Funciones reales sin primitiva elemental

Tesis de pregrado en matemáticas

Fernando López López
(código: 0820012124)

Director
William Fajardo

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS BÁSICAS
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA POLITÉCNICO
GRANCOLOMBIANO
BOGOTÁ, COLOMBIA
2017

TÍTULO: FUNCIONES REALES SIN PRIMITIVA ELEMENTAL.
TITLE: Real functions without elementary primitive.

RESUMEN: El proceso que se requiere para la integración de funciones definidas en un dominio puede tener una enorme complejidad. Los algoritmos para integrar funciones indefinidas son muy conocidos y se pueden aprender en cualquier curso de cálculo integral. Sin embargo, estos métodos no son útiles en todos los casos; existen algunas funciones continuas y derivables cuya antiderivada no se puede hallar en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ siguiendo un número finito de pasos y utilizando las operaciones usuales de suma y producto.
Para resolver esta inquietud es necesario utilizar unos resultados obtenidos en areas de la matemática como la teoría de cuerpos y el análisis complejo. A partir de una definición de función elemental, se construye un conjunto de teoremas que separan a las funciones cuya antiderivada es una combinación o composición de las funciones habituales y a las funciones que no se pueden describir de esa forma.

ABSTRACT: The process required for the integration of definite functions in a domain can be difficult. Algorithms for integrating indefinite functions are well known and can be learned in any integral calculus course. However, these methods are not useful in all cases. There are some continuous and derivable functions whose antiderivative can't be found in $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ following a finite number of steps and using the conventional sum and product operations.
For to resolve this dude is necessary to using some results gotten in the math areas as the field theory and complex analysis. Starting by a definition of elementary function, we make a set of theorems that classified some functions whose primitive is a combination or composition of the habitual functions and for functions that can not be described in this way.

PALABRAS CLAVE: funciones elementales, primitiva elemental, teorema de Liouville, teorema de Laplace, teorema de Chevishev.

AUTOR: Fernando López.
Estudiante de matemáticas
Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano, Bogotá, Colombia
Mail: `falopezl@poli.edu.co`

DIRECTOR: William Fajardo, MSc
Docente auxiliar
Departamento de ciencias básicas
Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano, Bogotá, Colombia
Mail: `wafajardoc@poligran.edu.co`

CONTENIDO

NOTACIÓN

$\mathbb{C}_\infty$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$\mathcal{M}(\Omega)$	Conjunto de funciones meromorfas definidas sobre un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$
$f\mid_A$	Restricción de la función f sobre el conjunto A
$\Re(z)$	Parte real de $z \in \mathbb{C}$
$\Im(z)$	Parte imaginaria de $z \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Log} z$	Extensión del logaritmo natural real
$\tau(s)$	Adhesión del elemento s sobre el cuerpo τ
$[K,\tau]$	Grado de trascendencia de la extensión algebraica K/τ
Ψ_e	Cuerpo de las funciones elementales sobre el cuerpo diferencial Ψ
$\operatorname{Ker} h$	Kernel del homomorfismo h
D^*	$D - \{0\}$, donde D es un dominio entero
$\operatorname{mcd}(p,q)$	Máximo común divisor de p y q
$p \mid q$	p divide a q

INTRODUCCIÓN

El presente documento tiene como finalidad introducir al lector al concepto de función elemental, es decir, una función que se obtiene al aplicar sumas, o productos de funciones racionales o mediante la utilización de composiciones por funciones exponenciales o logarítmicas. En particular el principal objetivo es estudiar cuando una función posee o no, primitiva elemental.
Para identificar las funciones que poseen primitiva elemental se puede recurrir a la teoría de cuerpos. Este problema se abordó por primera vez por Pierre-Simon Laplace en 1812 en su libro "Théorie analytique des probabilités". Luego del fallecimiento de Laplace en 1827, el matemático Joseph Liouville se encargo de continuar y desarrollar el trabajo inicial que se tenia y entre los años 1833 y 1841 fue autor de un teorema muy importante. El teorema de Liouville es la base de los estudios posteriores que se llevaron a cabo desde diferentes areas del conocimiento (véase [8] pag 12).
La inquietud por identificar funciones sin primitiva elemental se extendió a nuevas generaciones de matemáticos como Pafnuti Chebyshev, que en 1853 logró generalizar cierto tipo de funciones algebraicas que no tienen primitiva elemental. A comienzos del siglo XX, el británico Godfrey Harold Hardy aplicó el teorema de Liouville en un tipo especial de funciones logarítmicas y, gracias a esto, se tuvo la posibilidad de justificar la falta de primitiva elemental un extenso grupo de funciones logarítmicas (veáse [8] pag. 25).
En principio, se utilizarán funciones meromorfas en algún dominio complejo (abierto y conexo) para posteriormente, incluirlas en un cuerpo dotado con una derivación.
Sin embargo, debe explicarse de manera formal el significado de una función elemental. Particularmente, estas funciones están definidas sobre un subcuerpo diferencial y a su vez, están contenidas dentro de una cadena de subcuerpos diferenciales que cumplen ciertas condiciones. Se ilustrarán algunos resultados a partir de esta definición, uno de ellos es muy importante: todas las funciones meromorfas elementales forman un cuerpo diferencial, es decir, tanto estas como sus derivadas en cualquier orden están incluidas dentro del cuerpo de funciones elementales, una pregunta que resulta natural: ¿están incluidas sus primitivas?, la respuesta a esta observación es

negativa.
A pesar de que la mayoría de las funciones meromorfas definidas en un dominio poseen primitiva, dado que son continuas y derivables en un dominio, excepto en un conjunto discreto, no todas son elementales, están por fuera del cuerpo de elementales y, como propósito de trabajo, se identificarán con fines pedagógicos, cabe mencionar que no comprenden la totalidad, pero tiene una gran utilidad en diversas áreas. Por ejemplo, la integral senoidal se usa de manera frecuente en diversas áreas de la matemática aplicada y no se puede expresar en términos de funciones elementales, pero se puede expresar en forma de serie

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \dots$$

Siendo esta, una función de aproximación con respecto a la integral definida en un intervalo real positivo. Otro ejemplo de este tipo de funciones sin primitiva elemental es la función de densidad de la distribución normal (con media 0 y desviación típica 1) que viene dada por $d(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$, luego la probabilidad de que una variable aleatoria con dicha distribución tome su valor en un intervalo $[a, b]$ viene dada por la integral $\int_a^b d(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\frac{x^2}{2}}\, dx$. Finalmente, el teorema de los números primos afirma que la integral logarítmica definida como

$$\operatorname{Li}(x) := \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)}.$$

es asintóticamente igual a la función $\pi(x)$ definida como el número de números primos menores o iguales que x. Estas son algunas funciones estudiadas en la investigación.
Gracias al teorema de Liouville y sus consecuencias inmediatas, se puede demostrar que algunos tipos de funciones no son elementales, es de notar que existen mas funciones cuya primitiva es de tipo no elemental, aunque en cualquier curso de cálculo integral las funciones desarrolladas (racionales o trigonométricas incluyendo potencias racionales) todas posean primitiva elemental.
Las consecuencias inmediatas del teorema de Liouville presentan condiciones por las cuales ciertas funciones no poseen primitiva elemental, funciones que tienen una forma predeterminada y envuelven una gama de funciones variada similares a las funciones que si poseen primitiva elemental.
Todo esto, hace parte de un proceso de recopilación, investigación y aprendizaje cuya base teórica se desprende de una bibliografía especializada que fue desarrollada a lo largo de los siglos XIX y XX. Sin embargo, en la presente tesis se van a presentar algunas formas especiales de integrales sin primitiva elemental, que no están incluidas en dichas publicaciones y, por consiguiente, se presentará con detalle aplicando

todas las definiciones y teoremas que se desarrollarán a lo largo del presente trabajo. El documento consta de tres capítulos:

- En el primer capítulo presentamos los preliminares, definiciones y teoremas que son el punto de partida. Iniciando por el concepto de función meromorfa y sus características para poder explicar la conformación del cuerpo diferencial que contiene a estas funciones, su estructura y la adhesión de elementos que generan nuevas extensiones de cuerpos, para terminar con la definición formal de una función elemental con el propósito de entender ciertos teoremas que explican el comportamiento de nuevos subcuerpos.

- En el segundo capítulo se explica el teorema de Liouville, su prueba y sus consecuencias posteriores, en especial, el teorema de Liouville-Hardy.

- En tercer capítulo trata acerca de las primitivas elementales de funciones reales y aquellas funciones que no poseen primitiva elemental. A partir de los resultados presentados en los anteriores capítulos, podemos probar que ciertas funciones no poseen primitiva elemental. La parte mas especial del capítulo es la identificación de funciones que no fueron generalizadas de manera formal en las investigaciones pasadas y que se incluirán en una tabla que sintetiza los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En el presente capítulo presentaremos algunos hechos importantes que serán usados para desarrollar algunas proposiciones que relacionan las funciones reales y cuando su primitiva es elemental, es decir, una función a valor real que posee antiderivada y cuyo cálculo de esta es posible realizarlo en un número finito de pasos.

1.1. Cuerpo de las funciones meromorfas

Todas funciones consideradas en esta sección se supondrán de valor complejo. $\mathbb{C}$ denotará el cuerpo de los números complejos.

Definición 1.1.1. *Un dominio $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}$, es un conjunto abierto, conexo y no vacío de $\mathbb{C}$.*

Nota 1.1.2. Nótese que un dominio de $\mathbb{C}$ es un conjunto no numerable, pues en caso contrario, es posible encontrar algún abierto que contenga algún elemento del dominio y que no está contenido en el dominio.

Definición 1.1.3. *Un polo de una función f es un complejo z_0 para el cual,*

$$\lim_{z\to z_0} \tfrac{1}{f(z)} = 0.$$

Definición 1.1.4 (*función meromorfa*)**.** *Una función f se dice que es meromorfa en a si f es analítica en a ó si a es un polo de f. Si Ω es un dominio de $\mathbb{C}$, f es meromorfa en Ω si es meromorfa en cada punto de Ω. f se dice holomorfa en Ω si es meromorfa en Ω pero no posee polos.*

Las funciones meromorfas se pueden ver como aplicaciones $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ donde $\mathbb{C}_\infty$ es el plano complejo añadiendo el elemento ∞ para que sea imagen de los polos de todas las funciones definidas en Ω. El conjunto de polos de una función meromorfa f es cerrado y finito o numerable.

Definición 1.1.5. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, denotaremos el conjunto de todas las funciones meromorfas por $\mathcal{M}(\Omega)$.*

El siguiente es un hecho bien conocido, véase [1] y [3].

Proposición 1.1.6. *Sea Ω un dominio complejo, entonces $\mathcal{M}(\Omega)$ es un cuerpo bajo las operaciones usuales de suma y multiplicación de funciones*

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

Prueba. Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ son dos funciones meromorfas, la suma $f + g : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ está bien definida para cada $z \in \Omega - (f^{-1}(\infty) \cup g^{-1}(\infty))$. Claramente $f + g$ es meromorfa con polos en $f^{-1}(\infty) \cup g^{-1}(\infty)$. Similarmente se tiene para el producto. Ahora, si $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ es meromorfa y no es la función constante cero, entonces $1/f$ también es meromorfa (si z_j es un cero de f entonces es un polo de $1/f$ y si p_k es un polo de f entonces es un cero de $1/f$). Se sigue de esta forma que el conjunto

$$\mathcal{M}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty \mid f \text{ es meromorfa}\}$$

es un cuerpo, el cuerpo de las funciones meromorfas en Ω. $\square$

Proposición 1.1.7. *Sean $\Omega_1 \subset \Omega_2$ dominios, entonces la restricción $\varphi : \mathcal{M}(\Omega_2) \to \mathcal{M}(\Omega_1)$ la cual envía $f \in \mathcal{M}(\Omega_2)$ en $f|_{\Omega_1}$, es monomorfismo de cuerpos.*

Prueba. Sean $f, g \in \mathcal{M}(\Omega_2)$, como $(f+g)|_{\Omega_1}(x) = f|_{\Omega_1}(x) + g|_{\Omega_1}(x)$ y $(f \cdot g)|_{\Omega_1}(x) = f|_{\Omega_1}(x) \cdot g|_{\Omega_1}(x)$ tenemos que φ es homomorfismo de cuerpos. Sea $h \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, por consiguiente $h|_{\Omega_1} = 0$, supongamos que $h \neq 0$, entonces como $\mathcal{M}(\Omega_2)$ es un cuerpo, $1/h \in \mathcal{M}(\Omega_2)$, pero los polos de $1/h$ son los ceros de h, de esta forma Ω_1 está contenido en los polos de $1/h$ lo cual es imposible pues Ω_1 es no numerable. Así que $h = 0$ y por lo tanto φ es monomorfismo. $\square$

De esta forma, podemos considerar a $\mathcal{M}(\Omega_2)$ como subcuerpo de $\mathcal{M}(\Omega_1)$. En particular, para operar con funciones meromorfas podemos restringirnos a cualquier abierto suficientemente pequeño como para excluir los polos de todas las funciones involucradas.

1.2. Cuerpos diferenciales y extensiones de cuerpos

Definición 1.2.1. *Una derivación en un cuerpo $\mathcal{M}(\Omega)$ es una aplicación $\phi : \mathcal{M}(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ que asigna h en h' para cada $h \in \mathcal{M}(\Omega)$, y satisface las siguientes condiciones*

$$(f+g)' = f' + g', \quad (f \cdot g)' = f'g + fg' \quad \textit{para cada } f, g \in \mathcal{M}(\Omega).$$

Proposición 1.2.2. *Si Ψ es un cuerpo diferencial, $a_i \in \Psi$ y $n_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, se cumple*

$$\frac{(a_1^{n_1} \cdots a_m^{n_m})'}{a_1^{n_1} \cdots a_m^{n_m}} = n_1 \frac{a_1'}{a_1} + \cdots + n_m \frac{a_m'}{a_m}.$$

Prueba. Utilizando la Definición 1.2.1 obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{(a_1^{n_1} \cdots a_m^{n_m})'}{a_1^{n_1} \cdots a_m^{n_m}} &= \frac{n_1 a_1^{n_1-1} a_1' (a_2^{n_2} \cdots a_m^{n_m}) + a_1^{n_1} (a_2^{n_2} \cdots a_m^{n_m})'}{a_1^{n_1} \cdots a_m^{n_m}} \\
&= \frac{n_1 a_1^{n_1-1} a_1' (a_2^{n_2} \cdots a_m^{n_m})}{a_1^{n_1} \cdots a_m^{n_m}} + \frac{a_1^{n_1} (a_2^{n_2} \cdots a_m^{n_m})'}{a_1^{n_1} \cdots a_m^{n_m}} \\
&= n_1 \frac{a_1'}{a_1} + \frac{(a_2^{n_2} \cdots a_m^{n_m})'}{a_2^{n_2} \cdots a_m^{n_m}}
\end{aligned}$$

Aplicando inductívamente al cociente $\frac{(a_2^{n_2} \cdots a_m^{n_m})'}{a_2^{n_2} \cdots a_m^{n_m}}$ tenemos

$$\frac{(a_1^{n_1} \cdots a_m^{n_m})'}{a_1^{n_1} \cdots a_m^{n_m}} = \sum_{i=1}^{m} n_i \frac{a_i'}{a_i}.$$

□

Definición 1.2.3. *Un cuerpo Ψ se dice una extensión de un cuerpo τ, si τ es un subcuerpo de Ψ. Diremos que Ψ es una extensión de cuerpos diferenciales de τ, si τ es subcuerpo diferencial de Ψ tal que cada derivada de toda función de τ está en τ, de tal forma que τ se convierte en un cuerpo diferencial con la restricción de las derivaciones de Ψ.*

En lo que sigue de esta sección Ψ denotará un cuerpo diferencial.

