $b$ ”, o simplemente: “ $a$  es mayor que  $b$ ”, significa que la diferencia  $a - b$  es positiva o mayor a cero.

En símbolos: si  $a > b$ , entonces,  $a - b > 0$

La desigualdad  $a > b$  equivale a escribir la desigualdad  $b < a$  que se lee: “ $b$  es menor que  $a$ ”. Así, si  $b < a$ , entonces,  $b - a < 0$ .

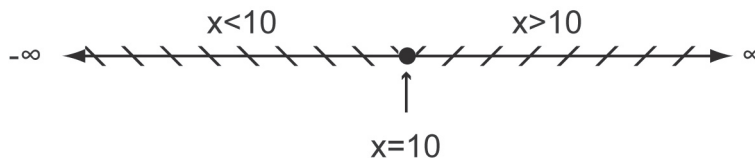
Esto es, si  $b$  es menor que  $a$ , entonces, la diferencia  $b - a$  es negativa.

Al comparar dos números reales  $a$  y  $b$ , ocurre una única de las siguientes situaciones:  $a = b$  ó  $a < b$  ó  $a > b$ .

Por ejemplo, al comparar el real  $x$  con 10, se tiene una sola de las siguientes situaciones:

$x = 10$       ó       $x < 10$       ó       $x > 10$

En la recta numérica, esto aparece así:



En adelante, al conjunto formado por todos los números reales  $x$  que sean mayores que un valor real  $a$ , lo notaremos  $(a, \infty)$ . Si el conjunto está formado por todos los números reales  $x$  que son menores que un número real  $a$ , lo

notaremos  $(-\infty, a)$ . A la anterior notación se le conoce como notación de intervalo y el paréntesis indica que los extremos del intervalo no hacen parte del conjunto de números reales al que se refiere.

En el ejemplo anterior, en  $x > 10$ , escribimos  $(10, \infty)$ ; en  $x < 10$ , escribimos  $(-\infty, 10)$ .

En la recta numérica:

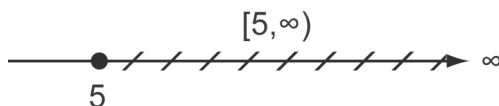


La notación  $a \geq b$ , leída: “a es mayor o igual a b” significa que  $a > b$  ó  $a = b$ .

Por ejemplo, en  $x \geq 5$ , se están considerando los números reales que son mayores o iguales a 5.

En notación de intervalo,  $x \geq 5$  se escribe:  $[5, \infty)$ . El paréntesis cuadrado que se utiliza en la notación indica que el extremo 5 hace parte del conjunto.

En la recta numérica:



### 11.1. PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES ●●●●

1. Si  $a < b$  y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces,  $a + c < b + c$
2. Si  $a < b$  y  $c \in \mathbb{R}^-$  entonces,  $ac > bc$

3. Si  $a < b$  y  $c \in \mathbb{R}^+$  entonces,  $ac < bc$

4. Si  $ab > 0$ , entonces,  $\begin{cases} a > 0 \text{ y } b > 0 \\ \text{ó} \\ a < 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$

5. Si  $ab < 0$ , entonces,  $\begin{cases} a > 0 \text{ y } b < 0 \\ \text{ó} \\ a < 0 \text{ y } b > 0 \end{cases}$

6. Si  $\frac{a}{b} \geq 0$ , entonces,  $\begin{cases} a \geq 0 \text{ y } b > 0 \\ \text{ó} \\ a \leq 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$

Consideremos los siguientes ejemplos.

a) Encontrar los números reales que sumados con 3, resultan ser mayores que 5.

La situación planteada se simboliza así:

$$x + 3 > 5$$

Para encontrar los valores reales que puede asumir la variable  $x$  en esta inecuación, aplicamos las propiedades de las desigualdades de manera conveniente.

Antes de continuar, decimos entonces que: una inecuación es una relación de desigualdad que se establece entre expresiones algebraicas.

Resolver una inecuación es encontrar el conjunto de números reales en donde la variable puede tomar valores de tal manera que la inecuación sea una desigualdad.

Continuamos con el ejemplo. Estamos frente a la inecuación:  $x + 3 > 5$

$$x + 3 > 5$$

$$x + 3 + (-3) > 5 + (-3) \quad : \quad [\text{Aplicamos la propiedad 1}]$$

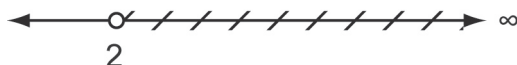
$$x + [3 + (-3)] > 5 + (-3) \quad : \quad [\text{Aplicamos la propiedad asociativa}]$$

$$x + 0 > 2$$

$$x > 2$$

Esto significa que la variable  $x$  puede asumir valores mayores a 2. Es decir, que  $x + 3 > 5$  cuando  $x > 2$ .

La representación del conjunto solución de esta inecuación es, en la recta numérica:



Observe que el punto 2, no se rellenó y se dejó en blanco. De esta manera se está indicando que 2 no hace parte del conjunto solución, que aparece señalado mediante la parte rayada de la recta numérica.

En la representación de intervalo, el conjunto solución para la inecuación  $x + 3 > 5$  se escribe:  $x \in (2, \infty)$ .

Podemos comprobar, escogiendo algunos elementos del conjunto  $(2, \infty)$ , que la inecuación  $x + 3 > 5$  se hace una desigualdad.

Tomemos por ejemplo:

$x = 3$ , ya que  $3 \in (2, \infty)$ . Luego:

$$x + 3 > 5$$

$$3 + 3 > 5$$

$$6 > 5$$

$x = \frac{5}{2}$ , ya que  $\frac{5}{2} \in (2, \infty)$ . Luego:

$$x + 3 > 5$$

$$\frac{5}{2} + 3 > 5$$

$$\frac{5 + 6}{2} > 5$$

$$\frac{11}{2} > 5$$

Pero si tomamos  $x = 2$ , no se obtiene una desigualdad, ya que  $2 \notin (2, \infty)$ .  
Veamos.

$$\text{Con } x = 2 : x + 3 > 5$$

$$2 + 3 > 5$$

$$5 \not> 5 : 5 \text{ no es mayor que } 5$$

b) Encontrar el conjunto solución de:  $-3x + 7 < 5$

$$-3x + 7 \leq 5$$

$$-3x + 7 + (-7) \leq 5 + (-7) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$-3x + [7 + (-7)] \leq 5 + (-7) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$-3x + 0 \leq -2$$

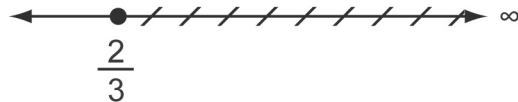
$$-3x \leq -2$$

$$\frac{-1}{3}(-3x) \geq \frac{-1}{3}(-2) \quad : \quad \text{[Multiplicamos por el recíproco de } -3 \text{ a ambos lados de la desigualdad y aplicamos la propiedad 2]}$$

$$\left[ \left( -\frac{1}{3} \right) (-3) \right] x \geq \frac{2}{3}$$

$$x \geq \frac{2}{3}$$

Luego, el conjunto solución de  $-3x + 7 \leq 5$  es  $x \in \left[ \frac{2}{3}, \infty \right)$



En la recta numérica, la representación del conjunto solución queda:

Observe que el punto  $\frac{2}{3}$  se rellenó. De esta manera, se indica que  $\frac{2}{3}$  hace parte del conjunto solución, que aparece señalado mediante la parte rayada de la recta numérica.

c) Encontrar el conjunto solución de  $x^2 - x - 6 < 0$ . Se puede escribir como  $(x - 3)(x + 2) < 0$ .

Luego, tenemos un par de factores:  $x - 3$  y  $x + 2$ , cuyo producto es negativo.

Aplicando la propiedad 4, podemos escribir:

$$\text{Si } (x - 3)(x + 2) < 0, \text{ entonces } \begin{cases} x - 3 > 0 & \text{y } x + 2 < 0 \\ \text{ó} \\ x - 3 < 0 & \text{y } x + 2 > 0 \end{cases}$$

Consideremos cada una de las condiciones planteadas:

En la condición  $x - 3 > 0$  y  $x + 2 < 0$  estamos interesados en conocer qué números reales hacen que  $x - 3$  sea positivo y qué números reales hacen que  $x + 2$  sea negativo, de manera simultánea.

Así,  $x - 3 > 0$  y  $x + 2 < 0$  es equivalente a escribir:  $x > 3$  y  $x < -2$

Escribimos la representación gráfica en la recta numérica de cada conjunto y podemos observar que no hay números reales que satisfagan de manera simultánea las condiciones. En la gráfica, no aparece ninguna parte doblemente rayada.



Esto es, el conjunto solución para  $x > 3$  y  $x < -2$  es vacío, representado  $\emptyset$ .

Ahora, consideremos la condición  $x - 3 < 0$  y  $x + 2 > 0$ . Esto es, estamos interesados en conocer qué números reales hacen que  $x - 3$  sea negativo y

qué números reales hacen que  $x + 2$  sea positivo, de manera simultánea.

Así,  $x - 3 < 0$  y  $x + 2 > 0$  es equivalente a escribir:  $x < 3$  y  $x > -2$

Representemos gráficamente en la recta numérica de cada conjunto y podemos observar que los números reales que cumplen con estar simultáneamente en  $x < 3$  y  $x > -2$ , son los que aparecen en la parte doblemente rayada.



Es decir, los números reales  $x$  que satisfacen la condición  $x < 3$  y  $x > -2$  son los  $x \in (-2, 3)$ .

En conclusión: El conjunto solución de  $x^2 - x - 6 < 0$  es el conjunto en donde la variable  $x$  puede tomar valores, es decir,  $x \in \emptyset \cup (-2, 3)$  que es finalmente,  $x \in (-2, 3)$ .

d) Encontrar el conjunto solución para:

$$\frac{-5}{x+7} > 0$$

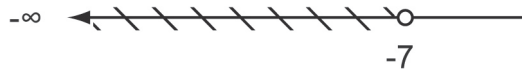
Estamos en la situación: Si  $\frac{a}{b} > 0$ , entonces,  $\begin{cases} a > 0 \text{ y } b > 0 \\ \text{ó} \\ a < 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$

Como  $a = -5$ , la condición  $a > 0$  y  $b < 0$  no aplica. Luego, analizamos únicamente para cuando  $a < 0$  y  $b > 0$ :

$$-5 < 0 \quad \text{y} \quad x + 7 < 0$$

Luego, si  $x + 7 < 0$   
 $x < -7$

Entonces,



Así, el conjunto solución para  $\frac{-5}{x+7} > 0$  está dado por  $x \in (-\infty, -7)$ .

e) Encontrar el conjunto solución de  $4x - 3 \leq 5x + 7$ .

$$4x - 3 \leq 5x + 7$$

$$4x - 5x \leq 7 + 3 \quad \text{¿Por qué?}$$

$$-x \leq 10$$

$$x \geq -10 \quad \text{¿Por qué?}$$

Luego, el conjunto solución es  $x \in [-10, \infty)$ .

### 11.1.1. EJERCICIOS ●●●●

→ 1.

a)  $3(x - 2) + 5 \geq x + 2$

b)  $\frac{x}{x + 5} \leq 1$

c)  $2x^2 + 5x - 12 < 0$

d)  $x^2 - 9x + 20 > 0$

e)  $x + 7 \leq -x - 2$

f)  $\frac{-x - 2}{-5} < 0$

g)  $x^2 (x + 2)^2 < 0$

h)  $\frac{1}{x} - 2 > 1$

i)  $\frac{x + 5}{x - 2} < 0$

j)  $(x - 1)^3 > (x + 1)^2$

k)  $-2 \leq 3x + 5 < 5$

→ 2. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

a) Si  $a > 0$  y  $b < 0$ , entonces,  $2a - 3b < 0$

b) Si  $a < 0$  y  $b < 0$  y  $a < b$ , entonces,  $a^2 > b^2$

3. ¿Es  $x = -7$  una solución de  $\frac{-x + 7}{x - 1} < 1$ ? Justificar.

### 11.1.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS ●●●●

1.

a)  $x \geq \frac{3}{2}$ . Escrito en notación de intervalo:  $x \in \left[ \frac{3}{2}, \infty \right)$

b)  $x > -5$ . Es notación de intervalo:  $x \in (-5, \infty)$

c)  $x \in \left( -4, \frac{3}{2} \right)$

d)  $x \in (-\infty, 4) \cup (5, \infty)$

e)  $x \in \left( -\infty, -\frac{9}{2} \right]$

f)  $x \in (-\infty, -2)$

g) No tiene solución, ya que  $x^2 (x + 2)$  siempre es positivo.

h)  $x \in \left( 0, \frac{1}{2} \right)$

i)  $x \in (-5, 2)$

j)  $x > 5$ . En notación de intervalo:  $x \in (5, \infty)$

k)  $x \in \left[ -\frac{7}{3}, 0 \right)$ . Sugerencia: Escriba  $-2 \leq 3x + 5 < 5$

Como:  $-2 \leq 3x + 5$  ,y,  $3x + 5 < 5$ . Resuelva cada inecuación y encuentre los términos reales que satisfacen a las dos inecuaciones de manera simultánea.

2.

a) Falso. Se puede escoger, por ejemplo,  $a = 5$  y  $b = -2$  y probar que  $2a - 3b$  es positivo.

b) Falso.

3. Verdadera. Basta con remplazar  $x = -7$  en la inecuación y verificar qué la hace una desigualdad; o también, encontrar el conjunto solución y verificar que  $-7$  pertenece a dicho conjunto.

## 11.2. APLICACIÓN DE LAS INECUACIONES ●●●●

Enseguida se muestran algunas aplicaciones de las inecuaciones, a partir de las nociones de costos totales de producción, ingresos totales y utilidades totales.

