

# Solución de la Ecuación de Navier-Stokes por Diferencias Finitas

Sabina Restrepo

20 de enero de 2010



# Resumen

Todos los estados físicos se rigen por tres principios: La conservación de masa, momento y energía. Es allí donde la dinámica de fluidos se concentra, logrando desarrollar un conjunto de técnicas que permiten trabajar sobre ecuaciones matemáticas, llegando así a descubrir de manera real los comportamientos de los fluidos, en particular las ecuaciones de Navier- Stokes: un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineal que describe la dinámica de fluidos, dichas ecuaciones pueden ser simplificadas obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial t} &= -(\vec{\mu} \nabla) \vec{\mu} + \nu \nabla^2 \vec{\mu} + \vec{f} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -(\vec{\mu} \nabla) \rho + \kappa \nabla^2 \rho + S\end{aligned}$$

Donde  $\vec{\mu}$ ,  $\nu$ ,  $\vec{f}$ ,  $\rho$ ,  $\kappa$ , y  $S$  son representaciones de la velocidad del fluido (tanto en  $x$  como en  $y$ ), la viscosidad cinemática, fuerzas externas, densidad del fluido y fuentes respectivamente.

Para construir numéricamente una solución a las ecuaciones mencionadas, se utilizó el esquema de Jos Stam[16], quien divide la solución de la ecuación en los siguientes pasos: suma de fuerzas, advección y difusión. Para resolver la primera parte, la sumatoria de fuerzas, se basa en la siguiente ecuación:

$$w_1(x) = w_0(x) + \Delta t f(x, t)$$

Para la segunda parte, la advección, se trabaja sobre la solución de la ecuación de la forma:

$$\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial t} = -v(x) \nabla \alpha(x, t)$$

Y finalmente, el paso de difusión, se basa en la solución de la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 C = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

Utilizando la ayuda de los métodos numéricos de la siguiente manera, el método de Euler progresivo para la parte de fuerzas, el método de características para la de advección, Gauss Seidel para la parte de difusión y diferencias finitas. Luego, partiendo de la solución numérica, se realiza la implementación del simulador de fluidos en Processing 1.0 (Java), con parámetros variables e interacción con el usuario por medio del mouse. Finalmente, se realizan pruebas sobre el simulador, recalcando su estabilidad numérica produciendo diferentes tipos de fluido (humo, agua, tinta).

Se espera que a partir de este documento se puedan extender estos resultados en 3 dimensiones, problemas de simulación de explosiones, movimientos de agua, entre otros; aportando al campo de la dinámica de fluidos computacional.



# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1. Historia de las Ecuaciones Diferenciales . . . . .	7
1.2. Definiciones Importantes en Ecuaciones Diferenciales . . . . .	8
1.3. Ecuaciones Diferenciales Parciales . . . . .	9
1.4. Problemas de Valor Inicial . . . . .	11
1.5. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales . . . . .	12
1.6. Métodos numéricos en ecuaciones diferenciales . . . . .	13
<b>2. Las Ecuaciones de Navier-Stokes</b>	<b>17</b>
2.1. Física de Fluidos . . . . .	17
2.2. Las ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	18
2.2.1. Componentes de la Ecuación de Navier-Stokes . . . . .	18
2.3. Solución Numérica de las Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	19
2.3.1. El Paso de Sumatoria de Fuerzas . . . . .	20
2.3.2. El Paso de Advección . . . . .	20
2.3.3. Difusión . . . . .	21
2.3.4. Descomposición de Hodge . . . . .	21
<b>3. Resultados y Conclusiones</b>	<b>23</b>
3.1. Implementación . . . . .	23
3.2. Resultados . . . . .	27
3.3. Conclusiones . . . . .	27
3.4. Limitaciones . . . . .	28
3.5. Trabajo Futuro . . . . .	28
3.5.1. Apéndice A . . . . .	28



# Capítulo 1

## Preliminares

Con el objeto de entender a fondo el problema de solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma simplificada, se propone este capítulo donde se presentarán las nociones principales y subyacentes a la teoría de ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como parciales, para luego presentar algoritmos numéricos de solución a éstas. El lector que desee profundizar en el tema puede consultar el libro Análisis Numérico de Burden.

### 1.1. Historia de las Ecuaciones Diferenciales

A finales del siglo XVIII comenzaron los primeros intentos por resolver problemas físicos mediante el cálculo diferencial, lo cuál origino un nuevo campo de investigación de las matemáticas, logrando así, en el siglo XVIII, una rama independiente para el estudio de las ecuaciones diferenciales. Newton observó que si  $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$ , entonces  $y(x)$  es un polinomio de grado  $n - 1$ ,  $y$  depende de  $n$  constantes arbitrarias, ésta afirmación fue demostrada hasta el siglo XIX.

Los matemáticos de la época, usaban argumentos físicos como por ejemplo:  $y(t)$  denota la posición en el tiempo  $t$  de una partícula, por lo tanto  $\frac{dy}{dt}$  es su velocidad. Si  $\frac{dy}{dt} = 0$ , la velocidad es nula, es decir que la partícula no se mueve y su posición permanece constante.[1]

Finalmente en el año 1693, Huygens habla explícitamente de *ecuaciones diferenciales* y Leibniz afirma que son funciones de elementos del triángulo característico.[1]

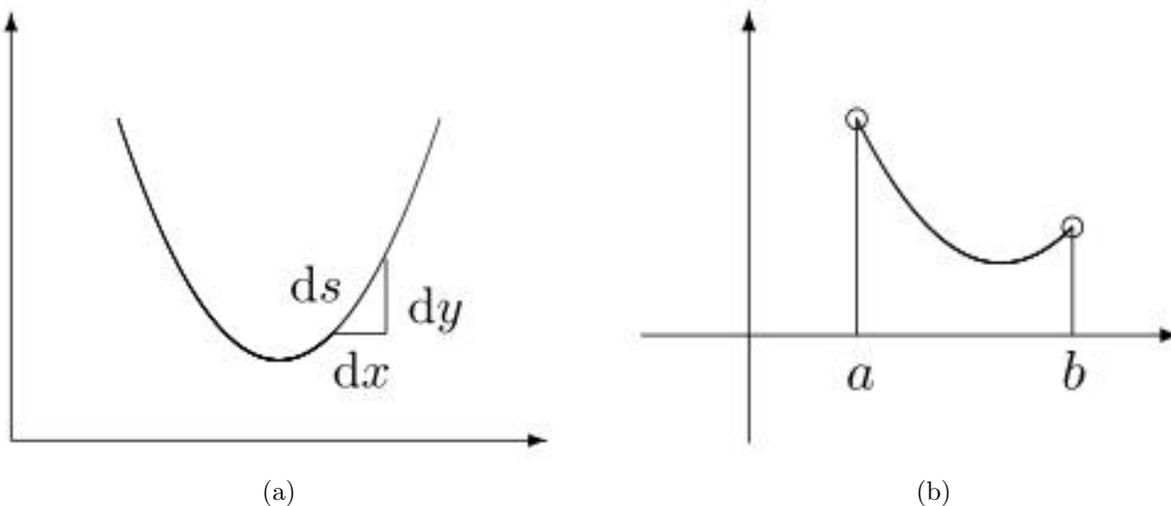


Figura 1.1: Conceptos en ecuaciones diferenciales: (a) Triángulo Característico definido por Leibniz, (b) Catenaria de Jacques Bernoulli.