Definición 1.2.4 (Adhesión). *Sean $\tau \subset \Psi$ una extensión de cuerpos diferenciales. Sea $S \subset \Psi$, decimos que $\tau(S)$ es una adhesión de S sobre el subcuerpo τ y se define de la siguiente forma*

$$\tau(S) := \left\{ \alpha \in \Psi : \alpha = \tfrac{p(s_1, \ldots, s_n)}{q(s_1, \ldots, s_n)} \right\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in \tau[x_1, \ldots, x_n]$, $s_1, \ldots, s_n \in S$ y $q(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$. Si $S := \{s_1, \ldots, s_n\}$ denotamos $\tau(s_1, \ldots, s_n) := \tau(S)$. Si $\Psi = \tau(S)$ se dice que S es un sistema generador de Ψ sobre τ. Si $\Psi = \tau(s)$ se dice que la extensión Ψ es simple y que s es un elemento primitivo de la extensión.

Proposición 1.2.5. *$\tau(S)$ de la definición 1.2.4 es el menor subcuerpo de Ψ que contiene a τ y S.*

Prueba. Es claro que S y τ están contenidos en $\tau(S)$ puesto que si $s \in S$ y $t \in \tau$ entonces, $s = \frac{s}{1}, t = \frac{t}{1} \in \tau(S)$. Veamos que $\tau(S)$ es subcuerpo, en efecto, para ver que $\tau(S)$ es subanillo de Ψ, de [2] ejercicio 48 sección 18, es suficiente probar que

(i) $0 \in \tau(S)$;

(ii) $f - g \in \tau(S)$ para cada $f, g \in \tau(S)$;

(iii) $fg \in \tau(S)$ para cada $f, g \in \tau(S)$.

(i): $0 \in \tau(S)$ ya que $0 \in \tau \subset \tau(S)$.
(ii): Sean $f, g \in \tau(S)$, veamos que $(f - g) \in \tau(S)$. Entonces $f = \frac{\alpha_1(s_1,\ldots,s_n)}{\alpha_2(s_1,\ldots,s_n)}$ y $g = \frac{\beta_1(s_1,\ldots,s_n)}{\beta_2(s_1,\ldots,s_n)}$, de esta forma

$$\frac{\alpha_1(s_1, \ldots, s_n)}{\alpha_2(s_1, \ldots, s_n)} - \frac{\beta_1(s_1, \ldots, s_n)}{\beta_2(s_1, \ldots, s_n)} = \frac{\alpha_1(s_1, \ldots, s_n)\beta_2(s_1, \ldots, s_n) - \alpha_2(s_1, \ldots, s_n)\beta_1(s_1, \ldots, s_n)}{\alpha_2(s_1, \ldots, s_n)\beta_2(s_1, \ldots, s_n)}$$

Como $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \tau[X_1, \ldots, X_n]$ y $\alpha_2(s_1, \ldots, s_n), \beta_2(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$. Tenemos que $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \alpha_2\beta_2 \in \tau[X_1, \ldots, X_n]$ y $(\alpha_2\beta_2)(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$, por lo tanto $(f - g) \in \tau(S)$.
(iii): De manera similar, tenemos que $fg \in \tau(S)$ ya que $\frac{(\alpha_1\beta_1)(s_1,\ldots,s_n)}{(\alpha_2\beta_2)(s_1,\ldots,s_n)} \in \tau(S)$.

Para completar la prueba de que $\tau(S)$ es subcuerpo. Tomemos $\alpha = \frac{p(s_1,\ldots,s_n)}{q(s_1,\ldots,s_n)} \in \tau(S)^*$ entonces su inverso es $\frac{q(s_1,\ldots,s_n)}{p(s_1,\ldots,s_n)} \in \tau(S)$. Por lo tanto, $\tau(S)$ es un subcuerpo de Ψ.

Veamos que $\tau(S)$ es el menor subcuerpo de Ψ que contiene a S y τ. Sea T un subcuerpo de Ψ que contiene a S y τ, basta ver que $\tau(S) \subseteq T$. Sea $p = p(s_1, \ldots, s_n)$ donde $p \in \tau[X_1, \ldots, X_n]$ entonces p tiene la forma $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_i s^{\alpha_i}$, donde $t_i \in \tau$ y $s^{\alpha_i} := s_1^{\alpha_{i_1}} \cdots s_n^{\alpha_{i_n}}$ para cada $1 \leq i \leq m$. Como $S, \tau \subset T$ entonces cada monomio $t_i s^{\alpha_i} \in T$ entonces $p \in T$. De esta forma si $\alpha = \frac{p(s_1,\ldots,s_n)}{q(s_1,\ldots,s_n)} \in \tau(S)^*$, entonces $\alpha \in T$, así que $\tau(S)$ es subcuerpo de T. $\square$

Proposición 1.2.6. *Las siguientes afirmaciones se cumplen en Ψ.*

(i) $0' = 1' = (-1)' = 0$;

(ii) *Si* $f \in \Psi$ *entonces* $(-f)' = -f'$*;*

(iii) *Si* $f \in \Psi^*$, $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$.

Prueba.

(i) $0' = (0+0)' = 0' \cdot 0 + 0 \cdot 0' = 0$; $1' = (1 \cdot 1)' = 1' \cdot 1 + 1 \cdot 1' = 1' + 1'$, entonces $1' = 0$; $0' = (1 + (-1))' = 1' + (-1)' = (-1)'$, entonces $(-1)' = 0$.

(ii) Si $f \in \Psi$ entonces $(-f)' = (-1 \cdot f)' = (-1)'f + -1 \cdot f' = -f'$.

(iii) Como $0 = (1)' = (f \cdot \frac{1}{f})' = (f)(\frac{1}{f})' + (f')(\frac{1}{f})$, entonces multiplicando por $\frac{1}{f}$, obtenemos $0 = (\frac{1}{f})' + \frac{f'}{f^2}$, así que $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$.

□

Proposición 1.2.7. $C = \{\alpha \in \Psi \mid \alpha' = 0\}$ *es subcuerpo diferencial de* Ψ*.*

Prueba. Para demostrar que C es un subcuerpo, tenemos lo siguiente

(i) De proposición 1.2.6 (i), $0 \in C$.

(ii) Sean $f, g \in C$ entonces $f - g \in C$, en efecto, $(f-g)' = (f+(-g))' = f' + (-g)'$, de la proposición 1.2.6 (ii), tenemos $(f-g)' = f' - g' = 0$.

(iii) Sean $f, g \in C$, entonces $fg \in C$, en efecto, $(fg)' = f'g + fg' = 0$.

por lo tanto C es subanillo de Ψ. Veamos que C es subcuerpo. Sea $f \in C - \{0\}$ entonces $\frac{1}{f} \in C$, en efecto, por la proposición 1.2.6 (iii), $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2} = 0$. □

Definición 1.2.8. *El subcuerpo diferencial* C *de la proposición anterior se llama el cuerpo de constantes de* Ψ*.*

Proposición 1.2.9. *Sea* $\tau \subset \Psi$ *una extensión de cuerpos diferenciales y* $S \subset \Psi$*. Entonces, el cuerpo* $\tau(S)$ *es subcuerpo diferencial de* Ψ *si y solo si para todo* $s \in S$ *se tiene que* $s' \in \tau(S)$*.*

Prueba. $(\Rightarrow)$: Sea $s \in S$, como $S \subset \tau(S)$ entonces $s \in \tau(S)$. Por la proposición 1.2.5 sabemos que $\tau(S)$ es un subcuerpo diferencial de Ψ, de esta forma contiene las derivadas de todos sus elementos, es decir, $s' \in \tau(S)$.
$(\Leftarrow)$: Sea $M = \alpha s_{i_1}^{n_{i_1}} \cdots s_{i_m}^{n_{i_m}}$ donde $\alpha \in \tau$ y $s_j \in S$. Por la Proposición 1.2.5 $\alpha, s_{i_1}, \ldots, s_{i_m} \in \tau(S)$ y $M \in \tau(S)$. Veamos que si $\alpha \in \tau(S) \Rightarrow \alpha' \in \tau(S)$.

(i) Sea $s \in S \Rightarrow (s^k)' = ks^{k-1}s' \in \tau(S)$

Por inducción sobre k.

Si $k = 1$ entonces $(s^1)' = 1(s^0)s' = s' \in \tau(S)$ por hipótesis. Si $k = 2$ entonces $(s^2)' = (s \cdot s)' = ss' + s's = 2ss' = 2s^1s' \in \tau(S)$. Asumamos que $(s^k)' = ks^{k-1}s' \in \tau(S)$.

Probemos para $k+1$, es decir, $(s^{k+1})' = (k+1)s^ks' \in \tau(S)$. $(s^{k+1})' = (s^k \cdot s)' = (s^k)'s + (s^k)s' = ks^{k-1}s's + (s^k)s' = ks^{k-1}ss' + (s^k)s' = ks^ks' + (s^k)s' = (k+1)s^ks'$.

Ya que $s^k \in \tau(S)$ y $s' \in \tau(S)$ por hipótesis, entonces $(k+1)s^ks' = (s^{k+1})' \in \tau(S)$.

Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, $(s^k)' \in \tau(S)$.

(ii) Sea $M = \alpha s_{i_1}^{n_{i_1}} \cdots s_{i_m}^{n_{i_m}} \Rightarrow M' \in \tau(S)$.

Por inducción sobre el número de factores m. Si tenemos un factor, entonces $M' = (\alpha s_{i_1}^{n_{i_1}})' = \alpha' s_{i_1}^{n_{i_1}} + \alpha(s_{i_1}^{n_{i_1}})' \in \tau(S)$ ya que $\alpha' \in \tau(S)$ pues τ es cuerpo diferencial. Si tenemos dos factores entonces $M' = (\alpha s_{i_1}^{n_{i_1}} s_{i_2}^{n_{i_2}})' = (\alpha s_{i_1}^{n_{i_1}})'(s_{i_2}^{n_{i_2}}) + (\alpha s_{i_1}^{n_{i_1}})(s_{i_2}^{n_{i_2}})' \in \tau(S)$.

Probemos para $m+1$ factores. Asumamos que $M' = (\alpha s_{i_1}^{n_{i_1}} \cdots s_{i_m}^{n_{i_m}})' \in \tau(S)$.

Si agregamos un factor adicional tenemos: $(\alpha s_{i_1}^{n_{i_1}} \cdots s_{i_m}^{n_{i_m}} s_{i_{m+1}}^{n_{m+1}})' = M'(s_{i_{m+1}}^{n_{m+1}}) + M(s_{i_{m+1}}^{n_{m+1}})'$. Dado que $M \in \tau(S)$ y para cada $s \in S$, $s' \in \tau(S)$ entonces $(\alpha s_{i_1}^{n_{i_1}} \cdots s_{i_m}^{n_{i_m}} s_{i_{m+1}}^{n_{m+1}})' \in \tau(S)$.

Llegamos a la conclusion de que todo elemento de $\tau(S)$ de la forma $p(s_1, \ldots, s_n)$, donde p es un polinomio, tiene a su derivada $(p(s_1, \ldots, s_n))' \in \tau(S)$.

(iii) Sean $p = p(s_1, \ldots, s_n)$, $q = q(s_1, \ldots, s_n) \in \tau(S)$. Veamos que $(\frac{p}{q})' \in \tau(S)$.

$$\left(\frac{p}{q}\right)' = \left(p \cdot \frac{1}{q}\right)' = p'(q^{-1}) + p \cdot (q^{-1})' = \frac{p'}{q} + p\frac{-q'}{q^2} = \frac{p'q}{q^2} - \frac{pq'}{q^2} = \frac{p'q - pq'}{q^2}.$$

Como el numerador y el denominador pertenecen a $\tau(S)$, tenemos $(p/q)' \in \tau(S)$.

De esta forma, todo cociente de polinomios en $\tau(S)$ tiene su derivada en $\tau(S)$, esto equivale a decir que la derivada de todos los elementos de $\tau(S)$ pertenece a $\tau(S)$. $\square$

1.3. Funciones elementales sobre cuerpos diferenciales

Definición 1.3.1. *Sean $\tau \subset \Psi$ una extensión de cuerpos diferenciales y $f \in \Psi$, entonces se dice que f es elemental sobre τ si existe una cadena de subcuerpos*

$$\tau = \Psi_0 \subset \Psi_1 \subset \cdots \subset \Psi_n \subset \Psi$$

de tal forma que $f \in \Psi_n$ y para cada $1 \leq i \leq n$, se cumple que $\Psi_i = \Psi_{i-1}(t_i)$ para algún t_i que cumple alguna de las siguientes condiciones

(i) *t_i es algebraico sobre Ψ_{i-1}, es decir, existe un polinomio no nulo $p(X) \in \Psi_{i-1}[X]$ tal que $p(t_i) = 0$.*

(ii) *t_i es no nulo y $g' = t_i'/t_i$ para alguna función $g \in \Psi_{i-1}$, en cuyo caso diremos que t_i es una exponencial de g.*

(iii) *$t_i = g'/g$ para alguna función $g \in \Psi_{i-1}$ en cuyo caso diremos que t_i es un logaritmo de g.*

Si $D \subset \mathbb{C}$ es un dominio, podemos considerar la cadena de subcuerpos diferenciales $\mathbb{C}(z) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}(D)$. Se dice que f es elemental sobre D, si es una función de $\mathcal{M}(D)$ que es elemental sobre $\mathbb{C}(z)$.

Teorema 1.3.2. *La cadena de subcuerpos Ψ_i que aparecen en la definición 1.3.1 son subcuerpos diferenciales de Ψ. En particular, si $f \in \Psi$ es elemental, entonces f' es elemental.*

Prueba. Veamos que Ψ_i es subcuerpo diferencial de Ψ para cada i. Por inducción sobre i, si $i = 0$ entonces es claro que $\Psi_0 = \tau$ es subcuerpo diferencial de Ψ. Supongamos que Ψ_{i-1} es subcuerpo diferencial de Ψ, veamos que esto también es válido para Ψ_i, en efecto, como $\Psi_i = \Psi_{i-1}(t_i)$ basta probar que $t_i' \in \Psi_i$.