Los costos totales de producción se obtienen de la suma entre los costos variables y los costos fijos. Estos últimos son independientes de la producción.

Los ingresos totales se obtienen de multiplicar el precio de venta de cada unidad por el número de unidades vendidas.

La utilidad total resulta de establecer la diferencia entre los ingresos totales y los costos totales.

### **Ejemplos:**

a) Una empresa fábrica bolsas plásticas. Los costos fijos de producción son de \$ 400.000 semanales y el costo unitario de producción es de \$ 300. ¿Cuántas bolsas deberá producir y vender la empresa para obtener una utilidad de por lo menos \$ 500.000 semanales, si se sabe que puede vender cada bolsa a un precio de \$ 1.200?

Veamos:

Costos fijos semanales: \$ 400.000

Costos por producir cada bolsa: \$ 300

Luego, los costos totales de producción,  $C$ , son:  $C = 300x + 400.000$ , en donde  $x$  representa el número de bolsas fabricadas.

También se sabe que el precio de venta de cada bolsa es. \$ 1.200. Luego, el ingreso total,  $I$ , por la venta de  $x$  número de bolsas es:  $I = 1.200x$ .

Debemos encontrar el número de bolsas  $x$  que deberán ser producidas y vendidas para obtener una utilidad,  $U$ , de por lo menos \$ 500.000 semanales, luego,  $U \geq \$500.000$ .

Como  $U \geq 500.000$  y  $U = I - C$ , entonces,

$$U \geq 500.000$$

$$I - C \geq 500.000$$

$$1.200x - (300x + 400.000) \geq 500.000$$

$$900x - 400.000 \geq 500.000$$

$$900x \geq 500.000 + 400.000$$

$$900x \geq 900.000$$

$$x \geq \frac{900.000}{900}$$

$$x \geq 1.000$$

En conclusión, la empresa deberá producir y vender mínimo (por lo menos) 1.000 bolsas para obtener una utilidad de por lo menos \$ 500.000 semanales. Esto, claro está, salvo las condiciones del mercado que se estén dando para este tipo de productos.

b) El costo  $C$  de producir  $x$  número de fichas para atender un parqueadero está dado por:  $C = 40x + 30.000$  pesos.

¿Cuántas fichas deberán ser producidas para que el costo total sea inferior a \$ 50.000?

Según lo planteado, debemos tener que  $C < \$ 50.000$ .

Luego,

$$\begin{aligned}C &< 50.000 \\40x + 30.000 &< 50.000 \\40x &< 50.000 - 30.000 \\40x &< 20.000 \\x &< \frac{20.000}{40} \\x &< 500\end{aligned}$$

En conclusión, deben ser producidas menos de 500 fichas para que el costo total de producción sea inferior a \$ 50.000.

### 11.2.1. EJERCICIOS ●●●●

- 1. Los costos fijos de producción de cierto artículo son de \$2.000.000 mensuales y el costo de producción de cada unidad es de \$10.000. Si el precio de venta por unidad se fijó en \$ 110.000, ¿cuántas unidades deben ser producidas y vendidas par obtener una utilidad de mínimo \$ 1.000.000 mensualmente?

- 2. El costo de producir cierto artículo es de \$900 por unidad y los costos fijos son de \$2.400. Si el precio de venta por unidad es de \$1.200, ¿cuántas unidades del artículo se deberán producir y vender para obtener ganancias?  
[NOTA: Se dice que hay ganancias si  $U > 0$ ]
- 3. Si los costos por producir  $x$  unidades de un artículo están dados por  $C = 8.000 + 10x$  pesos. a) ¿Cuál precio deberá fijarse por unidad para que la utilidad obtenida sea de \$ 492.000 al producir y vender 5.000 unidades del artículo? b) Con el precio fijado en la parte a), ¿cuántas unidades deberá vender para obtener ingresos superiores a \$ 4.400.000?
- 4. Un fabricante puede vender todas las unidades de su producto a 25 dólares cada una. El costo  $C$  en dólares por fabricar  $x$  unidades del producto cada semana está dado por  $c = x^2 - 25x + 400$ . ¿Cuántas unidades deberá producir y vender para que el fabricante:
- Obtenga ganancias.
  - No tenga pérdidas ni ganancias.
- NOTA Si  $U = 0$ , se dice que no hay pérdidas ni ganancias. Esto es, está en el punto de equilibrio.
- Tenga pérdidas.
- NOTA: si  $U < 0$ , se dice que hay pérdidas.
- 5. Si los costos variables por fabricar cierto tipo de repuesto son de 50 dólares por unidad y los costos fijos son de 2.000 dólares, ¿Cuál debe ser el precio de venta de cada repuesto, sabiendo que se producen 500 unidades, para obtener una utilidad superior a 13.000 dólares, pero no mayor a 15.000 dólares?

### 11.2.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS ●●●●

1. Mínimo 30 unidades.
2. Más de 8 unidades.
3. a) \$ 110  
b) 40.000 unidades.
4. a) Deberá vender más de 10 unidades, pero menos de 40 unidades.  
b) 10 unidades o 40 unidades exactamente.  
c) Deberá vender menos de 10 unidades o más de 40 unidades.
5. El precio debe estar en el intervalo (80,84).

# 2

## FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

### I. INTRODUCCIÓN

Además de considerar una variable como un símbolo que toma valores en un conjunto, llamado dominio de variación de la variable, la intención es mostrar algunas maneras como se relacionan dos variables cuyos valores cambian. Esto es, observar que en la relación de dependencia que se establece entre dichas variables, la variable que depende o variable dependiente, cambia cada vez que la variable independiente asume cada uno de los distintos valores del subconjunto de número reales para el cual está definida.

Veamos ejemplos que ilustran la situación que se acaba de describir.

- La demanda de un bien, ya sea este un producto o un servicio, depende del precio que se le asigne. Así, resulta que: al aumentar el precio del bien, la demanda de éste disminuye; en caso contrario, al disminuir el precio del bien, la demanda aumenta.
- Los ingresos percibidos por la venta de un producto, dependen de la cantidad de unidades que sean vendidas de dicho producto.
- Los costos totales de producción de cierto producto, dependen de la cantidad de unidades fabricadas del producto.

- Con una cuerda de longitud dada, es posible encerrar un terreno de forma rectangular. El área encerrada depende de la longitud de los lados que delimitan dicho terreno.
- Al inflar un globo, el tamaño que adquiere depende de la cantidad de aire que se le inyecte; claro está, no podrá sobrepasar cierto tamaño, ya que si se excede la cantidad de aire que el globo puede contener, éste explota.
- Tenga en cuenta que las ventas de un producto aumenta o por lo menos no decae, de acuerdo con la cantidad de dinero invertida en publicidad.

En la siguiente tabla, se muestran algunos datos correspondientes a una situación de demanda de cierto producto:

P: precio del producto (en pesos)	0	20	40	60	80	100	120	140	160
D: Demanda (en unidades)	160	140	120	100	80	60	40	20	0

La tabla se lee así:

“Si el precio del producto es \$40, las unidades demandadas son 120”.

Esta información también se puede escribir mediante la pareja ordenada: (40, 120), en donde el primer componente muestra el precio del producto y el segundo componente, su correspondiente demanda.

La pareja ordenada (100, 60) está indicando que para un precio de \$100 por unidad, la demanda del producto es de 60 unidades.

La pareja ordenada  $(0, 160)$  está indicando que si el producto tuviera precio de \$0, las unidades demandadas serían 160.

Para  $(160, 0)$ , se está indicando que si el precio del producto es el más alto, \$160, la demanda del producto es de 0 unidades.

Los ejemplos que se han mencionado corresponden a relaciones que reciben el nombre de funciones. Veamos por qué. Cada relación se estableció entre dos conjuntos: demanda y precio, ingresos y cantidades vendidas, costos de producción y unidades producidas, tamaño del globo y cantidad de aire inyectado.

Se puede observar que podemos escribir parejas ordenadas, para cada caso, de tal manera que no aparecen primeros componentes iguales para más de una pareja ordenada. Las parejas ordenadas son producto de la regla que se establezca para asociar a cada elemento del primer conjunto, llamado dominio, con un único elemento del segundo conjunto, llamado “rango”.

Vamos entonces a precisar lo dicho anteriormente.

Usualmente,  $x$  representa la variable independiente a la cual, la función representada por  $f$ , asigna a cada valor de la variable  $x$ , otro valor representado por  $y$ .

En símbolos, se escribe así:

$$y = f(x)$$

Se lee: “ $y$  es el valor que la función  $f$  le asigna al valor  $x$ ”.

Los valores de  $x$  para los que  $f(x)$  está definida, forman un subconjunto del

conjunto de los números reales.  $A$  este subconjunto se lo denomina dominio de la función  $f$ , e indica que a valores de  $x$  se les pueden aplicar la función  $f$ . Por esta razón, decimos que hablamos de funciones reales de variable real.

De otra parte, el conjunto formado por todos los valores  $y$ , en donde  $y$  se conoce con el nombre de variable dependiente, se llama “rango de la función  $f$ ”.

**Definición:** Una función  $f$  está formada por un subconjunto  $A$  del conjunto de los números reales, llamado dominio de  $f$ , un conjunto  $B$  llamado rango de  $f$ , y una regla que asigna a cada  $x \in A$  un único elemento  $f(x)$  designado por  $y$ ,  $y \in B$ .

La regla en este caso es la manera de calcular  $f(x)$  para cualquier valor de  $x$ , con  $x \in A$ .

La notación  $y = f(x)$  también se lee: “la imagen de  $x$  a través de la función  $f$ , es  $y$ ”, o, “ $y$  es la imagen de  $x$  a través de la función  $f$ ”.

De modo que, la pareja ordenada  $(x, y)$  indica que es la imagen de  $x$  o que la imagen de  $x$  es  $y$ .

Para representar funciones podemos hacerlo de las siguientes maneras:

- a) Por medio de una tabla de valores.
- b) Por medio de una ecuación.
- c) Por medio de un enunciado verbal.
- d) Por medio de una gráfica.

Brevemente, nos referiremos a cada una de las maneras mencionadas.

**a) Por medio de una tabla de valores.**

Ya citamos en la página 138 un ejemplo, al presentar la tabla que relaciona el precio  $P$  de un producto con la demanda  $D$  de dicho producto. Allí, la regla no se explicitó.

Aprovechamos para decir, que también es posible referirse a la función escribiéndola como un conjunto de parejas ordenadas. Para el ejemplo:

$$D = \left\{ \begin{array}{l} (0, 160), (20, 140), (40, 120), (60, 100), (80, 80), \\ (100, 60), (120, 40), (140, 20), (160, 0) \end{array} \right\}$$

Las primeras componentes de cada pareja forman el dominio de la función  $D$  y las segundas componentes forman el rango de la función  $D$ .

**b) Por medio de una ecuación.**

Aquí se hace referencia a que una función se expresa haciendo uso de la simbolización  $y = f(x)$ , escribiendo explícitamente  $f(x)$ .

**Por ejemplo:**  $Y D(p) = 160 - p$

Es decir,  $y = 160 - p$ . Como se puede observar, al reemplazar a  $P$  (que en este caso representa el precio de un producto) por valores de un conjunto (el dominio), se obtienen valores de  $y$  (que en este caso representa la demanda del producto), conformados por el rango de la función  $D$ .

**c) Por medio de un enunciado verbal.**

Aquí se hace referencia a describir la función en palabras. Sin embargo, cuando es posible, siempre se explicita la tabla de valores o la ecuación que

la representa. La idea es describir la función de manera precisa, con palabras. Este tipo de ejercicio, ayuda a entender la regla que se establece cuando se enuncia la función.

Por ejemplo: Hacer corresponder o asociar a todo número real, su recíproco.

En este ejemplo, el dominio es el conjunto de los números reales, excepto el número cero, ya que  $0^{-1}$  no está definido.

Si fuéramos a simbolizar la función que acabamos de describir, tendríamos que:

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = x^{-1} \end{array}$$

Con esta simbolización se está explicitando el dominio de la función  $f$  y además se indica que para cada número  $x$  del dominio de  $f$ ,  $f$  le hace corresponder, o le asigna como imagen al elemento  $y$ , definido por  $x^{-1} = \frac{1}{x}$ .

También se puede escribir la función así:

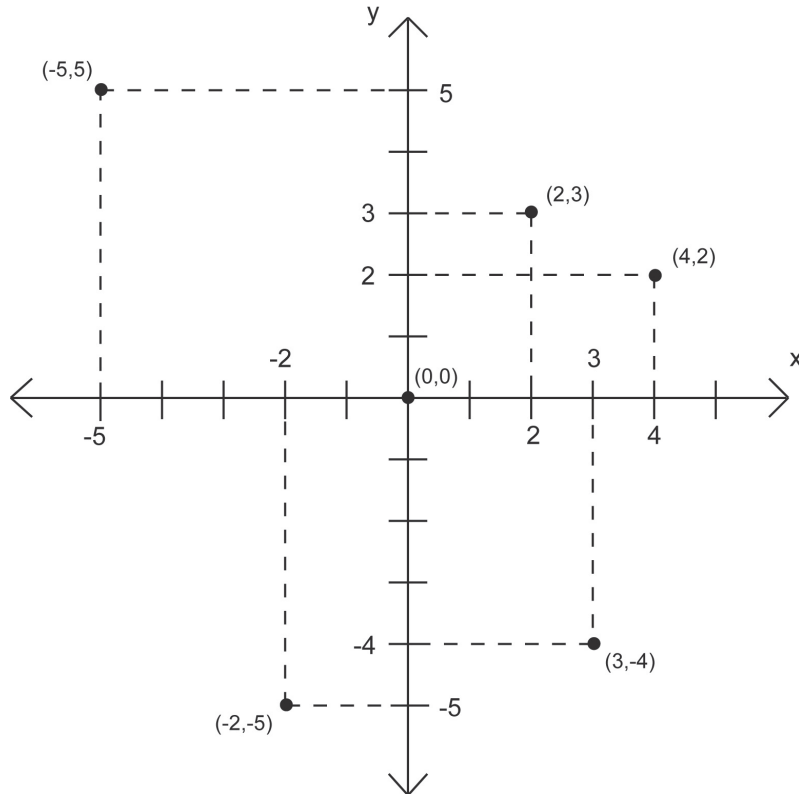
$y = f(x) = \frac{1}{x}$ , sin explicitar el dominio, pero no por ello, sin dejarlo de lado.