Posteriormente, en el año 1690, Jacques Bernoulli planteó el problema de encontrar una curva que adopta

una cuerda flexible, inextensible y colgada de dos puntos fijos, a lo cual Leibniz llamó catenaria <sup>1</sup>. Galileo pensó que esta curva era una parábola, mientras Huygens probó que esto no era correcto.[1]

Ya en 1691, Leibniz, Huygens y Jean Bernoulli publicaron soluciones independientes. A mediados del siglo XVIII Euler, descubrió el cálculo de variaciones, y Lagrange a finales del mismo siglo mejoró y amplió los métodos expuestos por Euler.

En 1692 Leibniz descubrió la técnica de separación de variables, indicando cómo se resuelve  $\frac{dx}{dy} = f(x)g(y)$ .

En 1694 Leibniz y Jean Bernoulli estudiaron el problema de encontrar la familia de curvas que cortan en un ángulo dado a una familia de curvas dadas, llegando a resolverlo independientemente y de forma general en el año 1698, el método empleado es el mismo que se usa hoy en día.

## 1.2. Definiciones Importantes en Ecuaciones Diferenciales

En esta sección se describirán las características principales de las ecuaciones diferenciales a trabajar a lo largo de este documento. Se empieza por dar las definiciones principales -más generales- de la teoría de ecuaciones diferenciales.

El estudio y uso de ecuaciones diferenciales se puede ver aplicado en diversas áreas de conocimiento, usadas más por ingenieros y científicos los cuales utilizan este tipo de ecuaciones para estudiar diversos fenómenos. Su uso también es común en ciencias fundamentales como la química, biología, matemática y economía.

Por ejemplo usando ecuaciones diferenciales se predice la dinámica poblacional, la estabilidad de la órbita de los satélites o el movimiento de recursos en un mercado financiero[12].

**Definición 1.2.1 (Ecuación Diferencial)** *Si una ecuación contiene las derivadas o las diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial (E.D).[5]*

Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se deriva, las E.D se dividen en dos grupos: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Ecuaciones Diferenciales Parciales.

**Definición 1.2.2 (Ecuación Diferencial Ordinaria)** *Una E.D de la forma:*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

con  $F$  una función continua  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ ) son  $n$  derivadas de una función  $y = y(x)$  se dice una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden  $n$ . No tiene derivadas parciales, y representa dependencia sobre la variable y respecto a una sola variable independiente  $x$ .

La contraparte en varias variables de las EDO son las Ecuaciones Diferenciales Parciales, definidas de la siguiente manera:

**Definición 1.2.3 (Ecuación Diferencial Parcial)** *Una E.D de la forma:*

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots\right) = 0 \quad (1.2)$$

se dice una ecuación diferencial parcial (EDP).

Algunas características que definen a una ED son el orden, homogeneidad y linealidad.

**Definición 1.2.4 (Orden de una Ecuación Diferencial)** *La derivada o la diferencial de más alto orden determina el orden de la E.D.[5]*

---

<sup>1</sup>N.T: En Latín cadena

Por ejemplo la Ley de Hooke establece que la fuerza ejercida sobre un resorte es directamente proporcional al alargamiento que se produce:  $F = -kx$  y por la segunda ley de Newton  $m \frac{d^2x}{dt^2} = \vec{F}$ , con lo cual la posición  $x(t)$  de una masa sujeta a un resorte, está determinada por solución de la ecuación diferencial lineal y de orden 2:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0 \quad (1.3)$$

**Definición 1.2.5 (Ecuaciones Diferenciales Lineales)** Una E.D es lineal si tiene la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1.4)$$

Es decir, la variable independiente y todas sus derivadas tienen exponente uno y cada coeficiente

$$a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), g(x)$$

depende solo de  $x$ . Si no cumple lo anterior se dice que la E.D no es lineal. Cuando  $g(x) = 0$  se dice que es una ecuación diferencial lineal homogénea de orden  $n$ . [5]

Una solución general de una ecuación diferencial de cualquier orden contiene normalmente una constante arbitraria, llamada *parámetro*. Cuando este parámetro se le asignan diversos valores, obtenemos una familia uniparamétrica de curvas. Cada una de estas curvas es una solución de la ecuación diferencial dada, y todas constituyen la solución general, todo esto está sustentado en el siguiente teorema. [15]

**Teorema 1.2.6** Si  $y(x)$  satisface una ecuación diferencial de la forma 1.1, cualquier traslación por constante de  $y$  también la satisface.

Estas soluciones pueden ser soluciones analíticas o soluciones numéricas:

**Definición 1.2.7 (Solución Analítica para una E.D)** Una función  $f$  se dice que es solución de una E.D cuando la satisface. En este caso decimos que  $f$  es una solución analítica de la ecuación diferencial dada. [14]

**Ejemplo 1.2.8 (Ejemplo de una solución Analítica)** Ejemplo  $y' = e^x$

Definición de  $y'$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

Se multiplica ambos lados por  $dx$

$$dy = e^x dx$$

Se integra ambos lados

$$\int dy = \int e^x dx$$

Propiedad de integrales

$$y = e^x + C, \text{ donde } C \text{ es una constante}$$

**Definición 1.2.9 (Solución Numérica para una E.D)** Se considera una solución numérica para una E.D, a un algoritmo que construye una aproximación a la solución analítica de una ED a partir de parámetros dados.

## 1.3. Ecuaciones Diferenciales Parciales

En esta sección se describirán los puntos más relevantes de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, como también las ecuaciones que se estudiarán en este documento para llegar a la solución de las ecuaciones de

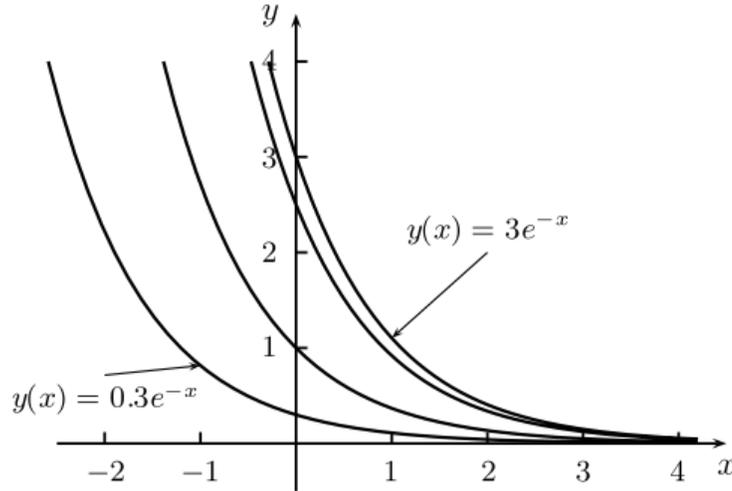


Figura 1.2: Familia de Soluciones para la ecuación  $\frac{dy}{dx} = -y$

Navier- Stokes.