(i) Si t_i es algebraica sobre Ψ_i, existe un polinomio $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ con $\alpha_i \in \Psi_{i-1}$ y $t_i \in \Psi_i$ tal que

$$p(t_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t_i + \alpha_2 {t_i}^2 + \cdots + \alpha_n {t_i}^n = 0$$

Derivando la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0' + (\alpha_1' t_i + \alpha_1 t_i') + (\alpha_2' {t_i}^2 + \alpha_2 \cdot 2 t_i t_i') + \cdots + (\alpha_n' {t_i}^n + \alpha_n \cdot n t_i^{n-1} t_i') \\ &= (\alpha_0' + \alpha_1' t_i + \alpha_2' {t_i}^2 + \cdots + \alpha_n' {t_i}^n) + (\alpha_1 + 2\alpha_2 t_i + \cdots + n\alpha_n t_i^{n-1}) t_i'. \end{aligned}$$

De aquí tenemos

$$t_i' = -\frac{\alpha_0' + \alpha_1' t_i + \alpha_2' {t_i}^2 + \cdots + \alpha_n' {t_i}^n}{\alpha_1 + 2\alpha_2 t_i + \cdots + n\alpha_n t_i^{n-1}} \in \Psi_i.$$

(ii) Si t_i es exponencial de alguna función $g \in \Psi_{i-1}$, tenemos $\frac{t_1'}{t_i} = g' \Rightarrow t_i' = g' \cdot t_i \in \Psi_i$.

(iii) Si t_i es logaritmo de alguna función $g \in \Psi_{i-1}$, tenemos $t_i' = \frac{g'}{g} \in \Psi_{i-1} \subset \Psi_i$.

De esta forma Ψ_n es subcuerpo diferencial de Ψ y si f es elemental $f' \in \Psi_n$ también lo es. □

Teorema 1.3.3. *Si Ψ es una extension de cuerpos diferenciales de τ y $f_1, \ldots, f_m \in \Psi$ son funciones elementales sobre τ, entonces existe una cadena de cuerpos*

$$\tau = \Psi_0 \subset \Psi_1 \subset \cdots \subset \Psi_n \subset \Psi$$

tal que $f_1, \ldots, f_m \in \Psi_n$.

Prueba. Por inducción sobre m. Si $m = 1$ entonces la función elemental $f_1 \in \Psi$ tiene una cadena de subcuerpos $\tau = \Psi_0 \subset \Psi_1 \subset \cdots \subset \Psi_n \subset \Psi$ tal que $f_1 \in \Psi_n$, coincide con la definición 1.3.1. Supongamos que el teorema es cierto hasta $m - 1$. Probaremos para m. Existe una cadena de cuerpos $\tau = \Psi_0 \subset \Psi_1 \subset \cdots \subset \Psi_n \subset \Psi$ tal que $f_1, \ldots, f_{m-1} \in \Psi_n$. Ya que la función f_m es elemental, existe otra cadena de subcuerpos $\tau = \Upsilon_0 \subset \Upsilon_1 \subset \cdots \subset \Upsilon_r \subset \Psi$ tal que $\Upsilon_i = \Upsilon_{i-1}(u_i)$ y $f_m \in \Upsilon_r$. Posteriormente, definimos una nueva cadena de subcuerpos de la siguiente forma $\Psi_{n+i} = \Psi_{n+i-1}(u_i)$. Afirmamos que $\Upsilon_{i-1} \subset \Psi_{n+i-1}$, en efecto, podemos hacer inducción sobre i. Si $i = 1$, $\Upsilon_0 = \tau \subset \Psi_n$. Supongamos que $\Upsilon_{i-1} \subset \Psi_{n+i-1}$ entonces $\Upsilon_i = \Upsilon_{i-1}(u_i) \subset \Psi_{n+i-1}(u_i) = \Psi_{n+i}$, por lo tanto, $\Upsilon_i \subset \Psi_{n+i}$.

(i) Si u_i es algebraico sobre Υ_{i-1}, entonces existe $P(x) \in \Upsilon_{i-1}[x] \subset \Psi_{n+i-1}[x]$ tal que $P(u_i) = 0$ y por lo tanto es algebraico sobre Ψ_{n+i-1}.

(ii) Si u_i es exponencial de alguna función $g \in \Upsilon_{i-1} \subset \Psi_{n+i-1}$, $\frac{u_i'}{u_i} = g'$, luego es exponencial de una función de Ψ_{n+i-1}.

(iii) Si u_i es logaritmo de alguna función $g \in \Upsilon_{i-1} \subset \Psi_{n+i-1}$, $\frac{g'}{g} = u_i'$, luego es logaritmo de una función de Ψ_{n+i-1}.

Además $f_1, \ldots, f_m \in \Psi_{n+r}$. □

Teorema 1.3.4. *Sea Ψ una extension de cuerpos diferenciales de τ entonces el conjunto Ψ_e de las funciones $f \in \Psi$ elementales sobre τ es un subcuerpo diferencial de Ψ.*

Prueba. Sean $f, g \in \Psi$ funciones elementales, existe una cadena de subcuerpos diferenciales $\tau = \Psi_0 \subset \Psi_1 \subset \cdots \subset \Psi_n \subset \Psi$ donde $\Psi_{i-1}(t_i) = \Psi_i$ tal que $f, g \in \Psi_n$. Ψ_n es un subcuerpo diferencial, por lo tanto, $f - g, \frac{1}{f}, -f \in \Psi_n$. Por el teorema 1.3.2, si $f \in \Psi_n$ es elemental, $f' \in \Psi_n$ es elemental. Todas las funciones elementales del cuerpo Ψ (bajo las condiciones de la Definición 1.3.1) forman un subcuerpo diferencial. □

Al demostrar que el conjunto de las funciones elementales posee la estructura de un cuerpo diferencial, hemos llegado a un hecho importante.

Teorema 1.3.5. *Sea Ψ una extension de cuerpos diferenciales de τ y Ψ_e el subcuerpo diferencial mencionado en el teorema 1.3.4, entonces*

(i) *Toda función $f \in \Psi$ algebraica sobre Ψ_e está en Ψ_e.*

(ii) *Toda exponencial y todo logaritmo de una función $g \in \Psi_e$ está en Ψ_e.*

Prueba.

(i) Sea $f \in \Psi$ algebraica sobre Ψ_e, entonces existe un polinomio no nulo $p(x) = f_m x^m + \cdots + f_1 x + f_0 \in \Psi_e[x]$ tal que $p(f) = 0$. Por el teorema 1.3.3, existe una cadena de subcuerpos

$$\tau = \Psi_0 \subset \Psi_1 \subset \cdots \subset \Psi_n \subset \Psi,$$

que cumple la definición 1.3.1, de tal forma que $f_0, \ldots, f_m \in \Psi_n$. Tomando $\Psi_{n+1} := \Psi_n(f)$, entonces la cadena

$$\tau = \Psi_0 \subset \Psi_1 \subset \cdots \subset \Psi_n \subset \Psi_{n+1} \subset \Psi,$$

sigue cumpliendo las condiciones de la definición 1.3.1, ya que f es algebraica sobre Ψ_n, y como $f \in \Psi_{n+1}$ tenemos $f \in \Psi_e$.

(ii) Si f es exponencial o logaritmo de una función $g \in \Psi_e$ entonces de la definición 1.3.1, tomamos una cadena

$$\tau = \Psi_0 \subset \Psi_1 \subset \cdots \subset \Psi_n \subset \Psi,$$

con $g \in \Psi_n$ y la prolongamos con $\Psi_{n+1} := \Psi_n(f)$, como f es exponencial o logaritmo de una función de Ψ_n entonces $f \in \Psi_e$.

$\square$

Teorema 1.3.6. *Sea $\tau \subset \Psi$ una extensión de cuerpos diferenciales, entonces el cuerpo Ψ_e de las funciones de Ψ elementales sobre τ es el menor subcuerpo diferencial de Ψ que contiene a τ y que cumple el teorema 1.3.5.*

Prueba. Supongamos que K es un subcuerpo de Ψ que contiene a τ y es cerrado para elementos algebraicos, exponenciales y logaritmos. Sea $f \in \Psi_e$, entonces existen $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \Psi$ tales que

$$\tau \subset \tau(t_1) \subset \tau(t_1, t_2) \subset \cdots \subset \tau(t_1, t_2, \ldots, t_n) \subset \Psi \qquad (1.3.1)$$

donde t_i es algebraico sobre $\tau(t_1,\dots,t_{i-1})$ o es exponencial o logaritmo de alguna función $g \in \tau(t_1,\dots,t_{i-1})$ y $f \in \tau(t_1,\dots,t_n)$. De la cadena 1.3.1 podemos considerar la cadena de subcuerpos de Ψ.

$$K \subseteq K(t_1) \subseteq K(t_1,t_2) \subseteq \cdots \subseteq K(t_1,t_2,\dots,t_n) \subset \Psi$$

Como t_1 es algebraico sobre $\tau \subseteq K$ o es exponencial o logaritmo de alguna función $g \in \tau \subseteq K$. Tenemos que $K = K(t_1)$. Aplicando el mismo criterio a t_2, obtenemos $K = K(t_1,t_2)$, si continuamos para cada t_i, tenemos $K = K(t_1,t_2,\dots,t_n)$ y como $f \in \tau(t_1,\dots,t_n) \subseteq K(t_1,\dots,t_n)$, tenemos que $f \in K$. □

Teorema 1.3.7. *Toda función de $\mathbb{C}(z)$ es elemental sobre $\mathbb{C}(z)$.*

Prueba. Para toda función $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ elemental sobre $\mathbb{C}(z)$ existe una cadena de subcuerpos

$$\mathbb{C}(z) = \tau \subset \tau(t_1) \subset \tau(t_1,t_2) \subset \cdots \subset \tau(t_1,t_2,\dots,t_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}),$$

donde $t_i \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ cumple las condiciones de la definición 1.3.1. Sea Ψ_e el subcuerpo diferencial de las funciones de $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ elementales sobre $\mathbb{C}(z)$. Por el teorema 1.3.6 tenemos que $\tau = \mathbb{C}(z) \subset \Psi_e$ o, dicho de otra forma, toda función $c \in \mathbb{C}(z)$ es elemental sobre $\mathbb{C}(z)$. □

Teorema 1.3.8. *Si $D_1 \subset D_2$ son dominios en $\mathbb{C}$, entonces la restricción a D_1 de una función elemental sobre D_2 es elemental sobre D_1.*

Prueba. Por el teorema 1.1.7, $\mathcal{M}(D_2)$ es subcuerpo diferencial de $\mathcal{M}(D_1)$. Sea $f \in \mathcal{M}(D_2)$ elemental sobre D_2, existe una cadena de subcuerpos (bajo las condiciones de la definición 1.3.1) $\mathbb{C}(z) = \Psi_0 \subset \Psi_1 \subset \cdots \subset \Psi_n \subset \mathcal{M}(D_2)$ tal que $f \in \Psi_n$. Por lo tanto, la función restricción $f|_{D_1} \in \mathcal{M}(D_1)$ tiene la cadena de subcuerpos

$$\mathbb{C}(z) = \Psi_0 \subset \Psi_1 \subset \cdots \subset \Psi_n \subset \mathcal{M}(D_1),$$

ajustándose a la definición 1.3.1 obtenemos que $f|_{D_1}$ es elemental sobre $\mathcal{M}(D_1)$. □

Teorema 1.3.9. *Sean $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ dominios complejos, sean $f \in \mathcal{M}(D_1)$, $g \in \mathcal{M}(D_2)$ funciones elementales y supongamos que $D_1 \subset f^{-1}[D_2]$ y que f no tiene polos en D_1. Entonces $g \circ f$ es elemental sobre $\mathbb{C}(z)$.*

Prueba. Como g es elemental sobre $\mathbb{C}(z)$ existe una cadena de subcuerpos

$$\mathbb{C}(z) = \Psi_0 \subset \Psi_1 \subset \cdots \subset \Psi_n \subset \mathcal{M}(D_2)$$

tal que $g \in \Psi_n$. Veamos por inducción sobre k, que si $h \in \Psi_k$ entonces $h \circ f$ es elemental sobre $\mathbb{C}(z)$ y por lo tanto $g \circ f$ es elemental sobre D_1. En el caso $k = 0$

tenemos el resultado directamente, ya que $h \circ f$ es la composición de un cociente de polinomios y la función f, esta compuesta es elemental en D_1, ya que por el teorema 1.3.4, las funciones elementales sobre D_1 conforman un cuerpo.

Supongamos el resultado cierto para $k-1$ y sea $\Psi_k = \Psi_{k-1}(t_k)$. Basta probar el resultado para $t_k \circ f$, pues todas las demás funciones de Ψ_k son cocientes de polinomios evaluados en t_k, de esta forma las composiciones correspondientes son cocientes de polinomios evaluados en $t_k \circ f$, que serán elementales a su vez debido a que las funciones elementales sobre D_1 forman un cuerpo.

Como f es holomorfa y t_k es meromorfa, sabemos que $t_k \circ f \in \mathcal{M}(D_1)$. Tenemos a continuación los siguientes casos para t_k.

(i) t_k es algebraica sobre Ψ_{k-1}, es decir, existen $\varphi_j \in \Psi_{k-1}$ tales que,

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(z) t_k(z)^i = 0$$

para cada $z \in D_2$, donde z no es polo de t_k o de las φ_i (que es todo D_2 salvo un conjunto discreto de puntos). Así

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(f(z)) t_k(f(z))^i = 0,$$

para cada $z \in D_1$ donde z no es polo de $\varphi_i \circ f$ o de $t_k \circ f$. De esta forma tenemos

$$\sum_{i=0}^{n} (\varphi_i \circ f)(t_k \circ f)^i = 0.$$

Por hipótesis de inducción, las funciones $\varphi_j \circ f$ pertenecen al cuerpo $\mathcal{M}(D_1)_e$ de las funciones elementales sobre D_1, y la igualdad anterior muestra que $t_k \circ f$ es algebraico sobre este cuerpo, luego, por el teorema 1.3.5, también $t_k \circ f$ es elemental.

(ii) si t_k es logaritmo de una función $v \in \Psi_{k-1}$, es decir,

$$t_k'(z) = \frac{v'(z)}{v(z)}$$

para cada $z \in D_2$ que no sea polo de las funciones involucradas, luego

$$t_k'(f(z)) = \frac{v'(f(z))}{v(f(z))}$$

para cada $z \in D_2$ que no sea polo de las funciones involucradas. Por hipótesis de inducción tenemos que $v \circ f$ es elemental sobre D_1, además

$$t_k'(f(z))f'(z) = \frac{v'(f(z))f'(z)}{v(f(z))} = \frac{v(f(z))'}{v(f(z))},$$

de esta forma,

$$(t_k \circ f)' = \frac{(v \circ f)'}{v \circ f},$$

luego $t_k \circ f$ es logaritmo de $v \circ f$, luego por el teorema 1.3.5, $t_k \circ f$ es elemental sobre D_1.