#### **d) Por medio de una gráfica.**

Para hacer dicha representación, debe tenerse en cuenta lo siguiente:

i) El plano cartesiano o plano  $xy$ , está formado por dos rectas numéricas perpendiculares que se cruzan en un punto, al cual se le llama el origen.

Cada punto del plano está representado por una pareja ordenada  $(x, y)$ . En la figura, aparecen representados los puntos:  $(2, 3)$ ,  $(-2, -5)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(-5, 5)$ ,  $(3, -4)$ .



ii) En el plano  $xy$  se dibujan todos los puntos  $(x, y)$  que satisfacen la ecuación  $y = f(x)$ .

Generalmente, al dibujar la gráfica de una función no ubicamos todos los puntos que satisfacen a  $y = f(x)$ , porque es un trabajo bastante laborioso. Lo que hacemos es ubicar algunos puntos y trazar un esbozo de la gráfica de la función dada. Para ello, establecemos el siguiente proceso que nos permitirá llevarnos una idea de cómo es la función vista gráficamente:

1. Determinar el dominio de la función.
2. Identificar los puntos de corte de la gráfica con los ejes coordenados.
3. Si es necesario, para completar la idea acerca de cómo se comporta la gráfica de la función, hacemos una tabla con algunos valores que nos ayuden a visualizarla.
4. Finalmente, si la variable independiente es continua, es decir, si es infinitamente divisible (por ejemplo, en el caso de que la variable independiente represente libras de harina, ya que podemos hablar de una libra y media, de 35 gramos, etc.) unimos dichos puntos mediante una línea y el resultado es entonces la gráfica de la función.

Si la variable independiente es discreta, es decir, si no es posible dividirla (por ejemplo, en el caso de que la variable independiente represente el precio del pasaje por persona) los puntos  $(x, y)$  representan la gráfica de la función.  
¿Por qué?

### **Ejemplos:**

a) Para la función  $f$  definida por  $f(x) = 5x + 4$ , bosquejar la gráfica que la representa.

1. Determinar el dominio de  $f(x) = 5x + 4$ .

Esta función se denomina función polinómica<sup>1</sup> de grado uno porque el exponente más alto de la variable independiente es 1. Por ser una función polinómica, la variable puede asumir cualquier valor del conjunto de los números reales y al evaluarlo en la función, genera como resultado otro número real.

Una función  $f$  se llama *función polinómica* si tiene la forma:

$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$ , en donde  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son números reales y  $n$  (el exponente más alto de la variable) indica el grado de la función.  $n$  toma valores en los enteros positivos, es decir,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Como para la función polinómica siempre ocurre que su variable independiente acepta como valor, cualquier número real; ya que no la indetermina, decimos que su dominio es el conjunto de los números reales.

**Ejemplos de funciones polinómicas son:**

$$h(x) = 3x^2 + 5x - 7 \quad D_h : \mathbb{R}, \text{ grado de } h: 2$$

$$g(x) = \frac{1}{5}x^9 - \frac{7}{2}x^5 + 2x - 9 \quad D_g : \mathbb{R}, \text{ grado de } g: 9$$

Es decir, que el dominio de esta función es el conjunto de los números reales,  $\mathbb{R}$ .

Podemos simbolizarlo así:  $D_f : \mathbb{R}$  que se lee: “el dominio de la función  $f$  es el conjunto de los números reales”.

2) Identificar los puntos de corte de la gráfica de  $f$  con los ejes coordenados o ejes  $x, y$ .

Los puntos de corte de la gráfica de  $f$  con los ejes  $x, y$  hacen referencia a los puntos (si los hay) en donde la gráfica de la función intercepta a cada eje.

- *Intercepto con el eje  $x$* : También se le da el nombre de cero. Para identificarlo, basta con encontrar el (los) elemento(s) del dominio de la función  $f$  tales que  $f(a) = 0, a \in D_f$ .

Para nuestro caso: como  $f(x) = 5x + 4$ , entonces buscamos que  $x \in D_f$   $f(x) = 0$ , es decir, planteamos:  $5x + 4 = 0$ .

Al resolver la ecuación, obtenemos como solución  $x = \frac{-4}{5}$ . Luego, el intercepto con el eje x es el punto  $\left(\frac{-4}{5}, 0\right)$ .

- *Intercepto con el eje y.* Para identificar (si existe), basta con observar si  $0 \in D_f$ . De ser así, al evaluar cero en la función, es decir, al calcular  $f(0)$ , obtenemos la componente y la pareja  $(0,y)$ , que representa entonces el intercepto o corte con el eje y.

Para nuestro caso:  $0 \in D_f$ , ya que el  $D_f : \mathbb{R}$  por ser  $f(x) = 5x + 4$ , una función polinómica. Así que  $f(0) = 5(0) + 4 = 0 + 4 = 4$ .

Luego, el corte con el eje y es el punto  $(0, 4)$ .

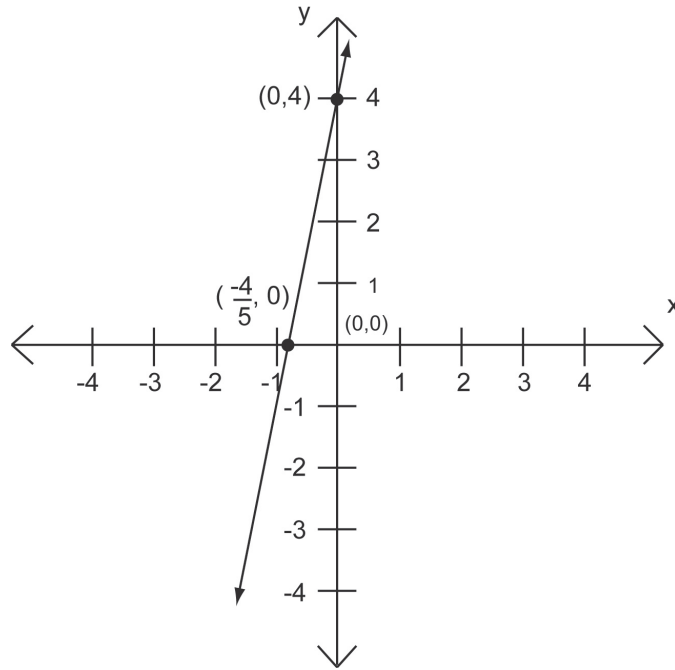
3) Tabla para algunos valores.

x	-5	-3	$-\frac{3}{2} = -1,5$	-1	1	$\frac{5}{2} = 2,5$	3
$y=f(x) = 5x + 4$	-21	-11	$-\frac{7}{2} = -3,5$	-1	9	$\frac{33}{2} = 16,5$	19

4) Bosquejo de la gráfica de la función f.

Observe que la variable independiente, es continua. Ubicamos en el plano xy los cortes con los ejes y, los puntos de la tabla que diseñamos.

Se obtiene como gráfica una línea recta. En adelante, para bosquejar gráficas de funciones de grado 1, bastará con encontrar los puntos de corte con los ejes coordenados y trazar una línea recta que los contenga.



Gráfica de  $f(x) = 5x + 4$

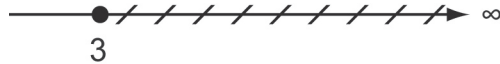
b) Para la función  $g$  definida por  $g(x) = \sqrt{x - 3}$ , bosquejar la gráfica que la representa.

1) Determinar el dominio de:  $g(x) = \sqrt[4]{x - 3}$ .

Observe que la función  $g$  está dada en términos de un radical de índice para, 4.

Esto implica que la cantidad subradical,  $x-3$ , debe ser positiva a cero para que  $\sqrt[4]{x-3}$  tenga sentido o esté bien definida.

Entonces, planteamos la inecuación  $x - 3 \geq 0$ , que, al resolverla, se obtiene:  $x \geq 3$



Luego, el dominio de  $g(x) = \sqrt[4]{x-3}$ , es el conjunto  $[3, \infty)$ . Esto es,  $D_g : x \in [3, \infty)$ .

- 2) Identificar los puntos de corte de la gráfica de  $g$  con los ejes coordenados.

- *Interceptos con el eje x:*

Como  $g(x) = \sqrt[4]{x-3}$  buscamos para que  $x \in D_g$ .

$$g(x) = 0$$

Entonces,  $g(x) = 0$

$\sqrt[4]{x-3} = 0$ . Resolvemos esta ecuación con radical 0 obtenemos:  $x=3$  luego, el intercepto con el eje  $x$  es el punto  $(3,0)$ .

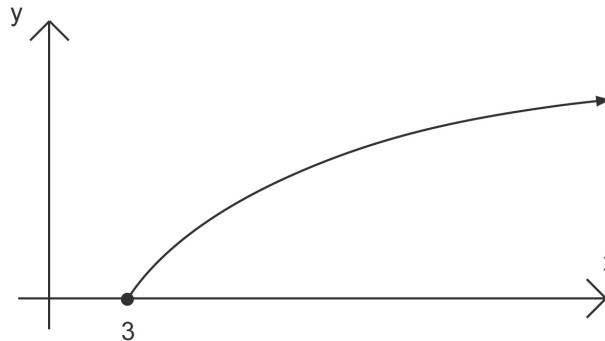
- *Intercepto con el eje y:*

Como  $0 \notin D_g$ , esto significa que no hay corte con el eje  $y$ .

3) Tabla para algunos valores.

x	4	5	6	7	8
$y = g(x) = \sqrt[4]{x-3}$	1	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{3}$	$\sqrt[4]{4}$	$\sqrt[4]{5}$

4) Bosquejo de la gráfica de:  $g(x) = \sqrt[4]{x-3}$



c) Para la función  $h$  definida por  $h(x) = \frac{1}{x-5}$ , bosquejar la gráfica que la representa.

1)  $D_h : \mathbb{R} - \{5\}$

Porque la función  $h$  es una función racional, es decir, una función de la forma  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , en donde  $p(x)$  y  $q(x)$  son funciones polinómicas  $q(x) \neq 0$ .

Así que, para el caso de  $h(x) = \frac{1}{x-5}$ , debemos garantizar que el denominador sea distinto de cero, para lo cual, basta con encontrar el valor de  $x$  que hace que  $x-5$  sea igual a cero y lo retiramos.

El valor que hace igual a cero a  $x - 5$  es  $x = 5$ . Entonces, cualquier real excepto  $x = 5$  permite que  $h(x) = \frac{1}{x - 5}$  esté bien definida, razón por

la cual,

$$D_h : x \in \mathbb{R}, x \neq 5$$

ó

$$D_h : x \in (-\infty, 5) \cup (5, \infty)$$

ó

$$D_h : \mathbb{R} - \{5\}$$

2) *Corte con el eje x.*

$$h(x) = 0$$

$$\frac{1}{x - 5} = 0$$

$$1 = 0 \text{ (contradicción)}$$

Luego, no hay corte con el eje x.

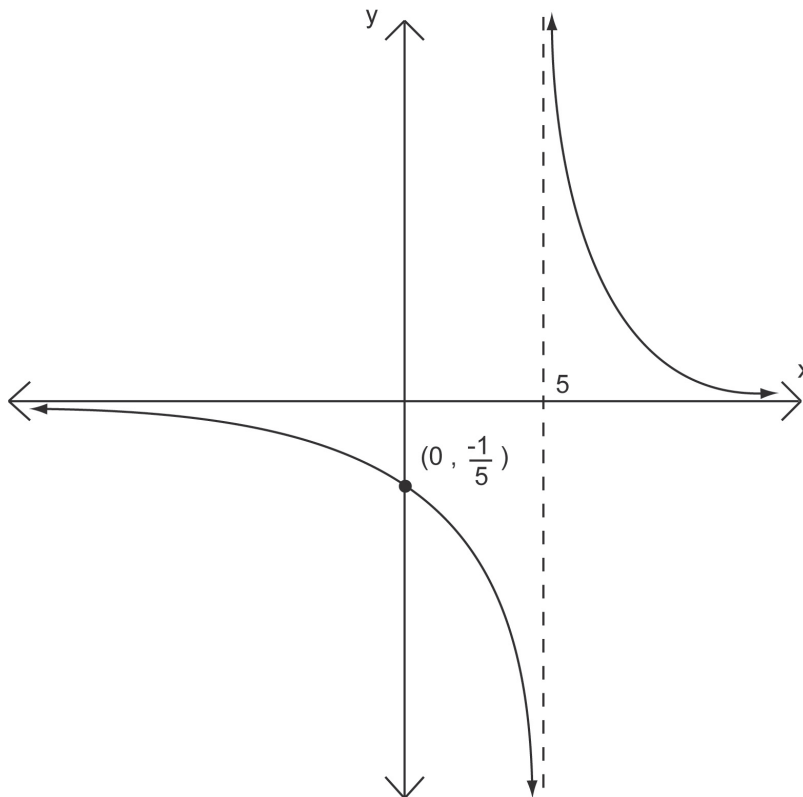
*Corte con el eje y.*

Como  $0 \in D_h$ , entonces,  $h(0) = \frac{1}{0 - 5} = \frac{-1}{5}$  luego, el punto de corte con el eje y es  $\left(0, \frac{-1}{5}\right)$ .