Nótese la importancia de definir una ecuación diferencial parcial lineal, puesto que las ecuaciones a estudiar en este documento son de este tipo.

**Definición 1.3.1 (Ecuación Diferencial Parcial Lineal)** Una EDP de la forma

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (1.5)$$

se conoce como una ecuación diferencial parcial lineal (EDPL). Donde  $u$  denota la variable dependiente,  $y$  ( $x, y$ ) denotan las variables independientes, donde  $A, B, C, \dots, G$  son funciones de  $x$  y  $y$ . (EDPL)[4]

Cuando  $G(x, y) = 0$ , se dice que la ecuación es homogénea, de lo contrario es no homogénea. Las EDPL se clasifican en tres grupos dependiendo de la expresión:

$$B^2 - 4AC \quad (1.6)$$

Según el siguiente criterio:

- Hiperbólica si  $B^2 - 4AC > 0$
- Elíptica si  $B^2 - 4AC = 0$
- Parabólica si  $B^2 - 4AC < 0$

Cada uno de estos grupos se concentra en una clase de problemas en ingeniería, las ecuaciones Hiperbólicas tratan problemas de propagación con presencia de la segunda derivada con respecto al tiempo, las Elípticas por lo general son usadas para caracterizar sistemas en estado estable y se emplean para determinar la distribución en estado estable, de una incógnita, en dos dimensiones. Por último, las ecuaciones Parabólicas, determinan cómo una incógnita varía tanto en espacio como en tiempo, y esto se da gracias a la presencia de la derivada espacial o temporal; Estos casos se conocen como problemas de propagación (de igual manera que las ecuaciones Hiperbólicas) ya que la solución se propaga con el tiempo, pero a diferencia de las ecuaciones Hiperbólicas no cuentan con segunda derivada con respecto al tiempo. Otras EDPL parabólicas se mencionan a continuación:

**Ejemplo 1.3.2 (Ecuación de Calor)** <sup>2</sup> Ecuación diferencial que describe la evolución de la temperatura en un cuerpo sólido.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (1.7)$$

<sup>2</sup>N.A: Propuesta por Fourier en 1807(teoría de las series de fourier)

Donde  $T$  es una función  $T(x, y, z, t)$  que describe la temperatura en el punto  $(x, y, z)$  del cuerpo, en el instante de tiempo  $t$  y su constante de difusión  $k$ .

**Ejemplo 1.3.3 (Ecuación de Difusión)**

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (D(\phi, r) \nabla \phi(r, t)) \quad (1.8)$$

Donde  $\phi$  es la densidad del material que se difunde,  $t$  es el tiempo y  $D$  es el coeficiente de difusión colectivo (valor que representa la facilidad con que cada soluto en particular se mueve en un solvente determinado, wikipedia),  $\vec{r}$  es la coordenada espacial y el símbolo nabla  $\nabla$  es el vector operador diferencial nabla.

$$\nabla \cdot D(\phi, r) + D(\phi, r) \nabla^2 \phi \quad (1.9)$$

Si se considera  $D(\phi, r) \equiv k$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = k \nabla^2 \phi = k \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad (1.10)$$

**Ejemplo 1.3.4 (Ecuación de Continuidad)** Intenta describir como la cantidad o entidad (a la cual se hace referencia) es igual para cualquier instante de tiempo y posición, donde se expresa que un cambio de densidad en un sistema es debido a un flujo entrante o a un flujo saliente de material del sistema, es decir no puede haber ni creación ni destrucción de la materia.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \rho = 0 \quad (1.11)$$

$$\vec{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (1.12)$$

Donde  $\rho$  es la densidad,  $t$  es el tiempo y  $\vec{V}$  la velocidad del fluido.

## 1.4. Problemas de Valor Inicial

Como se mencionó en secciones anteriores una ecuación diferencial determina una familia de funciones, donde cada una de éstas es una solución analítica 1.2.9. Téngase en cuenta que una solución analítica puede existir o no, y de existir hallarla no necesariamente es fácil. Ahora bien, a la hora de resolver un problema de ingeniería o de física, estos problemas tienen sus propias condiciones, en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales éstas condiciones se pueden resumir en las *condiciones iniciales*, que describen el momento de partida o las características en el momento de inicio, y *condiciones de frontera* del problema que definen el dominio donde se encuentra el problema. Más aún todo problema físico o de ingeniería ocurre en un lugar ó momento determinado, el lugar donde éste problema ocurre se le llama el dominio del problema.

**Definición 1.4.1 (Dominio)** Un dominio se describe como un  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , si  $\Omega$  es un conjunto del plano  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 1.4.2 (Dominios en  $\mathbb{R}$ )** Un intervalo  $[a, b]$  es un dominio en  $\mathbb{R}$ ,  $[a, 0] \times [0, b]$  es un dominio en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 1.4.3 (Condición de Frontera)** Una condición de frontera describe el comportamiento de la función incógnita en los límites del dominio. Entre las condiciones de frontera más populares se encuentran:

- *Reflectiva:* En los límites del dominio, el gradiente de la función incógnita cambia de sentido.
- *Neumann:* Los valores de la función incógnita están fijos en la frontera ó dados por una función.
- *Rabin:* La variación de la función incógnita depende de una función fija:  $\nabla u(x, y) = f(x, y)$

**Definición 1.4.4 (Problemas de Valor Inicial)** Se define un problema de valor inicial, a un problema de ecuaciones diferenciales con condición inicial y condición de frontera.

En un problema de valor inicial con condición de frontera, se busca encontrar una función que satisfaga la ecuación diferencial, las condiciones de frontera y la condición inicial. Para esto es importante recordar que dicha función puede o no existir y hallarla no necesariamente es trivial.

A continuación se muestran algunos ejemplos de problemas de valor unicial con condición de frontera:

**Ejemplo 1.4.5 (Ecuación de Onda)**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad (1.13)$$

$t > 0$  en el dominio  $x \in [0, l]$

Sujeta a las condiciones (de frontera de Neumann):

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \text{ para } t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \text{ y } \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = g(x), \text{ para } 0 \leq x \leq l \text{ es la condición inicial.}$$

Donde  $\alpha$  es una constante.[4]

**Ejemplo 1.4.6 (Ecuación de Poisson)**

$$\nabla^2 u(x, y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y) \quad (1.14)$$

en el dominio  $R = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\}$ , con

$$u(x, y) = g(x, y), \text{ para } (x, y) \in S$$

donde  $S$  denota la frontera de  $R$ , con condición de frontera de Neumann.

**Ejemplo 1.4.7 (Ecuación de Calor)**

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (1.15)$$

$t > 0$ , en el dominio  $[0, l]$

Sujeta a las condiciones:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, t > 0$$

y

$$u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq l, \text{ condición de frontera de Neumann. [3]}$$

## 1.5. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

En esta sección se describirán las características relevantes de un sistema de ecuaciones diferenciales.

**Definición 1.5.1 (Sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales)** *Un sistema de ecuaciones diferenciales [parciales] es un sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} 0 &= F_1(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots) \\ 0 &= F_n(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_2}{\partial x_n}, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots) \\ &\vdots \\ 0 &= F_n(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x_n}, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots) \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde  $F_i(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \dots, u_1, \dots, u_n, \dots) = 0$  es una EDP de la forma 1.2.3.