(iii) si t_k es un exponencial de una función $v \in \Psi_{k-1}$, es decir,

$$v'(z) = \frac{t_k'(z)}{t_k(z)}$$

para cada $z \in D_2$ que no sea polo de las funciones involucradas, luego

$$v'(f(z)) = \frac{t_k'(f(z))}{t_k(f(z))}$$

para cada $z \in D_2$ que no sea polo de las funciones involucradas. Por hipótesis de inducción tenemos que $v \circ f$ es elemental sobre D_1, además

$$v'(f(z))f'(z) = \frac{t_k'(f(z))f'(z)}{t_k(f(z))} = \frac{t_k(f(z))'}{t_k(f(z))},$$

de esta forma,

$$(v \circ f)' = \frac{(t_k \circ f)'}{t_k \circ f},$$

luego $t_k \circ f$ es una exponencial de $v \circ f$, luego por el teorema 1.3.5, $t_k \circ f$ es elemental sobre D_1.

$\square$

Teorema 1.3.10. *Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio y sea $g \in \mathbb{C}(z)$ una función no constante que no tiene polos en D. Entonces, la función $e^{g(z)} \in \mathcal{M}(D)$ es trascendente sobre $\mathbb{C}(z)$.*

Prueba. Supongamos que e^g es algebraica sobre $\mathbb{C}(z)$. Entonces existe un polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \in \mathcal{D}[x]$ con $a_0 = 1$ y $\mathcal{D} = \mathbb{C}(z)$ tal que

$$p(e^g) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{(n-k)g} = 0 \tag{1.3.2}$$

donde $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{D}$. Derivando obtenemos

$$q(e^g) := p'(e^g) = \sum_{k=0}^{n} [a_k' + a_k(n-k)g']e^{(n-k)g} = 0.$$

Esta ecuación es proporcional a 1.3.2, luego $q \mid p$. Entonces $ng' = \frac{a_n'}{a_n}$, el cual, puede ser cero o una suma de fracciones con numerador constante y denominadores lineal (véase proposición 1.2.2). Supongamos que $\frac{a_n'}{a_n} = \sum_{i=1}^{r} \dfrac{n_i}{z-\beta_i}$. Luego, $ng' = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{z-\beta_i}$. Esto es una contradicción porque la descomposición en factores de g' no posee necesariamente denominadores lineales. Por lo tanto $\frac{a_n'}{a_n} = ng' = 0$, luego, $g' = 0$ implica que g es constante, contradiciendo la hipótesis inicial del teorema. Por lo tanto e^g es trascendente en $\mathbb{C}(z)$. □

El siguiente resultado lo utilizaremos mas adelante, (véase [10] lema pag 155).

Lema 1.3.11. *Sea F un cuerpo diferencial de característica cero , $F(t)$ una extension diferencial del cuerpo F con el mismo cuerpo de constantes y t transcendental sobre F donde se tenga que $t' \in F$ o $t'/t \in F$. Sean $c_1, \ldots, c_n \in F$ linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ y sean $u_1, \ldots, u_n$ elementos no nulos de $F(t)$, $v \in F(t)$. Entonces, si*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v' \in F[t]$$

tenemos $v \in F[t]$ y, en el caso $t' \in F$, cada $u_i \in F$, mientras que en el caso $\frac{t'}{t} \in F$, para cada $i = 1, \ldots, n$ tenemos $\frac{u_i}{t^{r_i}} \in F$ para algún entero r_i.

Las siguientes proposiciones se utilizarán en el capitulo 2, vease [4], 4.1 y 4.2.

Proposición 1.3.12. *Sea $\Psi \subset \mathcal{L}$ una extensión de cuerpos diferenciales, donde $\mathcal{L} = \Psi(t)$ con t trascendente sobre Ψ, y supongamos que, para cada $p(t) \in \Psi[t]$, también $p(t)' \in \Psi[t]$, y que si $p(t)$ es mónico e irreducible, el grado de $p(t)'$ es menor que el de $p(t)$. Entonces, para cada $v \in \mathcal{L}$, la descomposición en fracciones simples de v' tiene como denominadores los mismos polinomios irreducibles que aparecen en la descomposición de v, pero el exponente máximo con que cada uno de ellos aparece en v' es una unidad más que el que tiene en v. En particular, este exponente máximo es siempre ≥ 2.*

Proposición 1.3.13. *Sea $\Psi \subset \mathcal{L}$ una extensión de cuerpos diferenciales, donde $\mathcal{L} = \Psi(t)$ para un cierto t trascendente sobre Ψ. Supongamos que Ψ y $\mathcal{L}$ tienen el mismo cuerpo de constantes. Entonces*

(i) *Si $t'/t \in \Psi$, para cada polinomio $f(t) \in \Psi[t]$ de grado positivo, $f(t)'$ es un polinomio en $\Psi[t]$ del mismo grado que $f(t)$ si el coeficiente director de $f(t)$ no es constante, y de un grado menos si es constante.*

(ii) *Si $t'/t \in \Psi$, entonces, para todo $a \in \Psi$ no nulo y todo entero no nulo n, se cumple que $(at^n)' = ht^n$, para cierto $h \in \Psi$ no nulo y para cada polinomio $f(t) \in \Psi[t]$ de grado positivo, la derivada $f(t)'$ es un polinomio en $\Psi[t]$ del mismo grado, y es un múltiplo de $f(t)$ si y solo si $f(t)$ es un monomio.*

CAPÍTULO 2

PRIMITIVAS ELEMENTALES

En el presente capítulo haremos enfasis en el conocido teorema de Liouville el cual servirá para aplicar a ciertas familias de funciones en el capítulo 3, la teoría la desarrolló Lioville entre 1833 y 1841, veanse, [4], [7], [8], [10] y [11].

2.1. Teorema de Liouville

Teorema 2.1.1 (Liouville)**.** *Sea Ψ un cuerpo diferencial de característica cero y $\alpha \in \Psi$. Si la ecuación $y' = \alpha$ tiene solución elemental en una extension diferencial de Ψ con el mismo subcuerpo de constantes, entonces existen constantes $c_1, \ldots, c_m \in \Psi$ y elementos $u_1, \ldots, u_m, v \in \Psi$ tales que*

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{u_i'}{u_i} \tag{2.1.1}$$

Prueba. Como y es una solución elemental en una extensión diferencial de Ψ, existe una cadena de subcuerpos diferenciales

$$\Psi \subset \Psi(t_1) \subset \Psi(t_1, t_2) \subset \cdots \subset \Psi(t_1, \ldots, t_n)$$

donde $y \in \Psi(t_1, \ldots, t_n)$ y t_i es algebraico, exponencial o logaritmo según la definición 1.3.1. Demostraremos el teorema haciendo inducción sobre n. Si $n = 0$ la ecuación se cumple cuando $v = y$, $c_i = 0$ y los u_i son elementos arbitrarios de Ψ para $1 \leq i \leq m$. Supongamos que se cumple para $n-1$. En adelante, tomaremos $t := t_1$. Consideremos la cadena de subcuerpos

$$\Psi(t) \subset \Psi(t)(t_2) \subset \cdots \subset \Psi(t)(t_2, \ldots, t_n)$$

Por hipótesis de inducción, existen $c_1, \dots, c_m \in \Psi$ y $u_1, \dots, u_m, v \in \Psi(t)$ que satisfacen (2.1.1). Ahora consideraremos los siguientes casos.

(i) Si t es algebraico. Entonces, podemos considerar polinomios $U_1, \dots, U_m \in \Psi[x]$ tales que $U_1(t) = u_1, \dots, U_m(t) = u_m, V(t) = v$. Sea $p(x) \in \Psi[x]$ el polinomio mínimo de t sobre Ψ. El cuerpo diferencial Ψ tiene una clausura algebraica tal que $p(x)$ se puede factorizar en la forma

$$p(x) = (x - t)(x - \zeta_2) \cdots (x - \zeta_\lambda)$$

Sea $\mathcal{L} = \Psi(t, \zeta_2, \dots, \zeta_\lambda)$, como $\mathcal{L}$ comprende un número finito de subextensiones de cuerpos, existe un elemento $u \in \mathcal{L}$ tal que $\mathcal{L} = \Psi(u)$, véase [5], teorema 7.38, teorema del elemento primitivo. Como tenemos una extension de cuerpos diferenciales $\Psi \subset \Psi(t) \subset \mathcal{L}$. Definimos las derivaciones

$$D_0(\sum_{i=0}^{n} a_i u^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i' u^i, \quad D_1(\sum_{i=0}^{n} a_i u^i) = \sum_{i=0}^{n} i a_i u^{i-1}.$$

en $\Psi(u)$, se puede ver facilmente que

$$D(\zeta) = D_0(\zeta) + w D_1(\zeta), \text{ donde } w \text{ es un elemento arbitrario de } \Psi(u),$$

es también una derivación en $\mathcal{L} = \Psi(u)$ que extiende a la de Ψ de manera única. Para cada j existe un automorfismo σ_j que deja invariante los elementos de Ψ y ademas $\sigma(t) = t_j$, la aplicación $f^* = \sigma_j^{-1}(\sigma_j(f)')$ donde $f \in \mathcal{L}$ es una derivación que extiende la de Ψ. Extendiendo la ecuación, tenemos:

$$\alpha = V(t_j)^* + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{U_i(t_j)^*}{U_i(t_j)}$$

se cumple en $\mathcal{L}$ para $j = 1$, porque se cumple en $\Psi(t) \subset \mathcal{L}$. Dado que los automorfismos σ_j preservan las sumas, los productos y las derivadas, y dejen invariantes a los elementos de Ψ, la ecuación también se cumple para todo j.

Sumando los $\lambda = [\mathcal{L} : \Psi]$ Ψ-automorfismos obtenemos

$$\lambda \cdot \alpha = \sum_{j=1}^{\lambda} V(t_j)^* + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\left(\prod_{j=1}^{\lambda} U_i(t_j)\right)^*}{\prod_{j=1}^{\lambda} U_i(t_j)}$$

Ahora observamos que $\overline{u_i} = \prod_{j=1}^{\lambda} U_i(t_j)$ y $\overline{v} = \sum_{j=1}^{\lambda} V(t_j)^*$ permanecen invariantes por los automorfismos de $\mathcal{L}$ que fijan a Ψ, luego la teoría de Galois nos asegura que $\overline{u_i}, \overline{v} \in \Psi$, por lo tanto

$$\lambda \cdot \alpha = \overline{v}^* + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{\overline{u_i}^*}{\overline{u_i}}$$

$$\alpha = \frac{1}{\lambda}\overline{v}^* + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{m} c_i \frac{\overline{u_i}^*}{\overline{u_i}}.$$

Sean $r_0 = \frac{\overline{v}}{\lambda}$,$k_i = \frac{\overline{c_i}}{\lambda}$ y $r_i = \overline{u_i}$, tenemos:

$$\alpha = {r_0}^* + \sum_{i=1}^{m} k_i \frac{{r_i}^*}{r_i}$$

donde $r_0, k_i, r_i \in \Psi$.

En el caso de que t no sea algebraico, no podemos afirmar que u_i y v_i sean polinomios de $\Psi[X]$ evaluados en t, sino cocientes de polinomios. En particular, si

$$u_i = \frac{F(t)}{G(t)}$$

descomponiendo F y G en factores irreducibles podemos expresar

$$u_i = F_1(t)^{r_1} \cdots F_m(t)^{r_m},$$

donde los exponentes son enteros no nulos y los polinomios $F_i(t)$ son mónicos, irreducibles, distintos dos a dos salvo quizá uno de ellos, que puede ser un elemento de Ψ (con lo que es una unidad de $\Psi[X]$ y, por definición, no es irreducible).

Por el teorema 1.2.2 podemos sustituir el sumando $c_i\, u_i'/u_i$ en la descomposición de α por m sumandos correspondientes a los polinomios F_i, de modo que podemos suponer que cada $u_i = U_i(t)$ es un polinomio mónico irreducible, o bien $u_i \in \Psi$. Además podemos suponer que todos los u_i son distintos dos a dos, ya que si hubiera dos sumandos iguales podríamos agruparlos. Podemos asumir que $c_i \neq 0$ para todo i.

De esta forma vamos a distinguir los dos casos que nos quedan.

(ii) Supongamos que t es un logaritmo de un elemento de Ψ, es decir, que $t' = a'/a$, para algún $a \in \Psi$. En particular, $t' \in \Psi$, de la proposición 1.3.13 sabemos que las derivadas de los polinomios tienen el mismo grado si el coeficiente director no es constante y es una unidad menos si lo es. Así que

$$v' = \alpha - \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{u_i'}{u_i}.$$

El miembro derecho es la descomposición de v' en fracciones simples. En efecto, tenemos que α, junto con los sumandos correspondientes a elementos $u_i \in \Psi$, pueden verse como un polinomio de $\Psi[t]$ de grado 0 (el primer polinomio de la descomposición). Si en caso contrario, $u_i \in \Psi[t]$ es irreducible, como su coeficiente director es 1 tenemos que $-c_i u_i'$ tiene grado menor que u_i, luego es, una fracción simple, y por tanto índices distintos corresponden a polinomios irreducibles distintos.

De esta forma tenemos que la descomposición de v' en fracciones simples tiene todos los denominadores irreducibles.

De la proposición 1.3.12, podemos afirmar que en los denominadores de la descomposición de v' en fracciones simples, cada polinomio irreducible debe aparecer con exponente al menos 2. Esto es una contradicción salvo que la descomposición en fracciones simples no contenga fracciones simples, es decir, que se reduzca a un polinomio en $\Psi[t]$.

En particular, $u_i \in \Psi$ para todo i y $v \in \Psi[t]$. Con lo cual, la igualdad nos da entonces que $v' \in \Psi$ (es un polinomio de grado 0) y, como el grado de v' sólo puede ser una unidad menos que el grado de v, se tiene que $v(t) = ct + d$, para ciertos $c, d \in \Psi$. Si $c \neq 0$, tenemos que la derivación reduce el grado y por la proposición 1.3.13, esto se tiene si c es constante, luego c es una constante en cualquier caso. Podemos concluir que la igualdad se reduce a

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{u_i'}{u_i} + ct' + d',$$

donde $u_i, d \in \Psi$ y c es constante. Sustituyendo $t' = a'/a$, llegamos a una expresión buscada.

(iii) Consideramos el caso en que t es una exponencial de un elemento de Ψ, es decir, que $t'/t = b'$, con $b \in \Psi$. Si $p(t) \in \Psi[t]$ es un polinomio mónico irreducible, entonces por la proposición 1.3.13, $p(t)'$ es un polinomio del mismo grado, y será múltiplo de $p(t)$ si y solo es un monomio, con lo cual, siendo mónico e irreducible, implica que $p(t) = t$.