3) *Tabla para algunos valores.*

x	-3	-2	-1	0	1	2	6	7	8
$y = h(x) = \frac{1}{x-5}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

4) Bosquejo de la gráfica de:  $h(x) = \frac{1}{x-5}$



### Definición

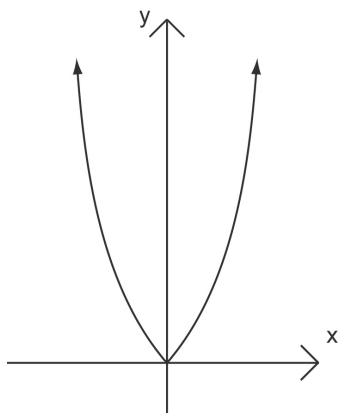
El conjunto formado por las imágenes de todos y cada uno de los elementos del dominio de una función, se llama el rango de la función. Lo simbolizamos por  $R_f$ .

El rango, en este escrito, lo vamos a identificar a partir de la lectura de la gráfica de la función. La lectura a la que nos referimos la realizamos sobre el eje y de abajo hacia arriba identificando en él, los valores que son imagen de los valores del dominio de la función.

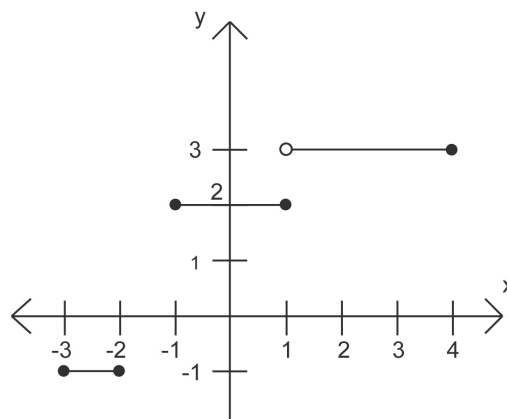
El dominio de una función también es posible identificarlo a partir de la gráfica de la función, realizando la lectura sobre el eje x de izquierda a derecha, y considerando los valores que están definidos para la función.

### Ejemplos:

En las gráficas que aparecen a continuación, se determina el dominio y el rango para cada una de ellas, a partir de la lectura sobre el eje x, y, respectivamente.

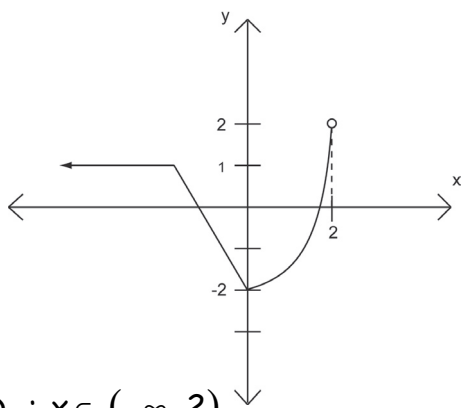


$$D_f : \mathbb{R} \quad R_f : \mathbb{R}$$



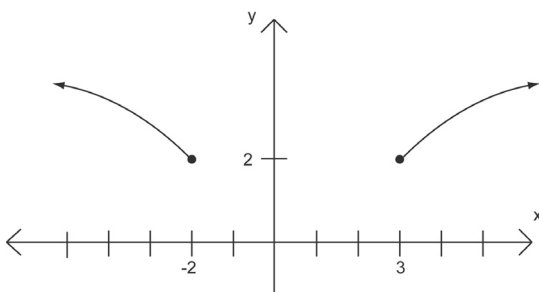
$$D_g : x \in [-3, -2] \cup [-1, 4]$$

$$R_g : \{-1, 2, 3\}$$



$$D_h : x \in (-\infty, 2)$$

$$R_h : [-2, 2)$$



$$D_t : x \in (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$$

$$R_t : [2, \infty)$$

## 2.1. EJERCICIOS ●●●●

→ 1. Determinar el dominio para cada una de las siguientes funciones.

a).  $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 7x - 1$

b)  $h(x) = \frac{3 - x}{x^2 - 16}$

c)  $r(t) = \sqrt{t^2 - t - 6}$

d)  $m(x) = 10$

e)  $n(x) = \frac{-5}{\sqrt{-2x - 15}}$

f)  $k(x) = \frac{2}{x} - \sqrt{x + 3}$

g)  $5(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 7}$

h)  $T(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{5}}$

i)  $z(x) = \sqrt[5]{\frac{x - 1}{x}}$

j)  $g(x) = \sqrt{-25 + x}$

k)  $r(y) = (9 + y)y$

→ 2. Para la función  $f$  definida por  $f(x) = \frac{5}{x} - 3$ ,

- a) Encontrar  $f(-2)$ .
- b) Determinar la imagen de  $-7$ .
- c) Determinar el valor del dominio cuya imagen es  $-2$ .
- d) ¿Es posible evaluar  $x = 0$ ? Justificar la respuesta.

e) Encontrar  $f\left(-\sqrt{5}\right)$

→ 3. Definir los siguientes tipos de relaciones entre dos variables:

- a) Variación directa.
- b) Variación inversa.
- c) Variación escalonada.

→ 4. Para la función  $g$  definida por  $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 4) \\ 16, & x \geq 4 \end{cases}$

- a) Encontrar  $g(3)$ ,  $g(5)$ ,  $g(15)$ .
- b) Determinar la imagen de  $2$ .
- c) ¿Es  $g$  la imagen de  $2$ ?

→ 5. Para la función  $h$ , definida por  $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

- a) Determinar  $D_h$ .
- b) El valor del dominio cuya imagen es  $\sqrt{21}$ .
- c) Los cortes de la gráfica de  $h$  con los ejes coordenados.

→ 6. Bosquejar la gráfica de la función  $f(x) = 2\sqrt{2x^2 + 5x + 2}$ .

→ 7. Bosquejar la gráfica de la función  $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 4) \\ 16, & x \geq 4 \end{cases}$

→ 8. Escribir una función que represente el comportamiento de los datos para cada una de las siguientes tablas:

a)

x	0	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11	13

b)

x	0	1	2	3	4	5
y	1	2	5	?	17	26

c)

x	0	1	2	3	4	5
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$

→ 9. Bosquejar la gráfica de la función  $g(x) = \frac{2}{x + 2}$

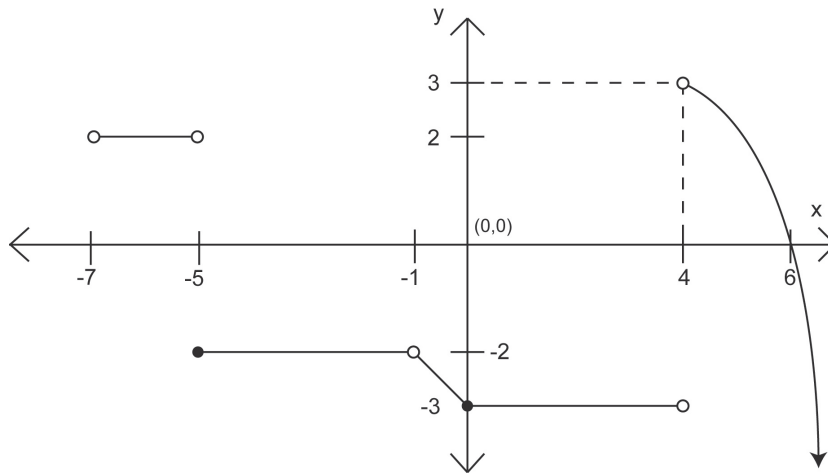
→ 10. La tabla muestra el costo de envío de correspondencia, según el peso en gramos.

peso (en gramos)	mas de 0 hasta 50	mas de 50 hasta 100	mas de 100 hasta 150	mas de 150 hasta 200	mas de 200 hasta 250	mas de 250 hasta 300	mas de 300 hasta 350	mas de 350 hasta 400
costo (en pesos)	500	1.200	1.500	1.800	2.000	2.800	3.200	5.000

a) ¿Cómo varía el costo de envío respecto del peso de la correspondencia?

- b) Trazar la gráfica que represente el comportamiento de los datos de la tabla.
- c) Representar en símbolos matemáticos, la regla que representa la situación planteada en la tabla.
- d) ¿Cuál es el costo de envío para cierta correspondencia cuyo peso es 345,2 gramos?

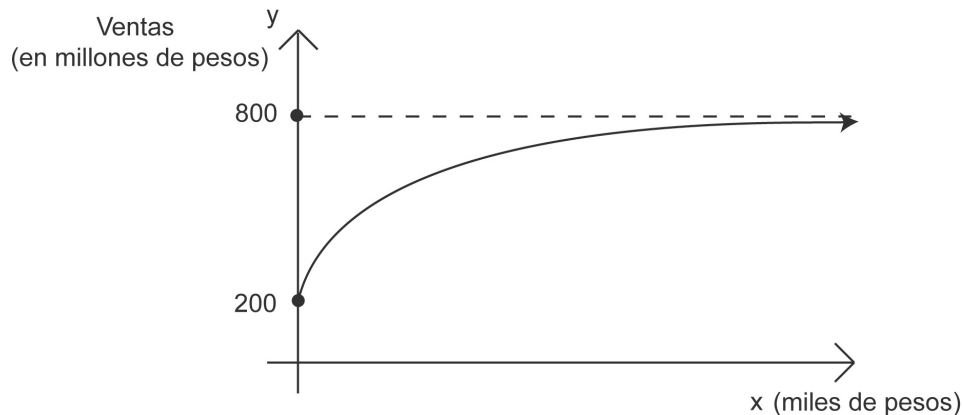
→ 11. La figura muestra la gráfica de la función  $h$ .



Determinar:

- a)  $D_h$
- b)  $R_h$
- c) Cortes con los ejes coordenados.
- d)  $h(3)$
- e)  $h(-5)$ .
- f) La imagen de  $-4$

→ 12. La figura muestra ventas de un producto en función de la inversión en publicidad.



- ¿Llegará a igualar o a superarse los 800 millones de pesos en ventas, si se invierte más dinero en publicidad? Argumentar su respuesta.
- ¿A qué valor ascienden las ventas del producto sin haber invertido en publicidad?

→ 13. Bosquejar la gráfica de la función  $r(x) = -\sqrt{-3x - 10}$ .

→ 14. Representar mediante una ecuación cada uno de las siguientes asociaciones.

- Asociar a cada número par su quinta parte.
- Asociar a cada número racional su recíproco.
- Asociar cada elemento del conjunto  $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  con su cuadrado.

## 2.1.1 RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS ●●●●

1. a)  $D_f : \mathbb{R}$   
b)  $D_f : \mathbb{R} - \{4, -4\}$   
c)  $D_r : t \in (-\infty, -2) \cup [3, \infty)$   
d)  $D_m : \mathbb{R}$   
e)  $D_n : x < \frac{-15}{2}$   
f)  $D_k : x \in [-3, 0) \cup (0, \infty]$

Sugerencia: esta función es la suma de las funciones:

$$f(x) = \frac{2}{x} \text{ y } f_2(x) = \sqrt{x + 3}$$

Halle el  $D_{f_1}$  e intercételo con el  $D_{f_2}$ , ya que sólo sirven los elementos que sirvan a ambas funciones. De manera simultánea.

- g)  $D_s : \mathbb{R}$ , ya que no hay ningún número real  $x$  tal que anule el denominador de la función  $s$ .  
h)  $D_t : x \in [-1, \infty)$   
i)  $D_z : \mathbb{R} - \{0\}$   
j)  $D_g : x \in (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$   
k)  $D_r : \mathbb{R}$
2. a)  $f(-2) = \frac{-11}{2}$   
b) La imagen de  $-7$  es  $f(-7) = \frac{-26}{7}$

- c) 5
- d) No, ya que  $f(0) = \frac{5}{0} - 3$  no está determinado
- e)  $f(-\sqrt{5}) = -5,2360$

3. a) Variación directa: cuando una variable se incrementa, la otra se incrementa en una razón similar. Esto es, la variable  $y$  varía directamente como la variable  $x$ , si el cociente  $\frac{y}{x} = k$ ,  $k$  es una constante.

b) Variación inversa: cuando una variable se incrementa, la otra disminuye en una razón similar. Esto es, la variable  $y$  varía inversamente a la variable  $x$ ,  $xy = k$ ,  $k$  es una constante.

c) Variación escalonada: al incrementarse una variable, la otra cambia por trechos.

- 4. a)  $g(3) = 9$   
 $g(5) = 16$   
 $g(15) = 16$

- b)  $g(4) = 16$

- c) No,  $q$  no es la imagen de 2,  $g(2) = 4$

- 5. a)  $D_h = x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

- b)  $h(x) = \sqrt{21}$

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{21}$$

$$x^2 - 4 = 21$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5$$

Luego, el valor del dominio cuya imagen es  $\sqrt{21}$  es 5 porque

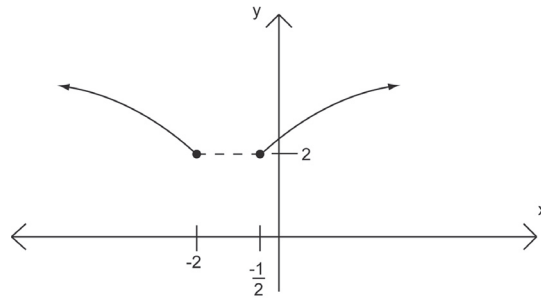
$$h(5) = \sqrt{5^2 - 4} = \sqrt{21}$$

- c) Corte con eje x:  $(2, 0)$  y  $(-2, 0)$   
Corte con eje y: no hay, porque  $0 \notin D_h$ .