En particular, si una de las variables independientes es  $t$ , entonces se habla de un sistema dependiente del tiempo. Una forma común de escribir esta es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \tilde{F}_1(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, u_1, \dots, u_n, \dots) \\ &\vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} &= \tilde{F}_n(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x_n}, u_1, \dots, u_n, \dots) \end{aligned} \quad (1.17)$$

**Ejemplo 1.5.2 (Sistema de ecuaciones lineal de dos ecuaciones)**

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{aligned} \quad (1.18)$$

De igual manera, para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, ya sea parciales, dependientes del tiempo o lineales es necesario recurrir a los métodos numéricos, partiendo del problema de valor inicial para llegar a una solución numérica.

## 1.6. Métodos numéricos en ecuaciones diferenciales

En esta sección se describirá cómo, utilizando métodos numéricos se puede hallar solución a una ecuación diferencial parcial, en un problema de valor inicial con condición de frontera.

Existen varios métodos numéricos para la solución de problemas con valor inicial, cuando se tiene un dominio en el cual se representará el problema. Para tratar este tipo de problemas utilizando métodos numéricos es necesario: (1) subdividir la geometría (2) construir un esquema de aproximación a la solución en puntos discretos del dominio. Siendo así, hay dos clases de métodos: Diferencias Finitas y Métodos de Galerkin.[13] Una gran diferencia entre estos dos métodos es la discretización, en el método de diferencias finitas, la discretización se realiza únicamente sobre el dominio, mientras que, en los métodos de Galerkin se realiza la discretización sobre el dominio del problema y sobre la función solución. El dominio del problema determina que método utilizar.

En los métodos de Galerkin se asume que la función solución se puede escribir como una combinación lineal de *funciones base* (polinomios lineales por ejemplo)  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , de modo tal que la función incógnita  $\phi$  (solución) de la ecuación diferencial se puede escribir como una combinación de los  $y_i$ :

$$\phi = \sum_{i=0}^n \alpha_i y_i \quad (1.19)$$

En este sentido, los métodos de Galerkin buscan estimar los coeficientes de la combinación lineal -los  $\alpha_i$ - de manera que se minimice el error de aproximación a la solución y teniendo en cuenta las condiciones de frontera y la condición inicial. La cuantificación del error en el método de Galerkin se hace a través de una formulación *variacional* de éste: se define una integral que cuantifica el error y se escogen los coeficientes de acuerdo con éste.

En el método de diferencias finitas, se aprovecha la condición inicial para construir un sistema de ecuaciones lineales que al resolverse permiten aproximar la solución de la ecuación diferencial en distintos instantes de tiempo. La ventaja principal del método de diferencias finitas es la facilidad de su implementación; la desventaja es que obliga a trabajar sobre dominios con geometrías *simples*. Por otro lado los métodos de Galerkin permiten trabajar problemas de ecuaciones diferenciales sobre geometrías complejas y condiciones de contorno complejas. Sin embargo, la dificultad de implementación de los métodos de Galerkin sobre las diferencias finitas es conocido[13] a pesar de que se puede simular con éstos procesos más complejos que con las diferencias finitas.

**Definición 1.6.1 (Diferencias Finitas)** *Se discretiza el dominio en pequeños cuadrados y se reescriben las derivadas por medio de aproximaciones (diferencias finitas) con respecto al valor de la función incógnita en cada cuadrado de la subdivisión, y a partir de la ecuación diferencial se reduce el problema a la solución de un sistema de ecuaciones, en general lineal.[13]*

**Ejemplo 1.6.2 (Solución de la Ecuación de Calor por Diferencias Finitas)** *Definida la ecuación de Calor, con el problema de valor inicial 1.15 La aproximación de esta solución se da por el método de diferencias finitas. Inicialmente se selecciona un entero  $m > 0$  y sea  $h = \frac{l}{m}$ , un tamaño de peso de tiempo  $k$ . Los puntos de red para este caso son  $(x_i, t_j)$ , donde  $x_i = ih$  para  $i = 0, 1, \dots, m$ , y  $t_j = jk$ , para  $j = 0, 1, \dots$ . El método de diferencias se obtiene de usar la serie de Taylor en  $t$  para formar el cociente de diferencias*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) \quad (1.20)$$

para alguna  $\mu_j \in (t_j, t_{j+1})$ , y la serie de Taylor en  $x$  para formar el cociente de diferencias

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \quad (1.21)$$

Donde  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ . [3]

**Ejemplo 1.6.3 (Solución de la ecuación de Onda por Diferencias Finitas)** *Definida la ecuación de Onda, con el problema de valor inicial 1.13 Para establecer el método de diferencias finitas, se selecciona un entero  $m > 0$  y el tamaño de paso de tiempo  $k > 0$ . Con  $h = \frac{l}{m}$  los puntos de red  $(x_i, t_j)$ , son  $x_i = ih$ ,  $y$ ,  $t_j = jk$*

para cada  $i = 0, 1, \dots, m$ , y  $j = 0, 1, \dots$ . En cualquier punto de red interior  $(x_i, t_j)$ , la ecuación de onda se transforma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0 \quad (1.22)$$

El método de diferencias se obtiene usando el cociente de diferencias centradas en las segundas derivadas parciales dadas por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) \quad (1.23)$$

donde  $\mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$ , y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \quad (1.24)$$

donde  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ . Al sustituir estas expresiones en la ecuación 1.22, se obtiene

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} \quad (1.25)$$

$$= \frac{1}{12} \left[ k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \right] \quad (1.26)$$

[4]

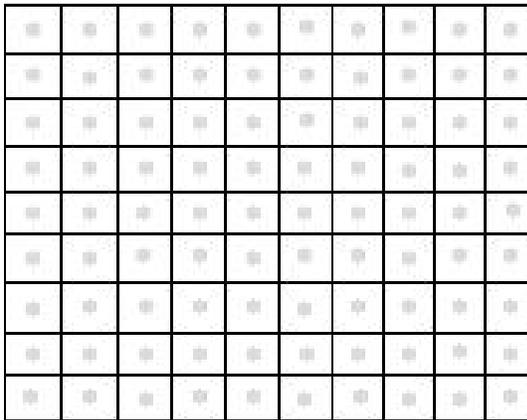


Figura 1.3: Ejemplo de Discretización de un Dominio(un cuadrado) en dos dimensiones para el método de Diferencias Finitas

En el caso de diferencias finitas, luego de discretizar el dominio, se tiene un sistema de ecuaciones, como se mencionaba en la definición 1.6.1. Así el problema se reduce a un problema de algebra lineal: un sistema de ecuaciones lineales simultáneas, en este caso se pueden aplicar métodos numéricos que permiten resolver el problema, de ser este un sistema lineal se puede utilizar métodos iterativos que convergen a la solución, como por ejemplo el método de Gauss-Seidel.[16]

**Definición 1.6.4 (Método de Gauss Seidel)** [10] Método iterativo, que comienza con una aproximación inicial de la solución  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  para calcular la siguiente  $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ , sin modificar las demás ecuaciones <sup>3</sup>, construyendo una sucesión de vectores  $x^k$  con el objetivo de que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^* \quad (1.27)$$

Realizando  $n$  subiteraciones.