De esta forma, si $u_i \notin \Psi$ y $u_i \neq t$, tenemos que u_i' no es múltiplo de u_i, luego al dividir $u_i' = g_i u_i + r_i$, se cumple que $r_i \neq 0$, y obtenemos

$$c_i \frac{u_i'}{u_i} = c_i g_i + c_i \frac{r_i'}{u_i}.$$

Con estas descomposiciones llegamos a la descomposición de v' en fracciones simples. Notese que si un $u_i = t$ entonces $u_i'/u_i = b'$ se agrupa con el polinomio inicial. Así que, en la descomposición de v' en fracciones simples, los denominadores son los u_i que no están en Ψ y que son distintos de t, y todos ellos aparecen con exponente máximo 1.

Notese que no se cumplen las hipótesis de la proposición 1.3.12, ya que las derivadas de los polinomios no tienen grado menor, sino igual. Pero sin perdida de generalidad esta condición no afecta la conclusión de la proposición.

Ya que la proposición 1.3.12 trata por separado a cada p_i, podemos concluir que todos los polinomios distintos de t que aparezcan en la descomposicióon de v' en fracciones simples deben aparecer con exponente ≥ 2. Por lo tanto, afirmamos que u_i es constante salvo quizá para algún índice, para el que puede suceder $u_i = t$. Por otra parte, $v' \in \Psi$, luego v tiene también grado 0, es decir, $v \in \Psi$.

Si todos los u_i están en Ψ, entonces ya tenemos la expresión buscada; si un $u_i = t$, digamos, $u_1 = t$, entonces

$$\alpha = c_1 \frac{t'}{t} + \sum_{i=2}^{m} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v' = \sum_{i=2}^{m} c_i \frac{u_i'}{u_i} + (c_1 b' + v)'$$

es la expresión buscada.

□

2.2. Consecuencias del teorema de Liouville

En la presente sección presentamos los siguientes resultados como consecuencia del teorema de Liouville, los cuales serán fundamentales para poder caracterizar algunos tipos de funciones que no poseen primitiva elemental.

Teorema 2.2.1. *Sean $f, g \in \mathbb{C}(z)$ y g no constante, entonces $\int f e^g dz$ es elemental si y sólo si existe una función racional $R \in \mathbb{C}(z)$, tal que $f = R' + Rg'$.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Sea $t = e^g$, entonces $\frac{t'}{t} = g'$ y por el teorema de Liouville tenemos

$$fe^g = ft = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}$$

donde $c_i \in \mathbb{C}$ y $u_i, v \in \mathbb{C}(z,t)$. Dado que t es transcendental sobre $\mathbb{C}(z)$, el teorema 1.3.11 dice que los $u_i = \alpha_i t^{r_i}$ donde $a_i \in \mathbb{C}(z)$, $r_i \in \mathbb{Z}$ y que v es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}(z)$. Aplicando la proposición 1.2.2 tenemos

$$\frac{u_i'}{u_i} = \frac{(\alpha_i t^{r_i})'}{\alpha_i t^{r_i}} = \frac{a_i'}{a_i} + r_i \frac{t'}{t} = \frac{a_i'}{a_i} + r_i g'.$$

Luego,

$$c_i \frac{u_i'}{u_i} = c_i \frac{a_i'}{a_i} + c_i r_i g'.$$

Sumando obtenemos

$$ft = v' + \left(\kappa g' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{a_i'}{a_i}\right) \quad \text{donde } \kappa = \sum_{i=1}^{n} c_i r_i.$$

Por lo tanto, $\sum c_i u_i'/u_i \in \mathbb{C}(z)$. Ya que $v \in \mathbb{C}(z)[t]$, es de la forma

$$v = \sum_{j=0}^{n} b_j t^j$$

y derivando,

$$v' = \sum_{j=0}^{n} (b_j' + j b_j g') t^j.$$

El factor $b_j' + j b_j g' \neq 0$ si $j, b_j \neq 0$. De otra forma, todos los polos de g' serían de orden uno, lo cual, no necesariamente se tiene. De esta forma $m = 1$ y f es el coeficiente $b_1' + b_1 g'$. Tomando $R := b_1$ obtenemos

$$f = R' + Rg'.$$

($\Leftarrow$) Sea $f = R' + Rg'$, entonces $fe^g = R'e^g + Rg'e^g = (Re^g)'$ donde Re^g es elemental. $\square$

Procediendo como en la prueba de la proposición anterior tomando $\alpha = \sum_{j=-k}^{n} a_j t^j$, se tiene el siguiente útil resultado.

Corolario 2.2.2. *Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio, sea $g \in \mathbb{C}(z)$ y supongamos que g no es constante y no tiene polos en D. Sea $t = e^g \in \mathcal{M}(D)$, sea $\alpha \in \mathbb{C}(z)(t)$ una función de la forma*

$$\alpha = \sum_{j=-k}^{n} a_j t^j$$

donde $a_j \in \mathbb{C}(z)$. Si existe una función elemental $y \in \mathcal{M}(D)$ tal que $y' = \alpha$, entonces, para cada $j \neq 0$, existe una función $b_j \in \mathbb{C}(z)$ tal que $a_j = b_j' + jg'b_j$.

Teorema 2.2.3. *(Liouville-Hardy) Si $f(x)$ es una función racional, entonces $\int f(x) \ln x dx$ es elemental si y sólo si existe una función racional $R(x)$ y una constante c tal que $f(x) = \frac{c}{x} + R'(x)$.*

Prueba. ($\Rightarrow$): Sean $y = \ln x$ y $F(x, w) = f(x)y$, Notemos que F es función racional de sus argumentos y $dy/dx = 1/x$ es función racional de x. Por el teorema fuerte de Liouville (vease, [7], página 298), parte (b), si el integrando de F es elemental, entonces

$$\int f(x) \ln x \, dx = U_0(x, \ln x) + \sum_{i=1}^{n} C_i \ln(U_j(x, \ln x))$$

donde las funciones $U_i's$ son funciones racionales en sus argumentos. Derivando ambos lados obtenemos

$$f(X)\ln x = \frac{d}{dx}\Big(U_0(x,\ln x) + \sum_{i=1}^{n} C_i \ln(U_i(x,\ln x))\Big). \tag{2.2.2}$$

Consideremos la expansión de Taylor de $U_0(x,\ln x)$ alrededor de 0 sobre su segundo argumento

$$\begin{aligned} U_0(x,\ln x) &= U_0(x,0) + DU_0(x,0)\ln x + \frac{1}{2!}D^2U_0(x,0)\ln^2 x + \cdots \\ &\cdots + \frac{1}{n!}D^nU_0(x,0)\ln^n x + \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}U_0(x,\epsilon)\ln^{n+1} x, \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

aquí ϵ está entre 0 y $\ln x$, y D^kU_0 denota la k-esima derivada parcial de U_0 con respecto a su segunda variable. En el lado izquierdo de (2.2.2), $\ln x$ sólo ocurre en forma lineal multiplicada por una función racional. Entonces de (2.2.2) y (2.2.3) obtenemos que $U_0(x,\ln x)$ debe ser de la forma

$$W(x) + V(x)\ln x + U(x)\ln^2 x$$

donde U, V, y W son funciones racionales de x (es decir., los términos de grado mayores a dos se deben anular en la serie (2.2.3). De esta forma los U_i's deben ser funciones racionales de x unicamente; en efecto,

$$\sum_{i=1} \ln(U_i(x,\ln x)) = \sum_{i=1}^{N} b_i \ln(x - a_i)$$

donde los b_i's y los a_i's son constantes. Por lo tante

$$\int f(x)\ln x\, dx = U(x)\ln^2 x + V(x)\ln x + W(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i \ln(x - a_i) \tag{2.2.4}$$

Derivando el lado derecho y comparando con el integrando, obtenemos

$$U'(x) = 0, \quad \frac{2U(x)}{x} + V'(x) = f(x), \quad \frac{V(x)}{x} + W'(x) + \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{x - a_i} = 0.$$

Integrando la primera y la tercera de estas ecuaciones para encontrar $U(x)$ y $W(x)$, y sustituyendo los resultado en la ecuación (2.2.4), tenemos

$$\int f(x)\ln x\, dx = \frac{C}{2}\ln^2 x + V(x)\ln x - \int \frac{V(x)}{x}dx$$

donde C es una constante. Por el teorema de Laplace la integral en el lado derecho es elemental ya que tanto $V(x)$ es una función racional.

$(\Leftarrow)$: Si $f(x) = \frac{c}{x} + R'(x)$, la integral $\int f(x) \ln x \, dx$ es elemental. En efecto, integrando por partes el segundo término en la integral $\frac{c}{x} + R'(x) \ln x$ obtenemos

$$\int \Big(\frac{c}{x} \ln x + R'(x) \ln x \Big) dx = \frac{c}{2} \ln^2 x + R(x) \ln x - \int \frac{1}{x} R(x) \, dx$$

El último término, $\displaystyle\int \frac{1}{x} R(x) \, dx$, es elemental por el teorema de Laplace ya que el integrado es una función racional. $\square$

CAPÍTULO 3

FUNCIONES Y PRIMITIVAS ELEMENTALES REALES

3.1. Funciones elementales reales

Definición 3.1.1. *Una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es elemental si existe un dominio $\mathcal{D}$, con $[a,b] \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ tal que, f se extiende a una función meromorfa y elemental sobre $\mathcal{D}$.*

Teorema 3.1.2. *Sean $f_1, \ldots, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones elementales, entonces existe un dominio $\mathcal{D}$, con $[a,b] \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, tal que todas las funciones dadas se extienden a funciones holomorfas elementales sobre $\mathcal{D}$.*

Prueba. Una función elemental f_i se extiende a una función meromorfa sobre un dominio $\mathcal{D}_i$. Como f_i es continua en $[a,b]$, entonces la extension no tiene polos en $[a,b]$ y como estos polos no son puntos de acumulación en $\mathcal{D}_i$, se tiene que para cada $x \in [a,b]$ existe una vecindad B_x centrada en x tal que B_x no contiene ningún polo de las funciones f_i. Luego,

$$\mathcal{D} = \bigcup_{x \in [a,b]} B_x$$

es un dominio que no contiene los polos de $f_1, \ldots, f_n$ y claramente $[a,b] \subset \mathcal{D}$. $\square$

Teorema 3.1.3. *La suma y el producto de funciones elementales sobre un intervalo $[a,b]$ es elemental, así como el cociente si el denominador no se anula en ningún punto de $[a,b]$.*

Prueba. Sean f, g funciones elementales sobre $[a,b]$, entonces por el teorema 3.1.2, se extienden a funciones holomorfas sobre un dominio D y de esta forma $f+g$, $f-g$, fg y f/g con $g \neq 0$ son continuas sobre $[a,b]$ y también se extienden sobre D. $\square$

Teorema 3.1.4. *La composición de funciones elementales es elemental.*

Prueba. Sean $f : [a, b] \to [c, d]$ y $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ funciones elementales. En efecto, f se extiende a una función elemental sobre un dominio complejo D_1 y g se extiende a una función elemental sobre un dominio complejo D_2. Claramente $[a, b] \subset D_1$ y $[c, d] \subset D_2$. Dado que f es una función holomorfa, no tiene polos en D_1 y es continua sobre su dominio, podemos suponer que $D_1 \subset f^{-1}(D_2)$. Aplicando el teorema 1.3.9, $f \circ g$ es elemental sobre D_1, condición suficiente para que $f \circ g$ sea elemental sobre el intervalo real $[a, b]$. □

Teorema 3.1.5. *Los polinomios con coeficientes reales son funciones elementales sobre cualquier intervalo $[a, b]$. Lo mismo sucede con los cocientes de polinomios cuyo denominador no es cero en $[a, b]$.*

Prueba. Un polinomio de la forma $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ se extiende a una función compleja del cuerpo $\mathbb{C}(z) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C})$ y, por el teorema 1.3.7, cualquier función de $\mathbb{C}(z)$ es elemental sobre $\mathbb{C}(z)$. Por el teorema 3.1.3, el cociente de funciones elementales (como los polinomios) es elemental. □

Teorema 3.1.6. *La función exponencial e^x es elemental en todo intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$.*

Prueba. La función e^x se extiende a $e^z \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Ahora, por la definición 1.3.1, tenemos que e^z es exponencial de la función z ya que $z' = \frac{(e^z)'}{e^z} = 1$. Como $z \in \mathbb{C}(z)$ es elemental, e^z también es elemental (por el teorema 1.3.5). □

Teorema 3.1.7. *La función logaritmo $\ln x$ es elemental en el intervalo $[a, b]$ donde $a > 0$.*

Prueba. La función $\ln x$ se extiende en el dominio complejo $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ a la función $\operatorname{Log} z$, basta probar que es elemental.

$$(\operatorname{Log} z)' = 1/z = z'/z$$

La función $\operatorname{Log} z$ es elemental porque es logaritmo de la función elemental z. □

Teorema 3.1.8. *Las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ son elementales en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$.*

Demostración. En efecto, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ pueden extenderse a las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ en el dominio $\mathbb{C}$.

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

La función $e^{\pm iz}$ es elemental porque es exponencial de la función $\pm iz$.

$$\frac{(e^{\pm iz})'}{e^{\pm iz}} = \pm i = (\pm iz)'$$

Por el teorema 3.1.3, $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ y $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ son elementales. □

Nota 3.1.9. Las funciones $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$ son elementales, usando las misma idea del teorema 3.1.8.