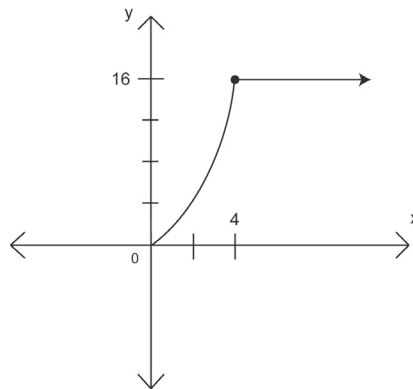
6.  $D_f : x \in (-\infty, -2] \cup \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$

Cortes eje x: No hay

Cortes eje y: No hay ( $0 \notin D_f$ )



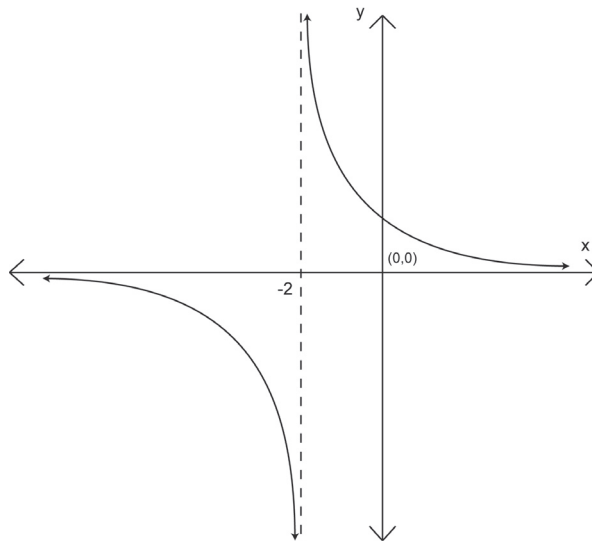
7.



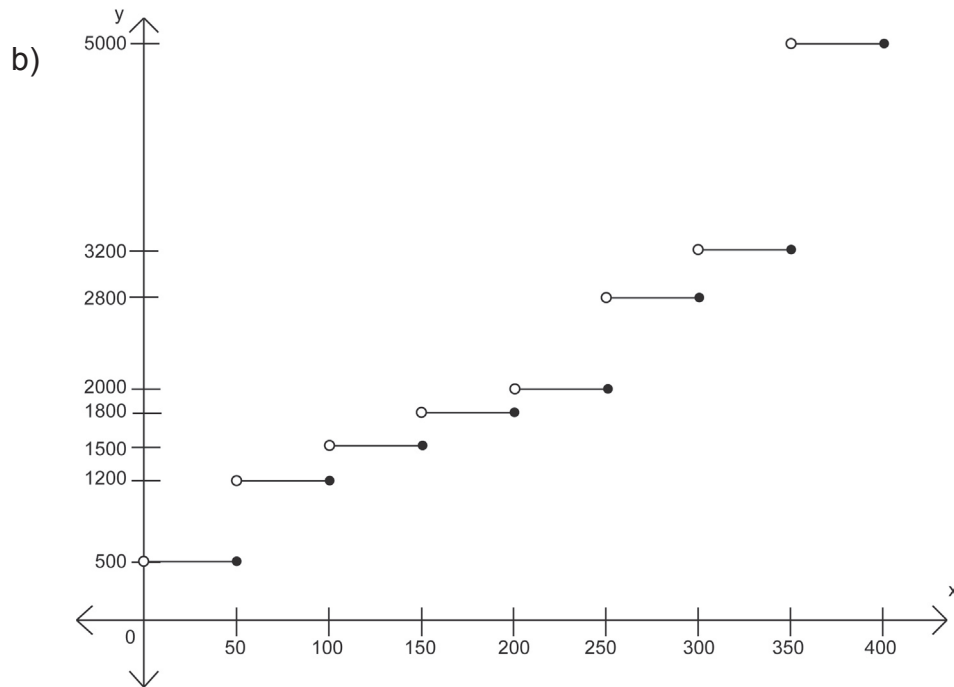
8. a)  $f(x) = 2x + 3$   
b)  $g(x) = x^2 + 1$

c) 
$$h(x) = \frac{x}{x + 1}$$

9.



10. a) Varía en forma escalonada.



c) Sea  $x$  el peso en gramos y  $C(x)$  el costo de envío de  $x$  gramos.

$$C(x) \begin{cases} 500 & , x \in (0, 50] \\ 1.200 & , x \in (50, 100] \\ 1.500 & , x \in (100, 150] \\ 1.800 & , x \in (150, 200] \\ 2.000 & , x \in (200, 250] \\ 2.800 & , x \in (250, 300] \\ 3.200 & , x \in (300, 350] \\ 5.000 & , x \in (350, 400] \end{cases}$$

d)  $C(345,2) = \$3.200$

11. a)  $D_h : x \in (-7, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, \infty)$

b)  $R_h : (-\infty, 3)$

c) Corte eje  $x$ :  $(6, 0)$

Corte eje  $y$ :  $(0, -3)$

d)  $h(3) = -3$

e)  $h(-3) = -2$

f) La imagen de  $-4$  es  $2$ .

12. a) No; llega el momento en que, aunque se aumente el dinero invertido en publicidad, las ventas no superan los 800 millones de pesos. Las ventas tienen un límite de crecimiento. Lo que sí puede ocurrir es que si se deja de invertir en publicidad, las ventas decaigan.

b) 500 millones de pesos.

$$13. D_r : -3x - 10 \geq 0$$

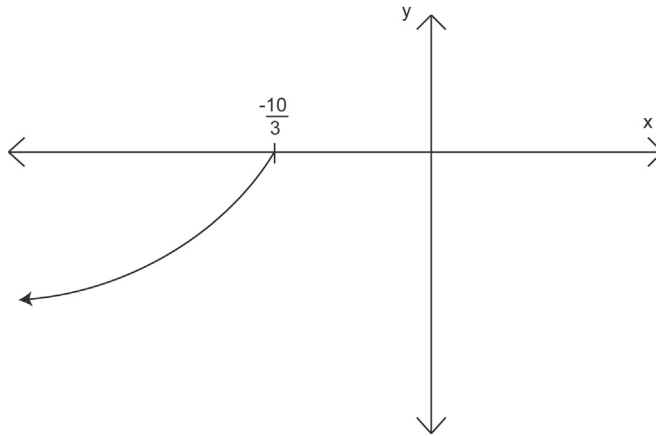
$$-3x \geq 10$$

$$x \leq \frac{-10}{3}$$

Luego,  $D_r : x \in \left(-\infty, -\frac{10}{3}\right)$

Cortes con eje  $x : \left(-\frac{10}{3}, 0\right)$

Corte eje  $y$ : No hay.  $0 \notin D_r$ .



14. a)  $y = f(x) = \frac{1}{5}x$ , si  $x$  es par

b)  $y = f(x) = \frac{1}{x}$ , si  $x$  es racional

c)  $f : M \longrightarrow C$  ó  $y = f(x) = x^2$ ,  $x \in M$   
 $x \longrightarrow x^2$

## II. FUNCIÓN LINEAL ●●●●

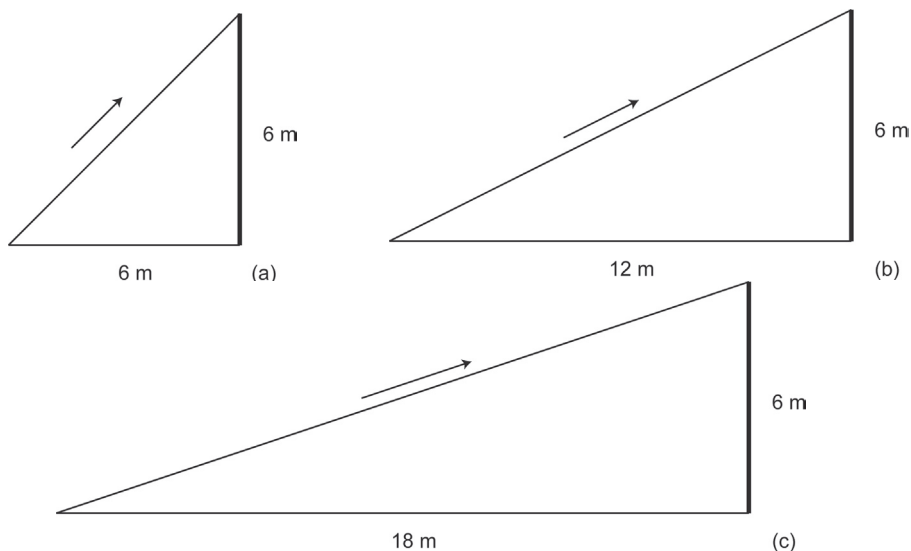
Toda función  $f$  de la forma  $y = f(x) = mx + b$ , en donde  $m, b, \in \mathbb{R}$  y  $m \neq 0$  se llama función lineal.

La gráfica de la función lineal corresponde a una línea recta.

En el ejemplo a) de la página 144, se presentó la función  $f(x) = 5x + 4$ , que corresponde a una función lineal. Se puede observar que  $m = 5$  y  $b = 4$ .

La letra  $m$  representa la pendiente de la recta, que indica que por cada unidad que se incremente la variable independiente, ocurre un incremento o una disminución en la variable dependiente. Como veremos, el valor de la pendiente es constante.

Visualizamos la idea intuitiva de lo que significa la pendiente de la siguiente manera: para subir a una altura de 6 metros, se puede, por ejemplo, realizar algunos de los siguientes recorridos:



¿Cuál de estos recorridos es el “más pendiente”?

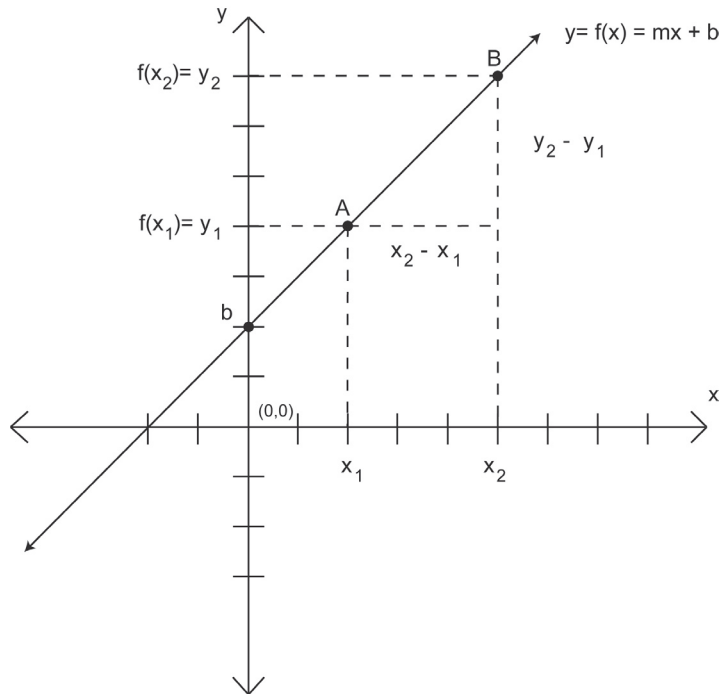
En la situación (a), cada vez que se avanza un metro de manera horizontal, se sube un metro; es decir, en este caso, la pendiente  $m$  es igual a uno. La pendiente se obtiene comparando el cambio que se da en la dirección vertical con respecto al cambio que se da en la dirección horizontal. Luego, se puede escribir, para este caso, que  $m = \frac{6}{6} = 1$ .

En la situación (b),  $m = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ , significa que por cada 2 metros que se recorran en la dirección horizontal, se sube 1 metro. (por cada metro que se recorra en la dirección horizontal, se sube medio metro o 50 centímetros).

En la situación (c),  $m = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ , significa que por cada 3 metros que se recorran en la dirección horizontal, se sube un metro. (Por cada metro que se recorra en la dirección horizontal, se sube la tercera parte de un metro ó 0,3 cm).

Luego de lo anterior, se concluye que es “más pendiente” el recorrido en (a), y que es “menos pendiente” el recorrido en (c).

Siguiendo con la misma idea, para encontrar el valor  $m$  en una función lineal, se puede establecer el siguiente resultado a partir del análisis realizado sobre la gráfica de  $y = f(x) = mx + b$  :



El punto  $A$  tiene coordenadas  $(x_1, y_1)$  el punto  $B$  tiene coordenadas  $(x_2, y_2)$ . La distancia recorrida de manera horizontal es  $x_2 - x_1$  y la distancia recorrida de manera vertical es  $y_2 - y_1$ , luego  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

El valor de la pendiente  $m$  para los puntos  $A$  y  $B$  es el mismo para cualquier par de puntos tomados sobre la gráfica de la función. Observe además que la gráfica se intercepta en el eje  $y$  por el punto  $b$ , cuyas coordenadas son  $(0, b)$ .

### Consideremos los siguientes ejemplos:

- a) Si los costos totales de producción para cierto artículo están dados por  $c(x) = 20x + 10.000$  (en pesos),  $m=29$  representa los costos variables por producir una unidad del artículo. Los costos variables señalan en

cuanto se incrementan los costos totales de producción, en este caso, en 20 pesos por cada unidad producida.  $20x$  indica el costo variable total por producir  $x$  unidades del artículo.

$b = 10.000$  son los costos fijos de la producción. Estos costos, son independientes del número de unidades producidas.

- b) Supóngase que los costos totales de producción,  $C$ , de cierto artículo, se comportan de acuerdo con un modelo lineal. Si se producen 10 unidades, el costo total de producción es \$704.000 y si se producen 52 unidades, el costo total es \$720.800. Además, se sabe que el precio de venta por unidad del artículo es \$750.

- 1) Determinar los costos variables por producir unidades del artículo y los costos fijos de producción.

Sea  $x$  el número de unidades producidas del artículo. Luego,  $c(x) = mx + b$  representa el costo total por producir  $x$  unidades del artículo, ya que dichos costos totales se comportan de acuerdo con un modelo lineal.