<sup>3</sup>N.T: El superíndice indica la iteración y no una potencia

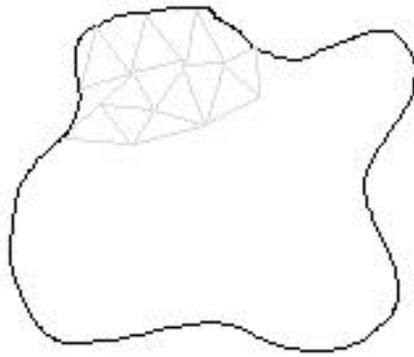


Figura 1.4: Discretización de un Dominio por Elementos Finitos (un método de Galerkin).

Es necesario asegurarse que la solución converja, para la estabilidad numérica de la solución, para esto se trabaja bajo el número de Courant:

**Definición 1.6.5 (Número de Courant)** (*C*) Descrito por Richard Courant, Kurt Friedrichs y Hans Lewy en 1928. Es el cociente entre el intervalo de tiempo y el tiempo de residencia en un volumen finito.

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta x/u} \tag{1.28}$$

Donde, *C* es el número de Courant,  $\Delta t$  es el intervalo de tiempo,  $\Delta x$  es el intervalo de espacio, y  $\mu$  es la velocidad.

Su condición es de convergencia en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, por tanto el paso de tiempo debe ser inferior a un cierto valor para que la solución tenga resultados correctos.

Otro paso importante, en el momento de trabajar con problemas de valor inicial, es asegurarse que la solución sea numéricamente estable, para esto se definen *El Método de diferencias Regresivas* y *El método de diferencias Progresivas*.

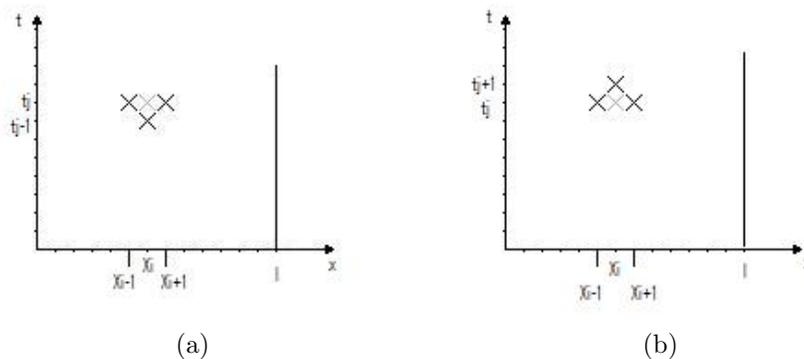


Figura 1.5: Métodos de Diferencias:(a)Regresivas, (b) Progresivas

**Ejemplo 1.6.6 (El Método de Diferencias Regresivas para la ecuación de Calor)** Como lo muestra la figura (a)1.5, se recorre los puntos de red:  $(x_i, t_j)$ ,  $(x_i, t_{j-1})$ ,  $(x_{i-1}, t_j)$  y  $(x_{i+1}, t_j)$  Puntualmente para la ecuación de Calor, Dado:

$$\frac{w_{i,j} - x_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0 \tag{1.29}$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, m - 1$ , y  $j = 1, 2, \dots$

En el caso de ecuaciones ordinarias de primer orden.

**Ejemplo 1.6.7 (Diferencias Finitas Progresivas en EDO de primer orden)** *Tiene por objeto obtener una aproximación de un problema bien planteado de valor inicial:*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (1.30)$$

$a \leq t \leq b$ ,  $y(a) = \alpha$  No se obtiene una aproximación continua a la solución  $y(t)$ ; por el contrario, se generan aproximaciones a esa solución en varios valores, llamados puntos de red, en el intervalo  $[a, b]$ . Una vez obtenida la aproximación en los puntos, se obtiene por interpolación la solución aproximada en otros puntos del intervalo. Inicialmente se estipula que todos los puntos de red tienen una distribución uniforme en el intervalo  $[a, b]$ . Esta condición se garantiza por manejar número enteros y puntos de red:  $t_i = a + ih$ , para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ . La distancia común entre los puntos  $h = (b - a)/N$  recibe el nombre de tamaño de paso.

**Ejemplo 1.6.8 (Método de Euler)** *Se considera un sistema de  $N$  variables  $y_i$ , que dependen de  $t$ . Las ecuaciones diferenciales pueden expresarse como  $y_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_N, t)$ , donde  $i=1, \dots, N$ , se escoge un paso de  $t$  pequeño ( $\Delta t$ ), con el método de Euler se pueden calcular los valores de  $y_i$  en el tiempo  $t + \Delta t$  conociendo el tiempo  $t$ . Siendo así, para averiguar los valores de  $y_i$  en cualquier  $t$  basta con saber sus valores iniciales, y se va resolviendo iterativamente con un paso  $\Delta t$  hasta llegar al valor de  $t$ .*

# Capítulo 2

## Las Ecuaciones de Navier-Stokes

Antes de describir el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes, objetivo de este documento, se describe como es un fluido y como es su comportamiento, considerando diferentes características del mismo como su desplazamiento.

### 2.1. Física de Fluidos

El comportamiento de un fluido es complejo desde el punto de vista físico y matemático, esto se debe a que siempre un fluido real experimenta efectos debido a las fuerzas de rozamiento o fuerzas viscosas, por esto es necesario tener presentes diferentes características del fluido y su entorno. Se define como un medio continuo, que se deforma continuamente en el tiempo debido a la tensión tangencial ejercida sobre el mismo, sin importar su magnitud; la posición de sus moléculas puede variar continuamente, toman velocidad la cual depende directamente de la viscosidad del mismo <sup>1</sup>, su densidad se relaciona directamente con su viscosidad. También se dice que un fluido es estacionario, lo cual indica que en un punto su velocidad es constante con el tiempo. [6]

De acuerdo a las características mencionadas, los fluidos pueden clasificarse como Newtonianos: fluidos cuya viscosidad se considera constante en el tiempo, o No Newtoniano: fluidos cuya viscosidad varía con la temperatura y presión pero no con la variación del tiempo.

**Ejemplo 2.1.1 (El Agua)** *Una mangera conectada a una llave de agua, cuando esta llave se abre el agua sale desplazándose a través de la mangera, se tapa el extremo final de la mangera bloqueando la salida del agua por unos segundos, en el momento que se retira el dedo u objeto con el cual se tapó el extremo de la mangera, la velocidad del agua saliendo de la mangera se incrementa, esto se debe a que la masa no se crea ni se destruye, es decir la misma cantidad de agua que ingresa a la mangera es la misma cantidad que debe salir de ella (teniendo en cuenta que la mangera no tiene agujeros ni desagues).*

**Ejemplo 2.1.2 (La Sangre)** *Cuando un paciente presenta arteriosclerosis<sup>2</sup> o cuando se apreta una de las arterias, hace que la sangre viaje tres veces más rápido de lo que comúnmente viaja.*

Ahora bien, otra de las características importantes de un fluido es como se da su desplazamiento, este se ve representado como su flujo que describe la manera como corre el fluido por un lugar o entorno determinado; dependiendo de este comportamiento se tienen dos clases de flujos: *Laminar* y *turbulento*.