Teorema 3.1.10. *La función* $\arctan x$ *es elemental en cualquier intervalo.*

Prueba. Sea $\arctan x = \theta$ o $x = \tan\theta$. Debemos probar que la función arcotangente real se puede extender a una función meromorfa elemental sobre un dominio complejo. Si $\theta \in \mathbb{C}$ y $z = \tan\theta$ entonces,
$$z = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}{\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta}+e^{-i\theta})} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i\theta}-\frac{1}{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}} = -i\cdot\frac{\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{i\theta}}}{\frac{e^{2i\theta}+1}{e^{i\theta}}} = -i\cdot\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1},$$
por lo tanto, $z = -i\left(1-\frac{2}{e^{2i\theta}+1}\right) = -i+\frac{2i}{e^{2i\theta}+1}$ así, $z+i = \frac{2i}{e^{2i\theta}+1}$ y $e^{2i\theta}+1 = \frac{2i}{z+i}$, de esta forma,
$$e^{2i\theta} = \frac{2i}{z+i} - 1 = \frac{2i-(z+i)}{z+i} = \frac{i-z}{i+z}.$$

Por otra parte,
$$\frac{i-z}{i+z} = \frac{i-z}{i+z}\cdot\frac{i-\bar{z}}{i-\bar{z}} = \frac{i^2-i\bar{z}-iz+z\bar{z}}{i^2-i\bar{z}+iz-z\bar{z}} = \frac{-1-i(z+\bar{z})+|z|^2}{-1+i(z-\bar{z})-|z|^2} = \frac{1+i(z+\bar{z})-|z|^2}{1-i(z-\bar{z})+|z|^2}$$

Entonces,
$$\begin{aligned} e^{2i\theta} &= \frac{1+2i\Re(z)-|z|^2}{1-i(2i\Im(z))+|z|^2} \\ &= \frac{1+2i\Re(z)-|z|^2}{1+2\Im(z)+|z|^2} \\ &= \frac{1-|z|^2}{1+2\Im(z)+|z|^2} + i\left(\frac{2\Re(z)}{1+2\Im(z)+|z|^2}\right) \\ &= a+ib, \end{aligned}$$

donde $a = \Re(e^{2i\theta})$ y $b = \Im(e^{2i\theta})$. Para despejar θ se aplica la función Log del teorema 3.1.7 definida sobre el dominio complejo $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ para eliminar el exponencial. Vemos que el logaritmo principal no se puede aplicar cuando $a+bi \in (-\infty, 0]$ y esto solo se puede obtener cuando $b = 0$ (para ello, basta con que $\Re(z) = 0$) y $|z| \geq 1$. Por lo tanto, el dominio complejo donde todos sus valores tienen una parte real distinta de cero y una parte imaginaria con magnitud menor que uno es el apropiado para aplicar la función logaritmo.
$$e^{2i\theta} = \frac{i-z}{i+z}$$

$$\begin{aligned} 2i\theta &= \operatorname{Log}\left(\frac{i-z}{i+z}\right) \\ \theta &= \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{i-z}{i+z}\right), \text{ dividiendo por } 2i \\ \arctan z &= \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{i-z}{i+z}\right). \end{aligned}$$

Definida sobre el dominio complejo $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\Im(z)| < 1\}$. La función arcotangente se extiende a una version holomorfa sobre el plano complejo. En efecto, esta función extendida en $\mathbb{C}$ es elemental porque $\operatorname{Log}\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$ es logaritmo de la función elemental $(i-z)/(i+z)$:

$$\frac{\left(\frac{i-z}{i+z}\right)'}{\frac{i-z}{i+z}} = \frac{\frac{-2i}{(i+z)^2}}{\frac{i-z}{i+z}} = -\frac{2i}{(i-z)(i+z)} = -\frac{2i}{i^2-z^2} = \frac{2i}{-i^2+z^2} = \frac{2i}{1+z^2} = \left[\operatorname{Log}\left(\frac{i-z}{i+z}\right)\right]'.$$

□

A su vez, las funciones $\operatorname{arc\,sen} x$ y $\arccos x$ son elementales por el teorema 3.1.10.

FUNCIONES ELEMENTALES EN $[a,b]$	**CONDICIONES**	**TEOREMA**
$f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g con $g\neq 0$	f y g elementales	3.1.3
$f\circ g$	f y g elementales	3.1.4
$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$		3.1.5
e^x		3.1.6
$\ln x$		3.1.7
$\operatorname{sen} x$ y $\cos x$		3.1.8
$\arctan x$		3.1.10

Cuadro 3.1: Funciones elementales reales.

3.2. Algunas primitivas no elementales

Las integrales analizadas en esta sección corresponden a funciones sobre el plano real $\mathbb{R}^2$. Para determinar si estas funciones no tienen primitiva elemental, deben extenderse a una función meromorfa-elemental sobre $\mathbb{C}$ para aplicar los teoremas. Si la integral compleja no es elemental entonces la integral real tampoco es elemental.

Proposición 3.2.1. *La integral* $\int x^{2n}e^{ax^2}\,dx$*, para* n *entero y* $a\neq 0$*, no es elemental.*

Prueba. Para demostrar que la integral no es elemental, la función $x^{2n}e^{ax^2}$ se extenderá en el cuerpo $\mathbb{C}$ y se aplicara el teorema 2.2.1. Supongamos que la función $z^{2n}e^{az^2} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ tiene primitiva elemental. Existe una función racional $R = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(z)$ tal que

$$z^{2n} = R' + g'R = \left(\frac{P}{Q}\right)' + (az^2)'\frac{P}{Q} = \frac{P'Q + PQ' + 2azPQ}{Q^2}.$$

Por lo tanto,

$$z^{2n}Q^2 = P'Q + PQ' + 2azPQ \quad \text{luego } Q(z^{2n}Q - P' - 2azP) = PQ'.$$

Ahora, supongamos que Q tiene una raíz $\alpha \in \mathbb{C}$ de multiplicidad $r \geq 1$, es decir, $Q(z) = (z-\alpha)^r E(z)$ donde $E(\alpha) \neq 0$. El miembro izquierdo de la ecuación se puede reescribir como $(z-\alpha)^{r+s}N(z)$ donde $s > 0$ y $N(\alpha) \neq 0$, es decir, α es raíz de multiplicidad $r+s$. Lo mismo debe suceder en el miembro derecho, pero eso no es cierto porque la multiplicidad de α en PQ' es $r-1$. Llegamos a una contradicción, por lo tanto, α tiene multiplicidad 0 y Q es constante. Sea $Q := k \in \mathbb{C} - \{0\}$. Reemplazando en la ecuación obtenemos,

$$\begin{aligned} k(z^{2n}k - P' - 2azP) &= Pk' \\ k(z^{2n}k - P' - 2azP) &= 0 \\ z^{2n}k - P' - 2azP &= 0 \end{aligned}$$

Despejando el primer sumando,

$$z^{2n}k = P' + 2azP. \tag{3.2.1}$$

El grado del polinomio derecho debe ser igual a $2n$, por lo tanto, $\deg(P) = 2n-1$. Tomando

$$P(z) = \sum_{i=0}^{2n-1} c_i z^i.$$

Derivando,

$$P'(z) = \sum_{i=0}^{2n-1} ic_i z^{i-1}.$$

Sustituyendo en (3.2.1),

$$\begin{aligned} z^{2n}k &= \sum_{i=0}^{2n-1} ic_i z^{i-1} + 2az\left(\sum_{i=0}^{2n-1} c_i z^i\right) \\ &= 0 + c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \cdots + (2n-1)c_{2n-1}z^{2n-2} + \sum_{i=0}^{2n-1} 2ac_i z^{i+1} \end{aligned}$$

$$= c_1 + \sum_{i=1}^{2n-2}(i+1)c_{i+1}z^i + \sum_{i=1}^{2n} 2ac_{i-1}z^i$$
$$= c_1 + \left(\sum_{i=1}^{2n-2}[(i+1)c_{i+1}z^i + 2ac_{i-1}z^i]\right) + 2ac_{2n-2}z^{2n-1} + 2ac_{2n-1}z^{2n}.$$

En el miembro izquierdo tenemos un sumando de grado $2n$ y en el derecho, únicamente, $2ac_{2n-1}z^{2n}$ luego $c_{2n-1} = \frac{k}{2a}$. Evidentemente,

$$c_1 = c_{2n-2} = (i+1)c_{i+1}z^i + 2ac_{i-1}z^i = 0 \quad \text{donde } 1 \leq i \leq 2n-2.$$

Supongamos que $i = 2$ entonces $3c_3z^2 + 2ac_1z^2 = 0$, luego $c_3 = 0$. Por otra parte, si $i = 4$ entonces $5c_5z^4 + 2ac_3z^4 = 0$, luego $c_5 = 0$. Inductívamente obtenemos, $c_5, c_7, \ldots, c_{2n-1} = 0$. Llegamos a una contradicción ya que $c_{2n-1} = \frac{k}{2a} \neq 0$, por lo tanto, $P(z)$ no existe y, por consiguiente, no existe $R(z)$ que satisface la ecuación del teorema 2.2.1. De tal forma que $\int z^{2n}e^{az^2}dz$ no es elemental sobre $\mathbb{C}$, condición suficiente para que no sea elemental sobre $\mathbb{R}$. □

Proposición 3.2.2. *Si $g(x)$ es un polinomio de grado mayor o igual a dos, la integral $\displaystyle\int e^{g(x)}dx$ no es elemental.*

Prueba. Supongamos que la integral $\int e^{g(z)}dz$ es elemental. Por el teorema 2.2.1, existe una función $R(z)$ racional tal que $f(z) = R'(z) + R(z)g'(z)$. En este caso, $f(z) = 1$ y $g(z)$ es un polinomio de grado mayor o igual a dos, entonces, $1 = R' + Rg'$. Dado que $R(z) \in \mathbb{Q}(z)$, se puede expresar como el fraccionario irreducible $\frac{P(z)}{Q(z)}$. Luego,

$$1 = \left(\frac{P}{Q}\right)' + \left(\frac{P}{Q}\right)g'$$
$$1 = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2} + \frac{Pg'}{Q}$$
$$1 = \frac{P'Q - PQ' + PQg'}{Q^2}$$
$$Q^2 = P'Q + PQg' - PQ'$$

Ya que $Q|(P'Q + PQg')$ entonces $Q|PQ'$. Como $mcd(P, Q) = 1$, entonces se puede afirmar que $Q|Q'$ pero esto solo es posible si Q es un polinomio constante que llamaremos k. Ahora,

$$1 = R' + Rg'$$
$$1 = \left(\frac{P}{k}\right)' + \left(\frac{P}{k}\right)g'$$

$$1 = \frac{1}{k}P' + \frac{1}{k}Pg'$$
$$k = P' + Pg'$$

Evidentemente, g' es un polinomio de grado mayor o igual a uno, al igual que P. Por lo tanto, $P' + Pg'$ no es un polinomio constante y no puede ser igual a k, esto contradice la suposición inicial y demuestra que la integral $\int e^{g(z)}dz$ no es elemental. $\square$

La siguiente proposición es la generalización de un resultado incluido dentro de la bibliografía principal (véase [8] p.1,16).

Proposición 3.2.3. *La integral* $\displaystyle\int \frac{e^{kx}}{x^n}dx$, *con* $n \in \mathbb{Z}^+$ *y* $k \neq 0$ *constante, no es elemental.*

Prueba. Supongamos que $\displaystyle\int \frac{e^{kz}}{z^n}dx$ es elemental. Aplicando el teorema 2.2.1, existe una función $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ con $\operatorname{mcd}(P,Q) = 1$ tal que $f(z) = R'(z) + R(z)g'(z)$. En este caso, $f(z) = \dfrac{1}{z^n}$ y $g(z) = kz$.

$$\frac{1}{z^n} = \left(\frac{P}{Q}\right)' + \left(\frac{P}{Q}\right)g' = \frac{P'Q - PQ' + kPQ}{Q^2}.$$

De esta forma obtenemos

$$Q^2 = z^n(P'Q - PQ' + kPQ) = z^nP'Q - z^nPQ' + kz^nPQ$$

y por lo tanto

$$Q(Q - z^nP' - kz^nP) = -z^nPQ' \tag{3.2.2}$$

Supongamos que Q posee una raíz $\alpha \in \mathbb{C}$ no nula de multiplicidad $r \geq 1$, tenemos

$$Q(z) = (z-\alpha)^rS(z), \text{ con } S(\alpha) \neq 0.$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.2.2) es

$$(z-\alpha)^rS(Q - z^nP' - kz^nP) = (z-\alpha)^{r+m}N \text{ para algún } N \in \mathbb{C}[z] \text{ tal que } N(\alpha) \neq 0 \text{ y } m \geq 0.$$

Y el lado derecho de la ecuación 3.2.2 es:

$$-z^n[(z-\alpha)^rS]'P = (-z^nP)[r(z-\alpha)^{r-1}S + (z-\alpha)^rS'] = (-z^nP)(z-\alpha)^{r-1}[rS + (z-\alpha)S'].$$

Ordenando los factores se tiene

$$(z-\alpha)^{r-1}[rS + (z-\alpha)S'](-z^nP) = (z-\alpha)^{r-1}D \text{ para algún } D \in \mathbb{C}[z] \text{ tal que } D(\alpha) \neq 0$$

Igualando los lados izquierdo y derecho, la ecuación (3.2.2) es

$$(z-\alpha)^{r+m}N(z) = (z-\alpha)^{r-1}D(z),$$

con $N(\alpha) \neq 0$ y $D(\alpha) \neq 0$. Esto es una contradicción, porque las multiplicidades son distintas y concluimos que Q posee una raíz compleja nula $\alpha = 0$. Entonces Q es de la forma cz^r para algún $c \in \mathbb{R}$. De esta forma de la ecuación (3.2.2) toma la forma

$$cz^r(cz^r - z^nP' - kz^nP) = -z^nP(cz^r)'$$

Luego,

$$cz^{2r} - z^{r+n}(P' + kP) = -(z^nP)(rz^{r-1}). \tag{3.2.3}$$

Sea $d = \text{mín}\{r, n\}$ entonces

$$z^{r+d}[cz^{r-d} - z^{n-d}(P' + kP)] = -rz^{r+n-1}P.$$

El grado de los polinomios en ambos lados de la ecuación coincide si $r+d = r+n-1$ o $d = n-1$. Esto quiere decir que $\text{mín}\{r, n\} = n-1$ y, como única opción, tenemos que $r = n-1$. Reemplazando en la ecuación (3.2.3) obtenemos,

$$cz^{2(n-1)} - z^{(n-1)+n}(P' + kP) = -(n-1)z^{(n-1)+n-1}P$$

así $cz^{2n-2} - z^{2n-1}(P' + kP) = (1-n)z^{2n-2}P$, y cancelando z^{2n-2} en ambos lados de la igualdad tenemos

$$c - z(P' + kP) = (1-n)P.$$

Sea $\gamma := 1-n$ entonces

$$c - z(P' + kP) = \gamma P$$

y despejando c tenemos

$$c = \gamma P + z(P' + kP).$$

Sea $P(z) = \sum_{i=0}^{\ell} a_i z^i$ un polinomio de grado ℓ. Por lo tanto, la expresión

$$\gamma P + z(P' + kP)$$

tiene grado $l+1$ y es igual al grado del polinomio constante c es decir $l+1 = 0$, lo cual es contradictorio. En conclusion, $f(z) = R'(z) + R'(z)g'(z)$ no tiene solución $R(z)$ en el cuerpo de funciones racionales sobre $\mathbb{C}$ y, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, la integral $\displaystyle\int \frac{e^{kz}}{z^n}\,dz$ no es elemental. $\square$

Proposición 3.2.4. *La integral* $\displaystyle\int e^{e^x}\,dx$ *no es elemental.*

Prueba. Sea $t = e^x$. Entonces $dt = e^x\,dx = t\,dx$, luego, $dx = t^{-1}\,dt$. Sustituyendo tenemos $\displaystyle\int e^t \frac{dt}{t}$, integral que no es elemental por la proposición 3.2.3. $\square$

Proposición 3.2.5. *La integral* $\int \sqrt{\ln x}\,dx$ *no es elemental.*

Prueba. Sea $t^2 = \ln x$, $2t\,dt = \frac{dx}{x}$ luego $dx = 2tx\,dt = 2te^{t^2}\,dt$. Entonces,

$$\int \sqrt{\ln x}\,dx = \int 2t^2 e^{t^2}\,dt$$

Integral que no se puede expresar en términos elementales por la proposición 3.2.1. $\square$

Proposición 3.2.6. *La integral* $\int \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}\,dx$ *no es elemental.*

Prueba. Análogamente, tomando $t^2 = \ln x$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\,dx = \int 2e^{t^2}\,dt.$$

Por la proposición 3.2.2, la integral no es elemental. $\square$

Proposición 3.2.7. *La integral* $\int \dfrac{e^{ax}}{\sqrt{x}}\,dx$ *no es elemental.*

Prueba. Sea $u^2 = x$, $2u\,du = dx$ entonces $\int \dfrac{e^{ax}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \dfrac{e^{au^2}}{u}\cdot 2u\,du = \int 2e^{au^2}du$. Dado que la función e^{au^2} no tiene primitiva elemental, la integral no se puede expresar en términos elementales. $\square$

Proposición 3.2.8. *La integral* $\int \sqrt{x}e^{ax}\,dx$ *no es elemental.*

Prueba. De igual manera, tomando $u^2 = x$ obtenemos

$$\int \sqrt{x}e^{ax}\,dx = \int 2u^2 e^{au^2}\,du$$

Por la proposición 3.2.1, no es elemental. $\square$

El siguiente resultado es una generalización (véase [7] pag 302 e. 10).