Entonces, según la información, podemos escribir que:

$C(10) = 704.000$  (Recuerde que esta notación se lee: “El costo total por producir 10 unidades, es \$704.000”)

$C(52) = 720.800$  (“El costo total por producir 52 unidades, es \$720.800”)

Como:  $c(x) = mx + b$  y  $C(10) = 704.000$ , entonces,  
 $c(x) = m(10) + b = 704.000$

De igual manera,  $c(x) = m(52) + b = 720.800$

Así tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos variables:

$$\begin{cases} m(10) + b = 704.000 \\ m(52) + b = 720.800 \end{cases}$$

Al resolverlo, obtenemos que:

Los costos variables por producir una unidad son:  $m=400$  pesos.

Los costos fijos de producción son:  $b = 700.000$  pesos.

Luego, la función  $C$  de costos totales de producción para  $x$  número de unidades, está dada por:

$$c(x) = 400x + 700.000 \text{ pesos.}$$

- 2) Determinar la función  $I$  de ingresos por vender  $x$  número de unidades del producto.

Como el precio de venta por unidad es \$750, entonces,  $I(x) = 750x$  pesos representa dicha función.

- 3) Determinar la función  $U$  de utilidades por producir y vender  $x$  unidades del artículo.

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

Luego, 
$$U(x) = 750x - (400x + 700.000)$$

$$U(x) = 750x - 400x - 700.000$$

$$U(x) = 350x - 700.000 \text{ pesos}$$

- 4) Determinar el punto de equilibrio.  
Como  $U(x) = 350x - 700.000$  , el punto de equilibrio ocurría cuando  $U(x) = 0$  , luego:

$$\begin{aligned}U(x) &= 0 \\350x - 700.000 &= 0 \\350x &= 700.000 \\x &= \frac{700.000}{350} \\x &= 2.000 \text{ unidades}\end{aligned}$$

Reemplazando  $x = 2.000$  unidades en  $C(x)$  o en  $I(x)$ , tenemos que:  $I(2.000) = 750(2.000) = 1.500.000$  pesos.

Así que, el punto de equilibrio se logra cuando se producen y venden 2.000 unidades del artículo, lo cual genera ingresos de \$1.500.000 y costos totales de producción de \$1.500.000 (como era de esperarse, los ingresos son iguales a los costos totales de producción).

El punto de equilibrio se escribe entonces: (2.000, 1.500.000).

- 5) Calcular los costos totales por producir 800 unidades del producto

$$\begin{aligned}C(800) &= 400(800) + 700.000 \\&= 320.000 + 700.000 \\&= 1.020.000 \text{ pesos}\end{aligned}$$

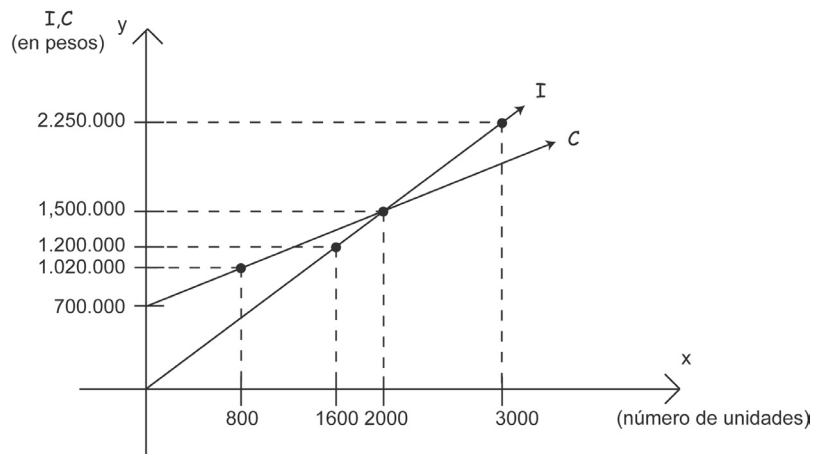
- 6) Calcular la utilidad por producir y vender 1.600 unidades del producto

$$\begin{aligned}U(1.600) &= 350(1.600) - 700.000 \\ &= 560.000 - 700.000 \\ &= - 140.000 \text{ pesos}\end{aligned}$$

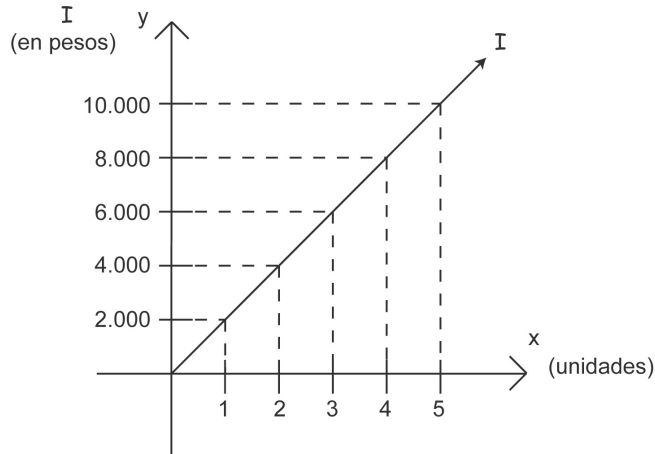
Lo que significa que por producir y vender 1.600 unidades del artículo, se obtienen pérdidas por \$140.000. Esto era de esperarse, ya que el número de unidades producidas y vendidas es de 1.600, que es menor al número de unidades producidas y vendidas para obtener utilidad de cero pesos, 2.000 unidades.

- 7) Calcular la utilidad por producir y vender 3.000 unidades del artículo.

$$\begin{aligned}U(3.000) &= 350 (3.000) - 700.000 \\ &= 1.050.000 - 700.000 \\ &= 350.000 \text{ pesos (hay ganancias)}\end{aligned}$$



- c) En la figura, se muestra la gráfica de la función I de ingresos por vender x número de unidades de cierto artículo.



- 1) Determinar el precio de venta que se fijó a cada unidad del artículo.

Basta con encontrar el valor de la pendiente  $m$ , que una función  $I$  de ingresos, representa el precio de venta por cada unidad del artículo.

El precio es \$2.000.

- 2) Determinar los ingresos de venta de 25 unidades del artículo.  
Como el precio de venta por unidad es \$2.000, la función  $I$  de ingresos por vender  $x$  número de unidades del artículo, está dada por:  $I(x) = 2.000x$

Luego,  $I(25) = 2.000(25) = 50.000$  pesos

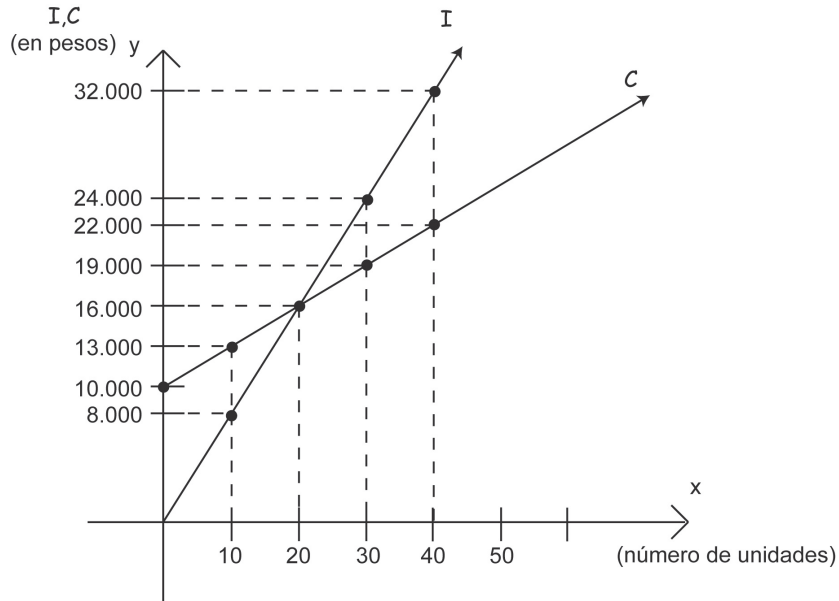
- 3) Si los ingresos fueron de \$8.000, ¿cuántas unidades fueron vendidas?

En la gráfica basta con encontrar de qué valor es 8.000 su imagen. La respuesta es 4. Luego, fueron vendidas 4 unidades del artículo, lo que generó ingresos por \$8.000.

O también, haciendo uso de la función  $I(x) = 2.000x$ , se tiene que:  $I(x) = 8.000$

Luego,  $2.000 x = 8.000$   
 $x = 8.000/2.000$   
 $x = 4$  unidades

a) La figura muestra la gráfica de las funciones  $I$  de ingresos y  $C$  de costos totales de producción para  $x$  número de unidades.



- 1) ¿Cuál es la ganancia por producir y vender 27 unidades del artículo?
- 2) ¿Qué ocurre con la utilidad si se producen y venden menos de 20 unidades del artículo? Explicar.
- 3) ¿Cuáles son los costos fijos de la producción?
- 4) ¿Cuál es el precio de venta de cada unidad?
- 5) ¿En cuánto se incrementan los costos totales por cada unidad adicional que sea producida?
- 6) Escribir las funciones de ingresos, costos totales de producción y utilidades para  $x$  número de unidades producidas y vendidas.

- 7) ¿Cuál es el punto de equilibrio en unidades y en pesos?
- 1) \$ 3.500
  - 2) Hay pérdidas, ya que en 20 unidades se produce el punto de equilibrio en unidades, por lo cual, para una producción y venta menor a 20 se obtiene que la gráfica de costos totales está por encima de la gráfica de ingresos. Esto es, los costos son mayores que los ingresos.
  - 3) \$ 10.000
  - 4) Al encontrar la pendiente de la función de ingresos, se obtiene que  $m = 800$ , luego el precio de venta por unidad es \$ 800.
  - 5) Se incrementan en \$300 que corresponden al valor de la pendiente para la gráfica de la función de costos totales de producción.
  - 6)  $C(x) = 300x + 10.000$  pesos  
 $I(x) = 800x$  pesos  
 $U(x) = 500x - 10.000$  pesos
  - 7) (20, 16.000): Para 20 unidades producidas los costos totales son de \$16.000 que son también los ingresos por vender 20 unidades.

### 2.2.1. EJERCICIOS ●●●●

- 1. La función  $y = f(x) = \frac{5}{7}x + 700$  representa la cantidad de kilogramos de garbanzo que un consumidor puede comprar si compra  $x$  kilogramos de harina de trigo.
- a) ¿Para qué valores de  $x$  está definida la función dada, de acuerdo con el contexto en que se propone?

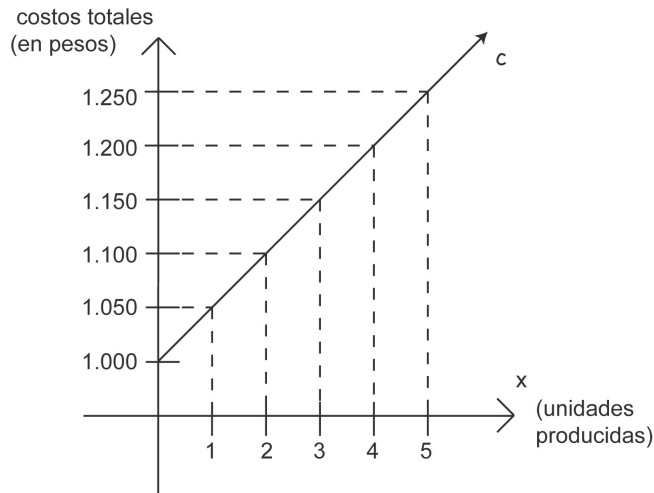
- b) ¿Qué está indicando la pendiente  $m = -\frac{5}{7}$ ?
- c) Trazar la gráfica de la función  $y = f(x) = -\frac{5}{7}x + 700$ .

→ 2. Una máquina se compró nueva por un precio de \$1.000.000 el 14 de mayo de 1999, y para el 14 de mayo de 2003 se calculó que su precio era de \$800.000.

a) Determinar el modelo lineal que representa esta depreciación.

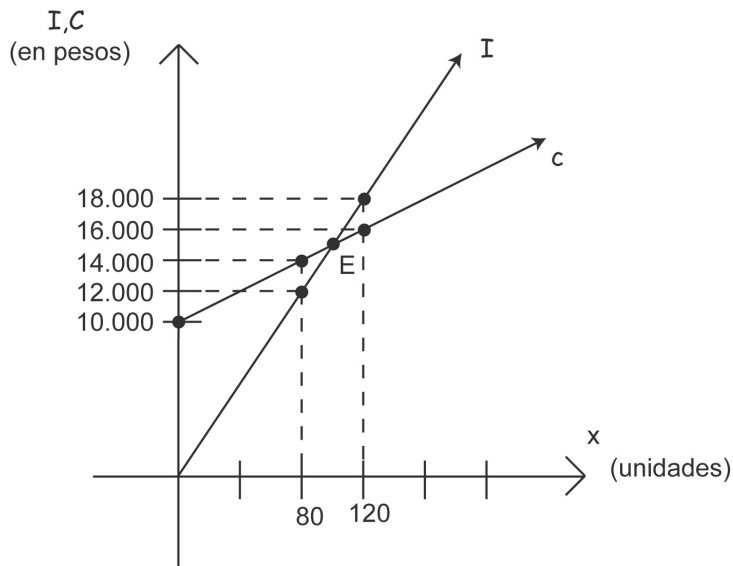
b) ¿En qué año la máquina tendrá un precio igual al 24% de su valor inicial?

→ 3.



- a) ¿Cuáles son los costos fijos de producción?
- b) ¿En cuánto se incrementan los costos totales por producir una unidad adicional?
- c) Si los costos totales son \$1.150, ¿Cuántas unidades se produjeron?
- d) Escribir la función  $C$  de costos totales por producir  $x$  unidades.