**Definición 2.1.3 (Flujo Laminar)** *Es aquel donde el fluido se mueve de manera uniforme, a través de sus capas o láminas.[11]*

**Definición 2.1.4 (Flujo Turbulento)** *Es un flujo cuyas láminas fluyen desorganizadas, tanto en dirección como en velocidad. En el espacio libre el flujo no interactúa con objetos, pero si un objeto está cercano al flujo del fluido, este interactúa con el mismo cambiando sus características de velocidad.[11]*

Siendo así, un flujo puede cambiar de laminar a turbulento dependiendo de:

<sup>1</sup>N.A: Entre mayor viscosidad, menor velocidad (Ej: Melaza). Entre menor viscosidad, mayor velocidad (Ej: Agua).

<sup>2</sup>N.A: Depósito formado en la pared arterial el cual reduce la abertura por donde fluye la sangre

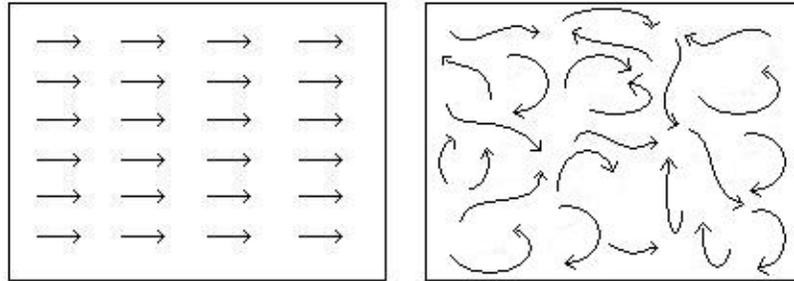


Figura 2.1: Flujo Laminar y Flujo Turbulento

- Un cambio en la velocidad del fluido
- Alteraciones del propio flujo
- Rugosidad de la superficie sobre la que fluye. [11]

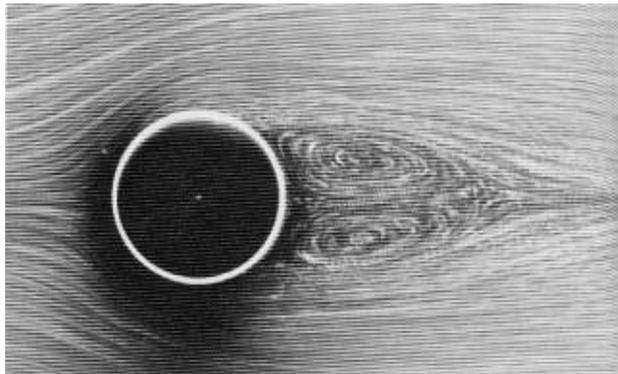


Figura 2.2: Flow Past a Cylinder [7]

En el caso de la figura 2.2, el flujo comienza laminar, y en el momento que este choca con el cilindro, y lo rodea convirtiéndose en un flujo turbulento, este problema se conoce como *Flow Past a Cylinder*. Finalmente, conociendo los comportamientos de los fluidos y las nociones matemáticas, se puede estudiar las ecuaciones que permiten estudiar lo anteriormente mencionado.

## 2.2. Las ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes reciben su nombre gracias a dos físicos, Claude Louis Navier y George Gabriel Stokes, francés e Irlandés respectivamente, quienes aplicaron principios de la mecánica y termodinámica, dando como finalidad a ecuaciones en derivadas parciales no lineales que logran describir el comportamiento de un fluido.

Son ecuaciones que *no* se concentran en una posición sino en un campo de velocidades, más específicamente en el flujo de dicho campo, lo cual es la descripción de la velocidad del fluido en un punto dado en el tiempo y en el espacio.

El objetivo del estudio del documento, es revisar una solución numérica bidimensional para las ecuaciones de Navier-Stokes, que permitan describir el comportamiento de un fluido y sus características antes mencionadas, por lo tanto primero se definen los componentes de las ecuaciones enunciadas.

### 2.2.1. Componentes de la Ecuación de Navier-Stokes

A la hora de estudiar un fluido Navier -Stokes consideran los siguientes componentes:

- $\vec{\mu}$ , este término es usado en la dinamica de fluidos para definir la velocidad del fluido.
- $\rho$ , este término relaciona la densidad del fluido.
- $p$ , este término hace referencia a la presión o fuerza por unidad de superficie que el fluido ejerce.
- $g$ , este término relaciona la aceleracion de la gravedad, la cuál esta aplicada a todo el cuerpo, en determinados casos la gravedad no es la unica fuerza que es ejercida sobre el cuerpo, por tal razón se toma como la sumatoria de fuerzas externas.
- $\nu$ , este término hace referencia a la viscosidad cinemática. [8]

Definidos los componentes, se describe la siguiente ecuación como la ecuación de Navier-Stokes general <sup>3</sup>:

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbb{T} + f \quad (2.1)$$

El término  $\mathbb{T}$ , expresa el tensor de stress para los fluidos condensa información acerca de las fuerzas interdas del fluido. En el esquema trabajado en este documento, se considera un fluido incompresible cuyo campo de velocidades  $\vec{\mu}$  satisface la condición  $\nabla \cdot \vec{\mu} = 0$  por tal razón el tensor de stress se reduce a  $\nabla^2 \mu$ , dando como resultado la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial t} + \vec{\mu} \cdot \nabla \vec{\mu} + \frac{1}{\rho} \nabla p = g + \nu \nabla^2 \vec{\mu} \quad (2.2)$$

teniendo en cuenta la siguiente condición[8]:

$$\nabla \vec{\mu} = 0 \quad (2.3)$$

que garantiza la incompresibilidad del campo de velocidad. <sup>4</sup>

Considerando todos los elementos que describen el comportamiento del fluido dentro de las ecuaciones de Navier-Stokes, estas se pueden simplificar dando como resultado las ecuaciones[16]:

$$\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial t} = -(\vec{\mu} \nabla) \vec{\mu} + \nu \nabla^2 \vec{\mu} + \vec{f} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\vec{\mu} \nabla) \rho + \kappa \nabla^2 \rho + S \quad (2.5)$$

La ecuación 2.4 describe la velocidad, y la ecuación 2.5 hace referencia a la densidad a través de un campo vectorial. [16]. Estas son no lineales y una solución analítica no se conoce.[3] Así los métodos numéricos son de gran utilidad en si estudio.

## 2.3. Solución Numérica de las Ecuaciones de Navier-Stokes

De acuerdo a lo descrito en las secciones pasadas, se tienen las bases claves para pensar en una solución numérica para las ecuaciones de Navier Stokes, más específicamente de las ecuaciones 2.4 y 2.5.