Proposición 3.2.9. *La integral* $\displaystyle\int \frac{1}{\ln^n(cy^k)}dy$ *no es elemental para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$ *y* $c, k \neq 0$ *constantes.*

Prueba. Probamos la no-elementaridad de la integral compleja $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{Log}^n(cw^k)}dw$. Sea $z = \sqrt[k]{c}\,w$ entonces $dz = \sqrt[k]{c}\,dw$ o $dw = \frac{dz}{\sqrt[k]{c}}$.

$$\int \frac{1}{\operatorname{Log}^n(cw^k)}dw = \int \frac{1}{\operatorname{Log}^n(\sqrt[k]{c}\,w)^k}dw = \int \frac{1}{k^n \operatorname{Log}^n(\sqrt[k]{c}\,w)}dw = \frac{1}{k^n}\int \frac{1}{\operatorname{Log}^n z}\cdot\frac{dz}{\sqrt[k]{c}}.$$

Sea $\gamma := \dfrac{1}{\sqrt[k]{c}\,k^n}$, tenemos

$$\gamma \int \frac{1}{\operatorname{Log}^n z}dz.$$

Sea $t = \operatorname{Log} z$. Derivando se obtiene $dt = \dfrac{1}{z}dz$ y $dz = zdt$. Por otra parte, $e^t = z$ y $dz = e^t dt$

$$\gamma \int \frac{1}{\operatorname{Log}^n z}dz = \gamma \int \frac{1}{t^n}e^t dt$$

Integral que no es elemental por la proposición 3.2.3, por lo tanto, $\displaystyle\int \frac{1}{\ln^n(cy^k)}dy$ no es elemental. ☐

El siguiente resultado es una nueva generalización (véase [7] pag 302 e. 11).

Proposición 3.2.10. *La integral* $\displaystyle\int \ln^n(\ln cy^k)dy$ *no es elemental para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$ *y* $c, k \neq 0$ *constante.*

Prueba. La integral se puede reescribir como $\frac{1}{\sqrt[k]{c}}\int \ln^n(k\ln x)dx$ sustituyendo por $x = \sqrt[k]{c}\,y$. En particular, demostraremos que la integral compleja $\int \operatorname{Log}^n(k\operatorname{Log} z)dz$ no es elemental. Usando el principio de inducción fuerte.

(i) Probamos la base inductiva $n = 1, 2 \in \mathbb{Z}^+$. Cuando $n = 1$, se tiene la integral $\int \operatorname{Log}(k\operatorname{Log} z)dz$ y se aplica integración por partes de la siguiente forma: sean $u = \operatorname{Log}(k\operatorname{Log} z)$ y $dv = dz$. Entonces $du = \frac{1}{z\operatorname{Log} z}$ y $v = z$. Sustituyendo se obtiene

$$\int \operatorname{Log}(k\operatorname{Log} z)dz = z\operatorname{Log}(k\operatorname{Log} z) - \int \frac{1}{\operatorname{Log} z}dz$$

Pero la función $\frac{1}{\operatorname{Log} z}$ no tiene primitiva elemental por la proposición 3.2.9. Por lo tanto, la integral (para $n = 1$) no es elemental. Cuando $n = 2$, se tiene la integral $\int \operatorname{Log}^2(k\operatorname{Log} z)dz$ y, para la integración por partes, aplicamos $u = \operatorname{Log}^2(k\operatorname{Log} z)$ y $dv = dz$ para obtener $du = \frac{2\operatorname{Log}(k\operatorname{Log} z)}{z\operatorname{Log} z}dz$ y $v = z$. Sustituyendo,

$$\int \operatorname{Log}^2(k\operatorname{Log} z)dz = z\operatorname{Log}^2(k\operatorname{Log} z) - 2\int \frac{1}{\operatorname{Log} z}\cdot\operatorname{Log}(k\operatorname{Log} z)dz$$

Pero al aplicar integración por partes nuevamente, las integrales $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{Log} z} dz$ y $\int \operatorname{Log}(k \operatorname{Log} z) dz$ (caso anterior) no son elementales. Por lo tanto, la integral (para $n = 2$) no es elemental.

(ii) Supongamos que la proposición (hipótesis inductiva) vale para $1, 2, \ldots, n \in \mathbb{Z}^+$, es decir,

$$\int \operatorname{Log}^j(k \operatorname{Log} z) dz \quad \text{con } 1 \leq j \leq n.$$

Probemos que se cumple para $n + 1$. Aplicando integración por partes de la misma forma que en el paso (i), tomando $u = \operatorname{Log}^{n+1}(k \operatorname{Log} z)$ y $dv = dz$ para obtener $du = \frac{(n+1) \operatorname{Log}^n(k \operatorname{Log} z)}{z \operatorname{Log} z} dz$ y $v = z$.

$$\int \operatorname{Log}^{n+1}(k \operatorname{Log} z) dz = z \operatorname{Log}^{n+1}(k \operatorname{Log} z) - (n+1) \int \frac{1}{\operatorname{Log} z} \cdot \operatorname{Log}^n(k \operatorname{Log} z) dz.$$

Al integrar por partes, cualquier elección del factor dv involucra una integral con exponente $j \leq n$ que, a su vez, no es elemental por la hipótesis inductiva. Por lo tanto, la integral con exponente $n + 1$ no es elemental.

Por lo tanto, la proposición es cierta para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ $\square$

El siguiente resultado es una forma canónica que esta relacionada con las anteriores proposiciones.

Proposición 3.2.11. *La integral* $\displaystyle\int e^{\alpha x} \ln^n(\beta x) dx$ *no es elemental para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$ *y* $\alpha, \beta \neq 0$ *constantes.*

Prueba. La integral compleja $\displaystyle\int e^{\alpha z} \operatorname{Log}^n(\beta z) dz$ extiende a la primitiva de la función real $e^{\alpha x} \ln^n(\beta x)$. Sea $t = e^{\alpha z}$. Entonces, $\alpha z = \operatorname{Log} t$, $z = \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} t$. Por lo tanto, $\beta z = \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Log} t$. Tomando $\gamma := \frac{\beta}{\alpha}$, $\beta z = \gamma \operatorname{Log} t$. Por otra parte, $dz = \dfrac{dt}{\alpha t}$. Obtenemos

$$\int t \operatorname{Log}^n(\gamma \operatorname{Log} t) \frac{dt}{\alpha t} = \frac{1}{\alpha} \int \operatorname{Log}^n(\gamma \operatorname{Log} t) dt.$$

Por la proposición 3.2.10, la integral resultante no es elemental. $\square$

Proposición 3.2.12. *La integral* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ *no es elemental.*

Prueba. Para ver que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no posee primitiva elemental basta probar que la extensión compleja meromorfa $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ no posee primitiva elemental. Supongamos que existe $H(z)$ elemental tal que, $H'(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$. Entonces la función $F(z) := -2iH(iz)$ seria elemental. Como se tiene que

$$F'(z) = 2H'(iz) = 2\frac{\operatorname{sen} iz}{iz} = \frac{e^z - e^{-z}}{z}.$$

Si tomamos $t = e^z$ y $\alpha = \dfrac{t - t^{-1}}{z} = -\dfrac{1}{z}t^{-1} + \dfrac{1}{z}t$, podemos aplicar el teorema 2.2.2, de esta forma existen $b_{-1}, b_1 \in \mathbb{C}(z)$ tales que

$$\frac{1}{z} = b_1' + b_1 \quad \text{y} \quad -\frac{1}{z} = b_{-1}' - b_{-1}.$$

Pero la ecuación

$$\frac{1}{z} = b_1' + b_1 \tag{3.2.4}$$

no tiene solución y se demostrará a continuación.

Sea $b_1 := \dfrac{P}{Q}$ donde $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, $\deg(P) = n$ y $\deg(Q) = m$. Despejando b_1' y dividiendo por b_1 en la ecuación 3.2.4 obtenemos

$$\frac{b_1'}{b_1} = \frac{1}{zb_1} - 1.$$

Sustituyendo se tiene

$$\frac{1}{z\left(\dfrac{P}{Q}\right)} - 1 = \frac{Q}{zP} - 1 = \frac{Q - zP}{zP}.$$

Sea $T := Q - zP$ un polinomio en $\mathbb{C}[z]$. Entonces,

$$\frac{b_1'}{b_1} = \frac{T}{zp}.$$

Utilizando el algoritmo de la division podemos encontrar polinomios c y r tales que

$$\frac{T}{zP} = c + \frac{r}{zP} \qquad \text{y por tanto } \frac{b_1'}{b_1} = c + \frac{r}{zP}. \tag{3.2.5}$$

donde $r = 0$ o $\deg(r) < \deg(zP) = n + 1$. Por otra parte,

$$\frac{b_1'}{b_1} = \frac{\dfrac{P'Q - PQ'}{Q^2}}{\dfrac{PQ}{}} = \frac{P'Q - PQ'}{PQ}. \tag{3.2.6}$$

Igualando las ecuaciones (3.2.5) y (3.2.6) obtenemos,

$$c + \frac{r}{zP} = \frac{T}{zP} = \frac{P'Q - PQ'}{PQ}$$

Despejando el polinomio c

$$c = \frac{P'Q - PQ'}{PQ} - \frac{r}{zP} = \frac{zP'Q - zPQ'}{zPQ} - \frac{rQ}{zPQ} = \frac{zP'Q - zPQ' - rQ}{zPQ}$$

Dado que $zPQ \neq 0$,

$$czPQ = zP'Q - zPQ' - rQ \quad \text{luego } zPQ' = zP'Q - rQ - czPQ.$$

De esto, se sigue que

$$zPQ' = zP'Q - rQ - czPQ = Q(zP' - r - czP)$$

Finalmente, se procede a analizar el grado de los polinomios que componen la igualdad.

$$\deg(zPQ') = \deg(Q(zP' - r - czP)) = \deg(Q) + \deg(zP' - r - czP)$$

Pero notemos que $\deg(zP' - r - czP) = \deg(czP)$, con lo cual

$$\begin{aligned}\deg(Q) + \deg(zP' - r - czP) &= m + \deg(czP)\\ &= m + \deg(c) + \deg(z) + \deg(P)\\ &= m + 1 + n + \deg(c),\end{aligned}$$

además

$$\deg(zPQ') = \deg(z) + \deg(P) + \deg(Q') = 1 + n + m - 1 = n + m,$$

de esta forma $m + n = m + n + 1 + \deg(c)$, y por tanto $1 + \deg(c) = 0$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el teorema 2.2.2 no se puede aplicar, y la función F no es elemental, esto implica que H no es elemental. □

Proposición 3.2.13. *La integral* $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x} dx$ *no es elemental.*

Prueba. La demostración sigue la misma idea aplicada en la proposición 3.2.12. En este caso, al definir las funciones $H'(z) := \dfrac{\cos z}{z}$ y $F'(z) = 2iH'(iz)$ y aplicar el teorema 2.2.2 obtenemos las ecuaciones

$$\frac{1}{z} = b_1' + b_1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{z} = b_{-1}' - b_{-1}$$

con $b_{-1}, b_1 \in \mathbb{C}(z)$. Pero la primera ecuación no tiene solución (como se había visto anteriormente), por lo tanto, la función F no es elemental y, a su vez, $H = \displaystyle\int \frac{\cos x}{x} dx$ no es elemental. □

Proposición 3.2.14. *La integral* $\int \cos x \ln x \, dx$ *no es elemental.*

Prueba. Haciendo una sustitución por partes a la integral $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$, tomamos $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = \frac{1}{x}$ y obtenemos

$$\int \frac{senx}{x} dx = \operatorname{sen} x \ln x - \int \cos x \ln x \, dx$$

Con un pequeño despeje vemos que $\int \cos x \ln x \, dx$ equivale a $\operatorname{sen} x \ln x - \int \dfrac{senx}{x} dx$ que no es elemental por la proposición 3.2.12. □

Proposición 3.2.15. *La integral* $\int \operatorname{sen} x \ln x \, dx$ *no es elemental.*

Prueba. Se sigue el procedimiento anterior, tomando la integral de la función $\dfrac{cosx}{x} dx$. □

Proposición 3.2.16. *Sea* $p \in \mathbb{R}[x]$ *donde* $\deg(p) \geq 2$. *Las integrales*

$$\int \operatorname{sen} p(x) dx \quad y \quad \int \cos p(x) dx.$$

no son elementales.

Prueba. En principio, se extienden las funciones en un dominio complejo, obteniendo así, las funciones holomorfas $\operatorname{sen} p(z)$ y $\cos p(z)$ en un dominio complejo. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} p(z) = \frac{e^{ip(z)} - e^{-ip(z)}}{2i} \quad \text{y} \;\; \cos p(z) = \frac{e^{ip(z)} + e^{-ip(z)}}{2}.$$

Sea $g(z) = if(z)$. Multiplicando por $2i$ y 2 respectivamente

$$2i \operatorname{sen} p(z) = e^{g(z)} - e^{-g(z)} \quad \text{y } 2 \cos p(z) = e^{g(z)} + e^{-g(z)}.$$

Basta con analizar $\alpha = e^{g(z)} \pm e^{-g(z)}$ a partir del teorema 2.2.2 siendo $t = e^g$. Por tanto $\alpha = t \pm t^{-1}$ y existe $b_1 \in \mathbb{C}(z)$ tal que

$$b_1 + b_1 g' = 1.$$

Pero la ecuación no tiene solución, previamente demostrado en la proposición 3.2.2. Por lo tanto, α no tiene primitiva elemental y, a su vez, las funciones $\operatorname{sen} p(x)$ y $\cos p(x)$. □

Proposición 3.2.17. *Sea* $p(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ *con* $a_i \neq 0$. *La integral*

$$\int \frac{\ln x}{p(x)} dx$$

no es elemental.