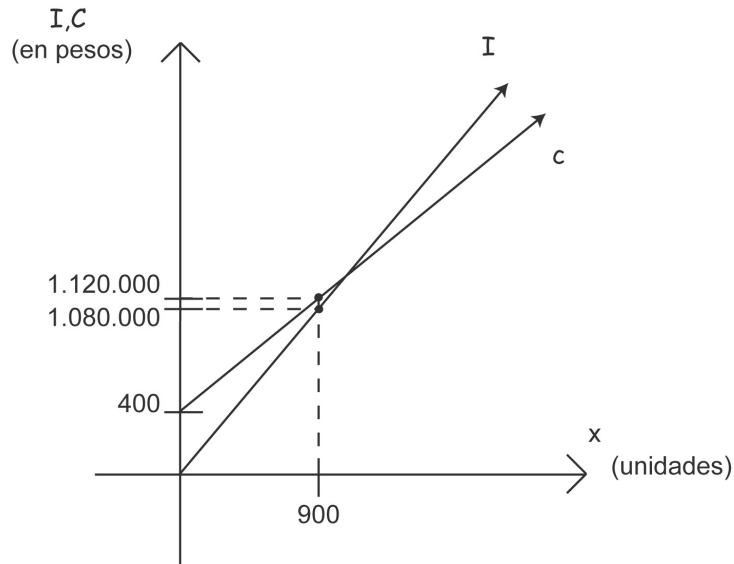
- 4. El costo total por fabricar 20 libras de un producto es \$5.000 y fabricar 40 libras del mismo producto tiene un costo total de \$5.400. El precio de venta por libra es de \$100, ¿cuál será el punto de equilibrio si el costo por producir una libra se incrementa en el 22%?
- 5. Una fábrica de cierto tipo de producto presenta sus funciones de costos totales de producción  $C$  y de ingresos por la venta de  $x$  unidades de su producto, según aparece en la gráfica.



- Determinar la utilidad por producir y vender 150 unidades del artículo.
- Encontrar las coordenadas del punto E e interpretarlas.
- Determinar el precio de venta por unidad de cada artículo.
- ¿Cuál es el costo fijo?
- ¿En cuánto se incrementan los costos totales por cada unidad adicional que se fabrique?

→ 6. Una empresa fabrica cierto producto. En la siguiente gráfica aparecen representadas las funciones  $C$  de costos totales de producción e  $I$  de ingresos. Determinar:

- Las funciones de costos totales, de ingresos y de utilidades.
- El punto de equilibrio e interpretarlo.
- La cantidad de unidades del producto que deben ser producidas y vendidas para que las utilidades sean de \$80.000.
- En la gráfica, la región que representa las ganancias y la región que representa las pérdidas.



→ 7. Los costos totales de producción de un determinado artículo se comportan como un modelo lineal. Si se producen 12 unidades, el costo total de producción es de \$4.600. Además, si cada artículo que se produce es vendido a \$250:

- a) Determinar la función  $C$ , de costos totales de producción de  $x$  número de unidad del artículo.
- b) Determinar la  $I$ , de ingresos por vender  $x$  unidades del artículo.
- c) Trazar las gráficas de las funciones  $C$  e  $I$  en un mismo plano  $xy$ .
- d) Interpretar la pendiente de las funciones  $C$  e  $I$ , respectivamente.
- e) Determinar la función  $U$ , de utilidades de producción y venta de  $x$  número de unidades del artículo.
- f) Encontrar e interpretar el punto de equilibrio.
- g) Determinar la utilidad por producir y vender 55 unidades del artículo.
- h) ¿Para qué número de unidades producidas y vendidas, se obtiene una utilidad de \$11.000?

→ 8. Cierta producto es adquirido nuevo por \$6.000.000 en el año 2005 y al cabo de 40 meses, su precio es \$2.000.000.

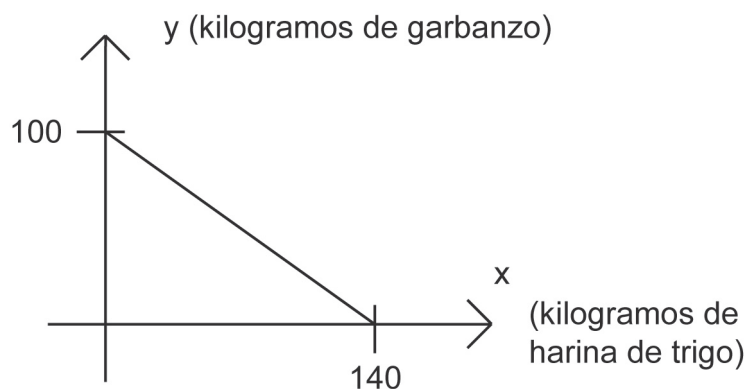
- a) Determinar el modelo lineal que representa la depreciación  $D$ , en función del tiempo  $t$ , en meses.
- b) ¿En qué año, el producto tendrá un precio igual a cero pesos?
- c) ¿Trazar la gráfica que represente la situación planteada.
- d) ¿Para qué año, el precio del producto será \$2.500.000?

## 2.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS ●●●●

- 1. a)  $x \geq 0$
- b)  $-\frac{5}{7}$  está indicando que por cada kilogramo adicional de harina

de trigo que se compre, se debe dejar de comprar  $\frac{5}{7}$  kilogramos de garbanzo. O lo que es lo mismo: que por cada 7 libras que se compren de harina de trigo, se dejan de comprar 5 libras de garbanzos

c)



2. a) La depreciación está en función del tiempo,  $t$ , en años.  
 El año 1999 se toma como  $t = 0$  años, luego:  $(0, 1.000.000)$  representa el precio de la máquina el 14 de mayo de 1999.  
 En el año 2003,  $t = 4$  años. Luego:  $(4, 800.000)$  representa el precio de la máquina el 14 de mayo de 2003.  
 El modelo de depreciación,  $D$ , en función del tiempo,  $t$ , es:  
 $D(t) = -50.000t + 1.000.000$
- b) En el año 2014. Es decir, para  $t = 15,2$  años.
3. a) \$1.000  
 b) En \$50  
 c) 3 unidades  
 d)  $C(x) = 50x + 1.000$  pesos

4. (56,94 , 5.694): el punto de equilibrio está dado por 56,94 libras y \$5.649.
5. a)  $U(150) = \$5.000$   
 b) (100, 15.000): al producir 100 unidades, los costos totales son \$15.000. Al vender 100 unidades, los ingresos son \$15.000  
 c) Precio de venta por artículo \$150.  
 d) Costo fijo: \$10.000.  
 e) En \$50.
6. a)  $C(x) = 800x + 400.000$  pesos  
 $I(x) = 1.200x$  pesos  
 $U(x) = 400x - 400.000$  pesos  
 b) (1.000, 1.200.000): si se producen 1.000 unidades, los costos totales son de \$1.200.000, que equivalen a los ingresos por vender las 1.000 unidades.  
 c)  $U(x) = 80.000$   
 $400x - 400.000 = 80.000$   
 $x = 1.200$  unidades
7. a)  $C(x) = 50x + 4.000$  pesos  
 b)  $I(x) = 250x$  pesos  
 d) En  $C(x) = 50x + 4.000$  pesos, la pendiente  $m = 50$  indica en cuánto dinero se incrementan los costos totales por producir una unidad adicional.  
 En  $I(x) = 250x$  pesos, la pendiente  $m = 250$  indica el precio de venta por unidad del producto, esto es, la cantidad de dinero en que se incrementan los ingresos por cada unidad adicional que sea vendida del producto.  
 e)  $U(x) = 200x - 4.000$  pesos

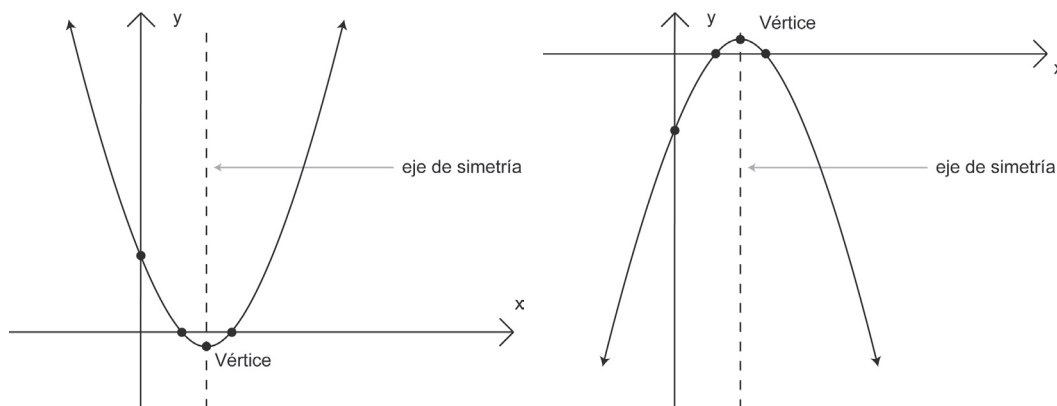
- f) (20, 5.000)
- g)  $U(55) = 200(55) - 4.000$   
= \$7.000 pesos
- h) Si  $U(x) = 11.000$ , entonces  
 $x = 75$  unidades.

### III. FUNCIÓN CUADRÁTICA ●●●●

Toda función de la forma  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ , con  $a, b, c$  números reales y  $a \neq 0$ , se denomina función cuadrática.

La gráfica de un función cuadrática es una parábola, la cual se extiende hacia arriba si el coeficiente  $a$  es positivo; es decir, si  $a > 0$ ; la parábola se extiende hacia abajo si  $a < 0$ .

La parábola es simétrica con respecto a una recta vertical, llamada “eje de simetría de la parábola”.



$a > 0$ : la parábola abre hacia arriba.     $a < 0$ : la parábola abre hacia abajo.

El vértice, denotado por la letra  $v$ , es el punto en donde el eje de simetría se intercepta con la parábola. El vértice  $v$ , está determinado por el punto

$$\left( \frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$$

Si la parábola abre hacia arriba, la función  $f$  tiene un valor mínimo en  $\frac{-b}{2a}$ , el cual es  $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ ; si la parábola abre hacia abajo, la función  $f$  tiene un valor máximo en  $\frac{-b}{2a}$ , el cual es  $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ .

## Ejemplos

a) Trazar la gráfica de la función  $f$ , definida por  $y = f(x) = 2x^2 - 3x - 3$ .

- Como  $a = 2 > 0$ , entonces, la gráfica de  $f$  abre hacia arriba.
- El dominio de  $f$  es  $\mathbb{R}$ , ya que  $f$  es función polinómica.
- Cortes con los ejes coordenados:

- Si  $y = f(x) = 0$ , entonces,  $2x^2 - 3x - 3 = 0$ . Solucionando esta ecuación cuadrática, se obtiene:  $x_1 = \frac{5}{2}$  o  $x_2 = -1$ , luego los puntos de corte (interceptos) con el eje  $x$ , son:  $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$  y  $(-1, 0)$ .
- Si  $x = 0$ , entonces,  $y = f(0) = 2(0)^2 - 3(0) - 3 = -3$ . Luego, el punto de corte (intercepto) con el eje  $y$ , es:  $(0, -3)$ .

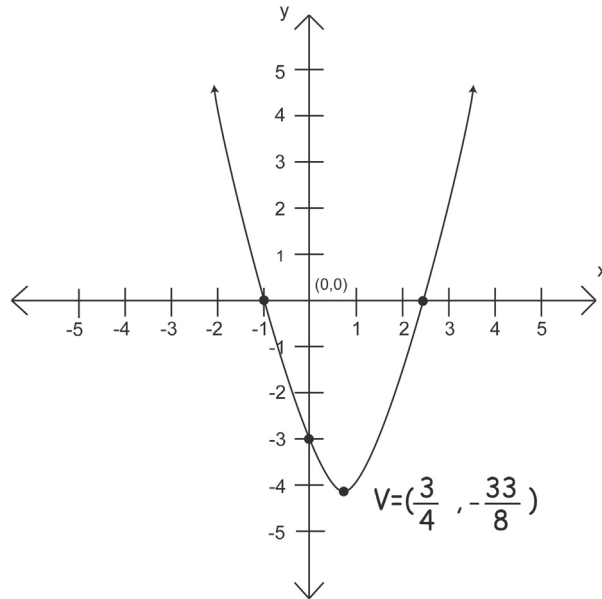
- El vértice  $v$ , lo hallamos así:

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(2)} = \frac{3}{4}$$

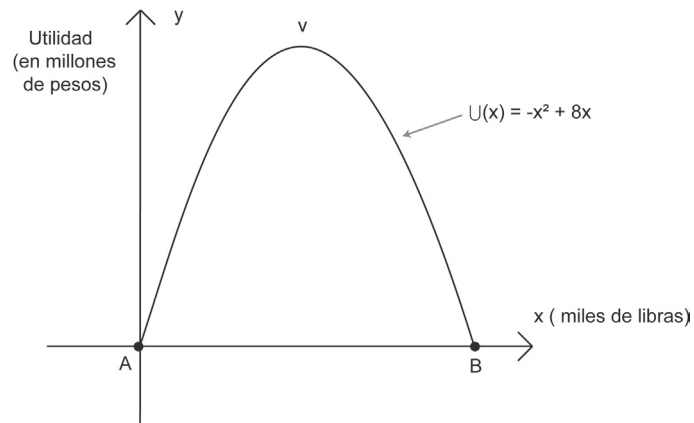
$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) - 3 = \frac{-33}{8}$$

Luego,  $V = \left( \frac{3}{4}, -\frac{33}{8} \right)$

Basta con ubicar los puntos encontrados en el plano  $xy$ , y luego trazar la gráfica:



b) La figura muestra la gráfica de la función  $U$  de utilidades por producir y vender  $x$  miles de libras de un producto, para cierta empresa.