La ecuación descrita para la velocidad[16]

$$\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial t} = -(\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{\mu} + \nu \nabla^2 \vec{\mu} + f \quad (2.6)$$

partiendo del estado inicial  $\vec{\mu}_0$  del campo de velocidad y el primer instante de tiempo  $t = 0$ , se busca estudiar su comportamiento para el tiempo  $t > 0$ . Si  $\vec{w}_0(x, y)$  es la estimación del campo en el instante  $t$ , y  $\vec{w}_4(x, y)$  denota el campo de velocidades en el instante de tiempo  $t + \Delta t$ . Jos Stam [16] propone una solución numérica a partir de la descomposicion de la ecuación en distintos términos y solucionando cada uno individualmente la solución de cada paso se contruye a partir del paso anterior. (Véase la figura 2.3[16]): La solución en el tiempo  $t + \Delta t$ , está dada por el campo de velocidades  $u(x, t + \Delta t) = w_4(x)$ , la simulación se obtiene iterando estos cuatro pasos.[16]

- Sumatoria de fuerzas
- Calcular Difusión
- Efectuar la Advección
- Proyección

<sup>3</sup>N.A: Wikipedia

<sup>4</sup>N.A:Su densidad permanece constante con el tiempo

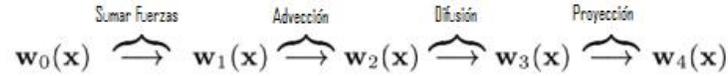


Figura 2.3: Pasos de iteración para la solución de la dinámica de fluidos[16].

### 2.3.1. El Paso de Sumatoria de Fuerzas

La manera más práctica para incorporar la sumatoria de fuerzas externas  $f$ , se obtiene asumiendo que la fuerza no varía de manera considerable en un paso de tiempo, siendo así:

$$w_1(x) = w_0(x) + \Delta t f(x, t) \quad (2.7)$$

Utilizando el método de Euler progresivo, teniendo en cuenta que la velocidad y la fuerza están relacionadas mediante la segunda Ley de Newton[16]

### 2.3.2. El Paso de Advección

Una perturbación en cualquier parte del fluido se propaga de acuerdo a la expresión  $-(\vec{\mu} \cdot \nabla)\vec{\mu}$ , este término hace que la ecuación de Navier-Stokes sea no lineal, de aplicarse el método de diferencias finitas, se obtiene una solución inestable, para prevenir esto, se usa *el método de características*. [16].

**Definición 2.3.1 (Método de Características)** *Una ecuación de la forma:*

$$\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial t} = -v(x) \nabla \alpha(x, t) \quad (2.8)$$

y,

$$\alpha(x, 0) = \alpha_0(x) \quad (2.9)$$

como las características del vector del campo  $v$ , que fluye a través del punto  $x_0$  en  $t = 0$ , es decir:

$$\frac{d}{dt} p(x_0, t) = v(p(x_0, t)) \quad (2.10)$$

donde,

$$p(x_0, 0) = x_0 \quad (2.11)$$

De modo tal que  $\alpha(x_0, t) = \alpha(p(x_0, t), t)$ , es el valor del campo que pasa por el punto  $x_0$  en  $t = 0$ . Para calcular la variación de esta cantidad en el tiempo se usa la regla de la cadena:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + v \nabla \alpha = 0 \quad (2.12)$$

Que muestra que el valor de  $\alpha$  no varía a lo largo de las líneas de flujo. En particular, se tiene  $\alpha(x_0, t) = \alpha(x_0, 0) = \alpha_0(x_0)$ ; por lo tanto el campo inicial y las características definen completamente la solución al problema de advección. Luego recorriendo las líneas de flujo en el sentido inverso se puede estimar el siguiente valor de  $\alpha$  en  $x_0$ , esto es  $\alpha(x_0, t + \Delta t)$ . [16]

Este método muestra en cada paso de tiempo, cómo todas las partículas del fluido se mueven por la velocidad del propio fluido. Por lo tanto, para obtener la velocidad en un punto  $x$  en el tiempo  $t + \Delta t$ , se devuelve al punto  $x$  por el campo de velocidades  $\vec{w}_1$  en el paso de tiempo  $\Delta t$ . Ésta define una ruta  $p(x, s)$  correspondiente a la trayectoria parcial del campo de velocidades. [16] La nueva velocidad en el punto  $x$ , es entonces la velocidad de la partícula ahora en  $x$  que tenía en su anterior ubicación en el tiempo  $\Delta t$ . De esta manera, se puede hallar el valor de la velocidad luego de la advección,  $\vec{w}_2(x, y)$  resolviendo el problema [16]

$$w_2(x) = w_1(p(x, -\Delta t)) \quad (2.13)$$

La ventaja que se obtiene interpolando linealmente entre valores adyacentes de este método es su estabilidad numérica. Como se muestra en la figura 2.4, la variación entre las iteraciones es baja (estable), además que su implementación es sencilla. Ya conocida la velocidad en el instante  $t$ , la viscosidad del fluido y su naturaleza obligan un proceso difusivo: la velocidad se propaga dentro del fluidos, o bien en las partículas de este fluyen.

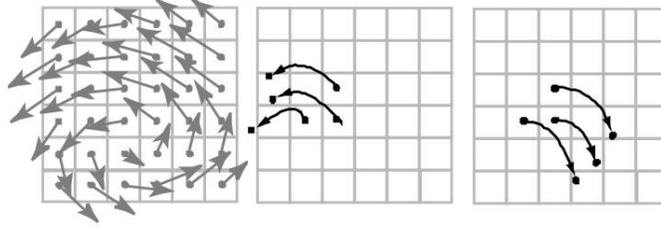


Figura 2.4: Figura que representa Interpolación Lineal, tomada directamente de Jos Stam.[16]

### 2.3.3. Difusión

El proceso de difusión de un fluido, se debe no solo a los cambios de energía y temperatura de este, sino, también a factores externos como las fuerzas ejercidas sobre el dentro de su dominio. Como es mencionado en el capítulo anterior, se tienen dos ecuaciones fundamentales: la ecuación 2.4 que permite describir el comportamiento de un fluido que esta expuesto a fuerzas externas. En este paso de difusión se busca resolver el operador  $\nabla^2$  de dicha ecuación.

Para llegar a resolver el operador de difusión, se busca aproximar en este caso:

$$\nabla^2 C = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \dots \quad (2.14)$$

Siendo  $C$  una función dependiente de  $x$  y  $t$  ( $C(x, t)$ ), si se utiliza el método de Euler para atrás, se obtiene:

$$\nabla^2 C(x_i, y_j) = \frac{C_{i+1j}^{t+1} + C_{i-1j}^{t+1} - 2C_{ij}^{t+1}}{(\Delta x^2)} + \frac{C_{ij+1}^{t+1} + C_{ij-1}^{t+1} - 2C_{ij}^{t+1}}{(\Delta y^2)} \quad (2.15)$$

Al resolver la ecuación:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha \nabla^2 C \quad (2.16)$$

De esta manera, por los métodos antes mencionados la ecuación 2.16 se reduce a:

$$\frac{C_{ij}^{t+1} - C_{ij}^t}{\Delta t} = \alpha \left[ \frac{C_{i+1j}^{t+1} + C_{i-1j}^{t+1} - 2C_{ij}^{t+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{C_{ij+1}^{t+1} + C_{ij-1}^{t+1} - 2C_{ij}^{t+1}}{(\Delta y)^2} \right] \quad (2.17)$$

Como se conoce  $C$  en el tiempo actual, se debe calcular el siguiente paso en el tiempo, por esta razón se despeja  $C_{ij}^{t+1}$  en términos de  $C_{ij}^t$  obteniendo un sistema de ecuaciones lineales soluble iterativamente por Gauss-Seidel.