Prueba. Supongamos que la función meromorfa $\frac{\operatorname{Log} z}{p(z)}$ tiene primitiva elemental. Aplicando el teorema 2.2.3, existe una función R tal que

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{c}{z} + R'.$$

Por lo tanto,

$$R' = \frac{1}{p(z)} - \frac{c}{z}.$$

Integrando los miembros de la igualdad

$$R = \int \frac{1}{p(z)} dz - \int \frac{c}{z} dz = \int \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)} dz - c \operatorname{Log} z.$$

Usando la siguiente identidad (véase [6])

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{z-\beta_j} \quad \text{donde } c_j = \frac{A(\beta_j)}{\prod\limits_{\substack{k \neq j \\ 1 \leq k \leq n}} (\beta_j - \beta_k)} = \frac{A(\beta_j)}{B'(\beta_j)},$$

donde $A(z)$ y $B(z)$ son polinomios con $\deg(A(z)) < \deg(B(z))$. Escrito de otra forma

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A(\beta_j)}{B'(\beta_j)} \cdot \frac{1}{(z-\beta_j)}.$$

Tomando $A(z) = 1$ y $B(z) = p(z)$ obtenemos

$$R = \int \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p'(\alpha_j)} \cdot \frac{1}{(z-\alpha_j)} dz - C \operatorname{Log} z = \sum_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{Log}(z-\alpha_j)}{p'(\alpha_j)} - c \operatorname{Log} z + \hat{k}.$$

Llegando a una contradicción ya que R no es racional, por lo tanto, la integral no es elemental. □

Proposición 3.2.18. *La integral* $\int \operatorname{arcsec}^2 x\, dx$ *no es elemental.*

Prueba. Debemos demostrar que la integral compleja $\int \operatorname{arcsec}^2 z dz$ no es elemental. Sustituyendo por partes con las variables $u = \operatorname{arcsec}^2 z$, $du = \frac{2 \operatorname{arcsec} z}{z\sqrt{z^2-1}}$ y $v = z$ se obtiene

$$\int \operatorname{arcsec}^2 z dz = uv - \int v du = (z \operatorname{arcsec}^2 z) - 2 \int \frac{\operatorname{arcsec} z}{\sqrt{z^2-1}} dz.$$

Haciendo $t = \operatorname{arcsec} z$, $dt = \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}}$, tenemos que

$$dz = z\sqrt{z^2-1}dt = (\sec t)\sqrt{z^2-1}dt$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}(z \operatorname{arcsec}^2 z) - 2\int \frac{\operatorname{arcsec} z}{\sqrt{z^2-1}}dz &= (z \operatorname{arcsec}^2 z) - 2\int \frac{t}{\sqrt{z^2-1}} \cdot (\sec t)\sqrt{z^2-1}dt \\ &= (z \operatorname{arcsec}^2 z) - 2\int t \sec t dt.\end{aligned}$$

Como $\sec t = \dfrac{2}{e^{-it}+e^{it}}$,

$$\begin{aligned}(z \operatorname{arcsec}^2 z) - 2\int t \sec t dt &= (z \operatorname{arcsec}^2 z) - 2\int t\frac{2}{e^{-it}+e^{it}}dt \\ &= (z \operatorname{arcsec}^2 z) - 4\int \frac{t}{e^{-it}+e^{it}}dt\end{aligned}$$

Sea $\theta = e^{it}$ entonces $t = -i \operatorname{Log}\theta$ y $dt = \frac{-i}{\theta}d\theta$. Reemplazando, obtenemos

$$(z \operatorname{arcsec}^2 z) - 4\int \frac{t}{e^{-it}+e^{it}}dt = (z \operatorname{arcsec}^2 z) - 4\int \frac{-i \operatorname{Log}\theta}{\theta^{-1}+\theta} \cdot \frac{-i}{\theta}d\theta$$

Luego,

$$\int \operatorname{arcsec}^2 z dz = (z \operatorname{arcsec}^2 z) + 4\int \frac{\operatorname{Log}\theta}{1+\theta^2}d\theta.$$

Pero la integral resultante no es elemental, por la proposición 3.2.17. Por lo tanto, la función $\operatorname{arcsec}^2 x$ no posee primitiva elemental. □

En el pasado procedimiento, se pudo observar que la integral $\int t \sec t\, dt$ era la consecuencia de la aparición clara de una integral no elemental relacionada con las proposiciones anteriores, por lo tanto, esta integral sera incluida en la tabla final.

Proposición 3.2.19. *La integral* $\int \operatorname{arccsc}^2 x\, dx$ *no es elemental.*

Prueba. La prueba se sigue de la proposición 3.2.18 donde aparecerá la integral $\int t \csc t\, dt$. □

El siguiente teorema garantiza la falta de primitiva elemental de ciertas funciones algebraicas acompañadas por un radical. Sin embargo su utilidad se evidenciara en ciertas integrales de funciones trigonométricas (véase [7] página 305).

Teorema 3.2.20 (Teorema de Chebyshev)**.** *Sean* $p, q, r \in \mathbb{Q}$ *y* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a, b, r \neq 0$ *entonces* $\int x^p(a+bx^r)^q\, dx$ *es elemental si y solo si* $\frac{p+1}{r}$*,* q *o* $\frac{p+1}{r}+q$ *es un entero.*

Proposición 3.2.21. *La integral* $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx$ *y* $\int \sqrt{\cos x}\, dx$ *no es elemental.*

Prueba. Sea $u = \operatorname{sen} x$. Entonces $dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$ y

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx = \int u^{1/2}(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\, du$$

Aplicando el teorema de Chevishev con $p = 1/2, q = -1/2, r = 2$, vemos que los numeros $\frac{p+1}{r}$, q y $\frac{p+1}{r}+q$ no son enteros, por lo tanto, la función $\sqrt{\operatorname{sen} x}$ no tiene primitiva elemental. Análogamente, la función $\sqrt{\cos x}$ no tiene primitiva elemental. $\square$

No se puede decir lo mismo de $\int \sqrt{\tan x}\, dx$ ya que posee primitiva elemental. Tomando $u = \sqrt{\tan x}$, $\arctan(u^2) = x$ luego $dx = 2u(1+u^4)^{-1}du$. Por lo tanto,

$$\int \sqrt{\tan x}\, dx = 2\int u^2(1+u^4)^{-1}\, dx.$$

En este caso, la potencia q del polinomio $1+u^4$ es -1 entero, por lo tanto, se cumple el teorema de Chevishev afirmativamente.

Proposición 3.2.22. *La integral* $\int \sqrt{\operatorname{arc\,sen} x}\, dx$ *no es elemental.*

Prueba. Sea $u^2 = \operatorname{arc\,sen} x$, $x = \operatorname{sen}(u^2)$, $dx = 2u\cos(u^2)du$. Por lo tanto,

$$\int \sqrt{\operatorname{arc\,sen} x}\, dx = 2\int u^2\cos(u^2)\, du$$

Esta integral no se puede expresar en funciones elementales, ya que cualquier sustitución involucra a la integración de las funciones $\operatorname{sen}(u^2)\, du$ y $\cos(u^2)\, du$, las cuales, no tienen primitiva elemental. $\square$

Proposición 3.2.23. *La integral* $\int \sqrt{\arccos x}\, dx$ *no es elemental.*

Prueba. Análogamente a la proposición 3.2.22, tomando $u^2 = \arccos x$. $\square$

A partir de todas las funciones trabajadas podemos abstraer otras integrales no elementales. En este caso, analizando la no-elementaridad de las funciones inversas se pueden obtener nuevos resultados. Sean f y f^{-1} funciones sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces,

$$\int f(x)\, dx = xf(x) - \int xf'(x)\, dx = xf(x) - \int f^{-1}(f(x))f'(x)\, dx = xf(x) - G(f(x))$$

donde $G(x) = \int f^{-1}(x)\, dx$.

Teorema 3.2.24. *Si f y f^{-1} son funciones elementales sobre algún intervalo cerrado entonces $\int f(x)\,dx$ es elemental si y solo si $\int f^{-1}(x)\,dx$ es elemental.*

A partir de esto, se obtienen los siguientes resultados.

Proposición 3.2.25. *La integral $\int e^{e^{\sqrt[n]{x}}}\,dx$ no es elemental.*

Prueba. La función $e^{e^{\sqrt[n]{x}}}$ tiene inversa, es $\ln^n(\ln x)$ cuya primitiva no es elemental por la proposición 3.2.10. $\square$

Proposición 3.2.26. *La integral $\int e^{\frac{1}{\sqrt[n]{x}}}\,dx$*

Prueba. La función $e^{\frac{1}{\sqrt[n]{x}}}$ es inversa de $\dfrac{1}{\ln^n x}$ que no tiene primitiva elemental por la proposición 3.2.9. $\square$

Proposición 3.2.27. *La integral $\int \sec(\sqrt{x})\,dx$ no es elemental.*

Prueba. La proposición 3.2.18 muestra que la función $\operatorname{arcsec}^2 x$ no tiene primitiva elemental y, a su vez, su inversa es $\sec\sqrt{x}$. $\square$

Proposición 3.2.28. *La integral $\int \csc(\sqrt{x})\,dx$ no es elemental.*

Prueba. Si $f(x) = \csc(\sqrt{x})$, $f^{-1} = \operatorname{arccsc}^2 x$. Por la proposición 3.2.19, la función inversa no es elemental. $\square$

Proposición 3.2.29. *Las integrales $\int \operatorname{arc\,sen}(x^2)\,dx$ y $\int \operatorname{arc\,cos}(x^2)\,dx$ no son elementales.*

Prueba. Ya que sus funciones inversas son $\sqrt{\sin x}$ y $\sqrt{\cos x}$, la proposición 3.2.21 indica que no tienen primitiva elemental. $\square$

FUNCIONES SIN PRIMITIVA ELEMENTAL	**CRITERIO**
$\dfrac{e^{kx}}{x^n}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $k \neq 0$	Proposición 3.2.3
$x^{2n}e^{ax^2}$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$	Proposición 3.2.1
$e^{p(x)}$ con $deg(p(x)) \geq 2$	Proposición 3.2.2
e^{e^x}	Proposición 3.2.4
$\dfrac{1}{\ln^n cy^k}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $c, k \neq 0$ constantes	Proposición 3.2.9
$\sqrt{\ln x}$	Proposición 3.2.5
$\dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$	Proposición 3.2.6
$\dfrac{e^{ax}}{\sqrt{x}}$	Proposición 3.2.7
$\sqrt{x}e^{ax}$	Proposición 3.2.8
$\ln^n(\ln cy^k)$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $c, k \neq 0$ constantes	Proposición 3.2.10
$e^{\alpha x}\ln^n(\beta x)$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $\alpha, \beta \neq 0$	Proposición 3.2.11
$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$	Proposición 3.2.12
$\dfrac{\cos x}{x}$	Proposición 3.2.13
$\operatorname{sen} x \ln x$	Proposición 3.2.15
$\cos x \ln x$	Proposición 3.2.14
$\operatorname{sen}(p(x))$ con $\deg p(x) \geq 2$	Proposición 3.2.16
$\cos(p(x))$ con $\deg p(x) \geq 2$	Proposición 3.2.16
$\dfrac{\ln x}{p(x)}$ con $p(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ y $\alpha_i \neq 0$	Proposición 3.2.17
$\operatorname{arcsec}^2 x$	Proposición 3.2.18
$x^p(a+bx^r)^q$ con $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $a, b, r \in \mathbb{R}^*$ y $\frac{p+1}{r}$, q, $\frac{p+1}{r} + q \notin \mathbb{Z}$	Teorema 3.2.20

Cuadro 3.2: Funciones que no poseen primitiva elemental.

FUNCIONES SIN PRIMITIVA ELEMENTAL	**CRITERIO**
$\operatorname{arccsc}^2 x$	Proposición 3.2.19
$x \sec x$	Proposición 3.2.18
$x \csc x$	Proposición 3.2.19
$\sqrt{\operatorname{sen} x}$	Proposición 3.2.21
$\sqrt{\cos x}$	Proposición 3.2.21
$\sqrt{\operatorname{arc\,sen} x}$	Proposición 3.2.22
$\sqrt{\operatorname{arc\,cos} x}$	Proposición 3.2.23
$e^{e^{\sqrt[n]{x}}}$	Proposición 3.2.25
$e^{\frac{1}{\sqrt[n]{x}}}$	Proposición 3.2.26
$\sec(\sqrt{x})$	Proposición 3.2.27
$\csc(\sqrt{x})$	Proposición 3.2.28
$\operatorname{arc\,sen}(x^2)$	Proposición 3.2.29
$\operatorname{arc\,cos}(x^2)$	Proposición 3.2.29

Cuadro 3.3: Funciones que no poseen primitiva elemental.

BIBLIOGRAFÍA

[1] **Derrick, W.R.**, *Introductory Complex Analysis and Aplications*, Academic Press, 1974.

[2] **Fraleigh, J.**, *A first course in abstract algebra*, University of Rhode Island, 7ed, 2003.

[3] **Grove, E.A., Ladas, G.**, *Introduction to Complex Variables*, Houghton Mifflin, 1974.

[4] **Ivorra, C.**, *Funciones sin primitiva elemental*, http://www.uv.es/ivorra/Libros/Primitivas.pdf. Consultada Agosto 13, 2016.

[5] **Ivorra, C.**, *Álgebra*, https://www.uv.es/ivorra/Libros/Algebra2.pdf. Consultada Agosto 13, 2016.

[6] **Laplace, P.**, *Laplace. .ºeuvres complétes de Laplace". Tome Septiéme.* Gauthier-Villars. 1820.

[7] **Marchisotto, E., Zakeri, G.**, *An invitation to integration in finite terms*, The College Mathematics Journal, Vol. 25, No 4, (1994) pp. 295-308.

[8] **Mora, W.**, *¿Se puede saber si una función tiene primitiva elemental?*, Revista digital Matemática, Educación e Internet, Vol 15, No 2, (2015).

[9] **Ritt, J.F.**, *Liouville's Theory of Elementary Methods*, Integration in Finite Terms., Columbia University Press, 1948.

[10] **Rosenlicht, M.**, *Liouville's theorem on functions with elementary integrals*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 24, No 1, (1968) pp. 153-161.

[11] **Rosenlicht, M.**, *Integration in Finite Terms*, Amer. Math. Monthly, Vol. 79, No 9, (1972) pp. 963-972.

Departamento de Matemáticas
Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano
Bogotá, Colombia
e-mail: `falopezl@poli.edu.co`