- Determinar las coordenadas de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $v$  e interpretar el significado de tales puntos.  
 $A$  y  $B$  son los puntos de corte (interceptos) con el eje  $x$ , luego:  
 $A = (0, 0)$ . Se lee directamente de la gráfica.

Para encontrar  $B$ :  $B = (x, 0)$ , luego  $U(x) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Entonces,} \quad & -x^2 + 8x = 0, \\ & x(-x + 8) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Así que} \quad & x = 0 \quad \text{ó} \quad -x + 8 = 0, \\ & x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 8 \end{aligned}$$

Entonces, el punto  $B = (8, 0)$

Observe que el proceso anterior nos permite, de manera analítica, encontrar también las coordenadas del punto  $A$ , ya que encontramos que  $x = 0$ , luego  $A = (0, 0)$  como lo habíamos observado a partir de la gráfica de  $f$ .

La interpretación es:

$A = (0, 0)$ : Si no se producen ni se venden libras del producto, la utilidad es cero.

$B = (8, 0)$ : Producir y vender 8 miles de libras, genera una utilidad de cero pesos.



Así que la inecuación  $-x^2 + 8x > 0$  tiene como solución:  
 $x \in (0, 8) \cup \emptyset$ , entonces,  $x \in (0, 8)$ .

La interpretación es: hay ganancias si se producen y venden entre 0 y 8 miles de libras del producto.

- ¿Cuál es la utilidad cuando se producen y venden 3 miles de libras del producto?

$$U(3) = -(3)^2 + 8(3) = -9 + 24 = 15 \text{ millones de pesos}$$

- c) El precio de venta de cada unidad de cierto artículo es \$400 y se sabe que la utilidad por producir y vender  $x$  número de unidades del artículo está dada por  $U(x) = -x^2 + 90x - 1.400$  pesos.

- Determinar la función  $C$  de costos totales por producir  $x$  número de unidades del artículo.

Como  $U(x) = I(x) - C(x)$ ,

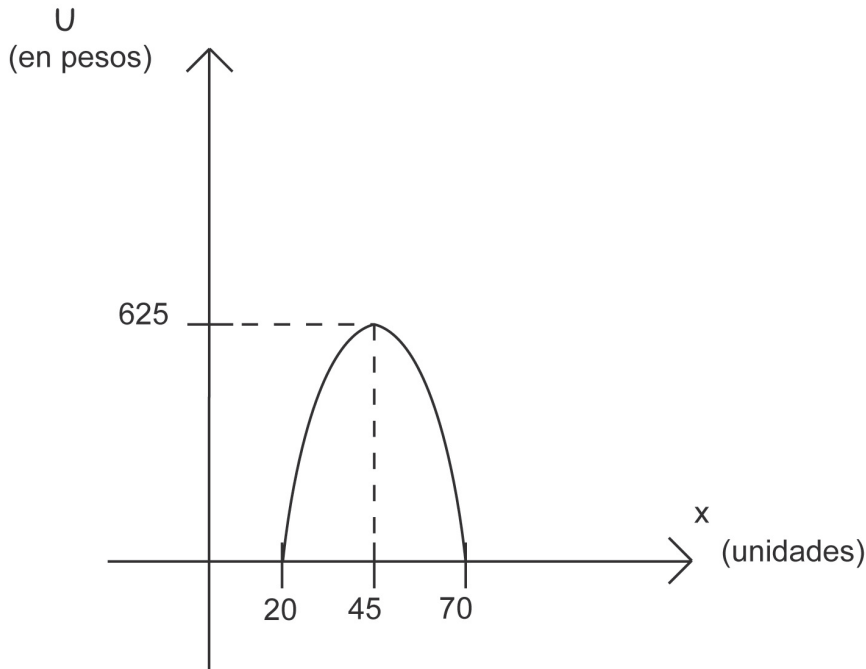
Entonces,

$$C(x) = I(x) - U(x)$$
$$C(x) = 400x - (-x^2 + 90x - 1.400)$$
$$C(x) = 400x + x^2 - 90x + 1.400$$
$$C(x) = x^2 + 310x + 1.400 \text{ pesos}$$

- Determinar el costo por producir 50 unidades del artículo.

$$\begin{aligned}
 C(50) &= (50)^2 + 310(50) + 1.400 \\
 &= 2.500 + 15.500 + 1.400 \\
 &= 19.400 \text{ pesos}
 \end{aligned}$$

- Trazar la gráfica de la función de utilidades.



Observe que únicamente nos interesa la parte de la gráfica que corresponde al primer cuadrante. ¿Por qué?

- Interceptar los puntos  $(20, 0)$  y  $(70, 0)$ .  
 El punto  $(20, 0)$  indica que al producir y vender 20 unidades del artículo, la utilidad es cero; lo mismo indica  $(70, 0)$ : al producir y vender 70 unidades, la utilidad es cero.  
 Así,  $(20, 0)$  y  $(70, 0)$  son los puntos de equilibrio.

- De la gráfica también es posible leer e interpretar los intervalos:  $(0, 20)$  y  $(70, \infty)$ .

$(0, 20)$ : indica que si se producen y venden entre 0 y 20 unidades del artículo, se producen pérdidas.

$(70, \infty)$ , Indica que si se producen y venden más de 70 unidades del artículo, se producen pérdidas.

### 3.1. EJERCICIOS ●●●●

→ 1. Trazar la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = 20 - x^2$

b)  $g(x) = x^2 - x - 6$

c)  $h(x) = 2x^2 + 7x - 15$

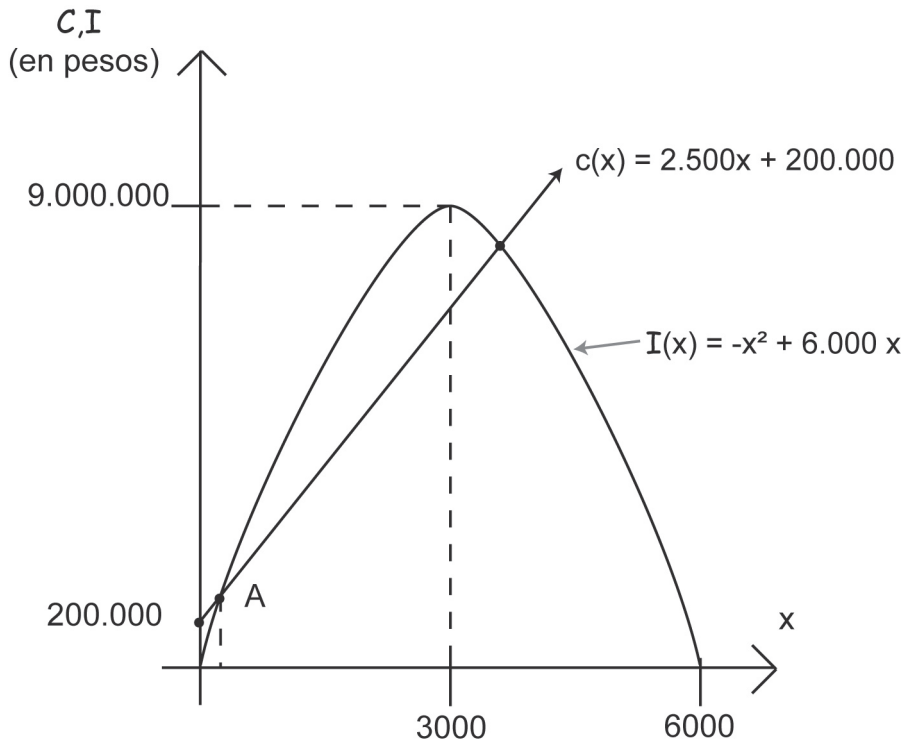
→ 2. Se requiere cercar un terreno en forma rectangular, con 120 metros de cerca. Encontrar el área máxima que se puede cercar.

→ 3. El ingreso  $I$  por vender  $x$  número de unidades de cierto producto, está dado por  $I(x) = -x^2 + 6.000$  pesos. Si además se sabe que los costos totales,  $C$ , de producción se comportan de acuerdo con un modelo lineal, en donde los costos fijos semanales son de \$4.000 y que producir una cantidad adicional incrementa los costos totales de producción en \$50.

- a) Encontrar la función  $U$  de utilidades por producir y vender  $x$  número de unidades.

- b) Determinar la utilidad máxima y el nivel de producción y venta que la genera.
- c) ¿Cuántas unidades deberán ser vendidas para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?

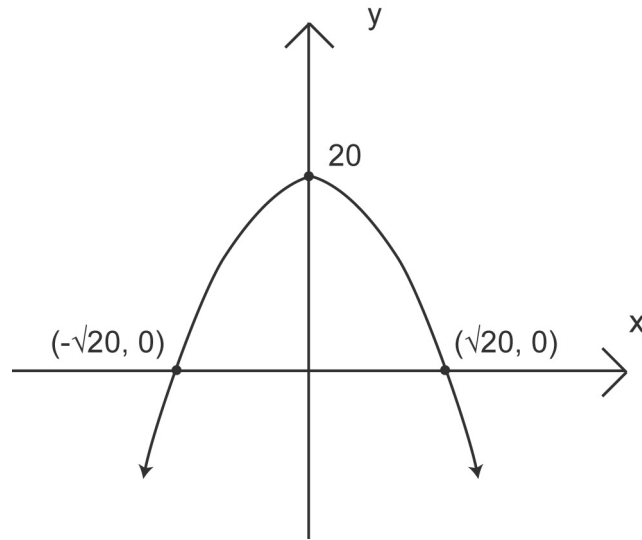
→ 4. La figura muestra las gráficas de las funciones  $C$  e  $I$ , de costos totales de producción y de ingresos, respectivamente, para cierto producto.



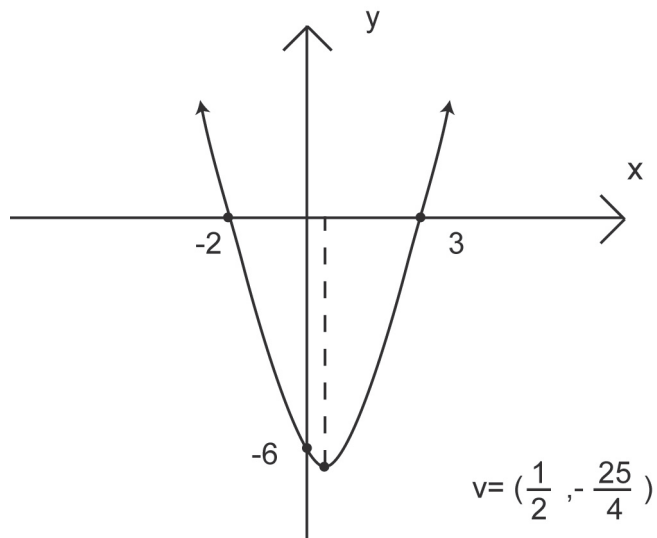
- a) Encontrar los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e interceptarlos.
- b) Calcular e interceptar  $I$  ( $5.000$ ).
- c) ¿Para qué nivel de producción los costos totales son de  $\$11.450.000$ ?

### 3.2. RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS ●●●●

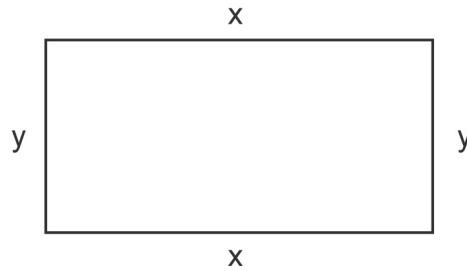
1. a)  $f(x) = 20 - x^2$



b)  $g(x) = x^2 - x - 6$  ,  $V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$



2. Sean  $x$ ,  $y$  la longitud de los lados del terreno. Ver la figura.



Luego, el perímetro  $P$  es:  $P = 2x + 2y = 120$  metros

Como se requiere encontrar el área máxima que se puede cercar, escribimos que el área  $A$  es:  $A = xy$

Luego, despejado por ejemplo,  $x$ , en  $P = 2x + 2y = 120$ , se tiene que:

$$2x = 120 - 2y$$

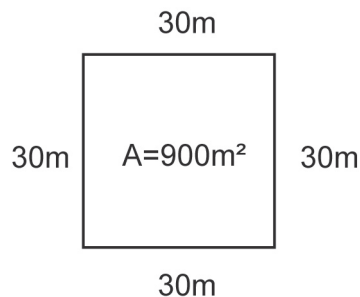
$$x = \frac{120}{2} - \frac{2y}{2}$$

$$x = 60 - y$$

Reemplazamos  $x = 60 - y$  en  $A = xy$  :

$$A(y) = (60 - y)y = 60y - y^2.$$

El máximo se encuentra en el vértice, así que  $V = (30, 900)$ . Esto es, la figura rectangular que encierra mayor área corresponde a un cuadrado de lado 30 m y su área máxima es  $900 \text{ m}^2$ .



3. a)  $C(x) = 50x + 4.000$  pesos

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

$$U(x) = -x^2 + 6.000x - (50x + 4.000)$$

$$U(x) = -x^2 + 5.950x - 4.000$$

b) Nivel de producción y venta que genera la máxima utilidad:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-5.950)}{2(-1)} = 2.975 \text{ unidades}$$

Utilidad máxima:  $U(2.975) = 8.846.625$  pesos.

c) Unidades que generan el máximo ingreso:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-6.000}{2(-1)} = 3.000 \text{ unidades}$$

Ingreso máximo:  $I(3.000) = \$9.000.000$

4. a)  $A = (58,5 , \$346.200)$  : Punto de equilibrio.

$B = (3.442 , \$8.805.000)$  : Punto de equilibrio.

$C = (3.000 , \$9.000.000)$  : Punto de maximización del ingreso.