### 2.3.4. Descomposición de Hodge

A la hora de resolver el campo de velocidades en el esquema expuesto, la conservación de masa y de energía no se puede garantizar mediante la separación hecha. Con el objeto de prevenir esto, se utiliza el siguiente resultado:

**Teorema 2.3.2 (Descomposición de Helmholtz-Hodge)** *Dado un campo vectorial  $\vec{v}$  definido en dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , existe una única descomposición de  $\vec{v}$  de la siguiente forma:*

$$\vec{v} = \nabla p + \nabla \times \vec{q} + \vec{h} \quad (2.18)$$

donde  $p$  es una función escalar,  $\vec{q}$  y  $\vec{h}$  son campos vectoriales llamados el campo de **potencial** y el campo **armónico** [9].

Según la descomposición de Hodge, un campo vectorial se puede dividir en una parte llamada *libre de divergencia* y otra parte conocida como la parte *libre de rotacional* [9]. La parte libre de divergencia es la que permite la aparición de turbulencia (flujo en forma de espirales), mientras que la parte libre de rotacional es la que permite la expansión de partículas. Los detalles de esta demostración se encuentran en [9].

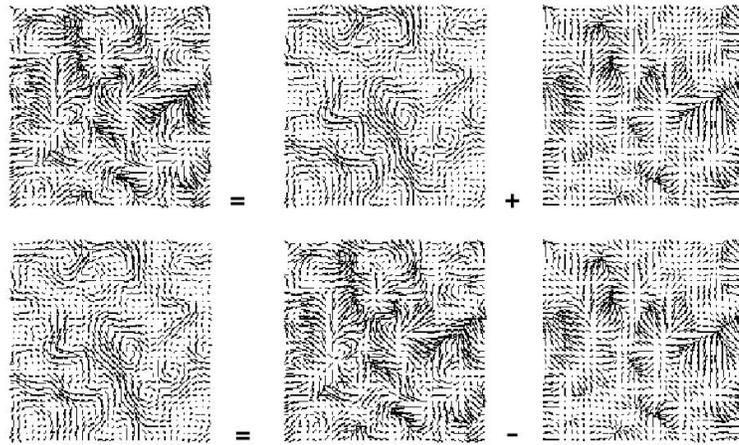


Figura 2.5: Cada campo de velocidades es la suma del campo incompresible y un gradiente de campo (parte superior de la figura). Para obtener el campo incompresible se debe restar el gradiente de campo al campo de velocidades (parte inferior de la figura). Figura tomada directamente de Jos Stam [16]

## Capítulo 3

# Resultados y Conclusiones

En este capítulo se presentará un ejemplo de una implementación computacional de los conceptos expuestos en los capítulos anteriores, junto con los resultados y conclusiones obtenidos en el estudio de las ecuaciones de Navier- Stokes presentados anteriormente.

Computacionalmente hablando se solucionó el problema de la ecuación de Navier-Stokes con frontera reflectiva sobre el cuadrado unitario, por el método descrito en los capítulos anteriores.

Es importante resaltar que para la implementación del simulador de fluidos por Navier-Stokes, se parte del estudio realizado por Jos Stam [16] y junto con Camilo Rey tutor de esta tesis, logrando llegar al resultado final del programa con modificaciones en su interfaz gráfica e idioma. El paper de Jos Stam esta basado en C++, mientras que la presentada está basada en Java(processing).

### 3.1. Implementación

Como implementación de un fluido, se plantea una malla donde cada celda representa una partícula de fluido, como dominio del problema se utilizó el cuadrado unitario, discretizado en una malla de tamaño  $N \times M$ , (`cx` y `cy` en el programa). Se necesita representar la velocidad y densidad como matrices, la cual representa el cómo se moverá el fluido. Para esto se consideran los siguientes vectores:

- Vector de velocidad en x `float [] u`
- Vector de velocidad en y `float [] v`
- Vector de velocidad previo en x `float [] antu`
- Vector de velocidad previo en y `float [] antv`
- Vector de densidad `float [] rho`
- Vector de densidad previo `float [] antrho`

Al trabajar sobre un vector, para comodidad en la manipulación de los datos, se crea un método `IX` que al introducir una posición `i, j`, retorne el valor real de la posición en el vector, descrito por `i+ (n+2)*j`, donde `n` es el tamaño de la malla.

Adicionalmente, se tienen en cuenta diferentes parámetros como:

- Coeficiente de difusión, `float difusion`
- Coeficiente de viscosidad, `float viscosidad`
- Número de Courant, `float numeroCourant`
- El tamaño del paso del tiempo `dt`

Conforme a lo expuesto en el capítulo anterior, es necesario desarrollar paso a paso las etapas de sumatoria de fuerzas, advección y difusión.

Las fuerzas ejercidas sobre el fluido serán dadas directamente por el movimiento del mouse. Por tal razón es necesario aplicar la sumatoria de esta fuerza a los vectores de velocidad tanto en  $x$  como en  $y$ , dando como resultado:

```
void sumarFuerza(float x, float y, float dx, float dy)

    int fuerzaInicial=normalizarPosicion(x,y);
    antu[fuerzaInicial]+=dx*factorFuerza;
    antv[fuerzaInicial]+=dy*factorFuerza;
```

Donde normalizar posición evita que las partículas del fluido sobrepasen el tamaño de la pantalla.

Para la solución de la difusión tanto para la parte de densidades como para la parte de velocidades, se decidió utilizar, el método de Euler regresivo, que resulta en un sistema de ecuaciones lineales tridiagonal, soluble por el método de Gauss-Siedel[16]. Conformemente, se pueden definir dos métodos `difusionUV` y `difusionRho`, que solucionan la parte de difusión, bajo éstas premisas:

```
void difusionUV(){
    float a= dt*viscosidad*(cx+2)*(cy+2);
    solucionLineal(1,u,antu,a,1.0+4.0*a);
    solucionLineal(2,v,antv,a,1.0+4.0*a);
}

void difusionRho(){
    float a=dt*difusion*(cx+2)*(cy+2);
    solucionLineal(0,rho,antrho,a,1.0+4.0*a);
}
```

Donde `solucionLineal` efectúa las iteraciones de Gauss-Siedel:

```
void solucionLineal(int b, float[] x, float[] x0, float a, float c){
    for(int k=0; k<numitera;k++){
        for(int i=1; i<=cx;i++){
            for(int j=1; j<=cy; j++){
                x[ix(i,j)]= (a*(x[ix(i-1,j)]+x[ix(i+1,j)]+x[ix(i,j-1)]+x[ix(i,j+1)])+x0[ix(i,j)])/c;
            }
        }
    }
    setBoundary(b,x);
}
```

El método adicional `setBoundary` que es utilizado dentro del método `solucionLineal`, permite imponer las condiciones de frontera reflectivas ya mencionadas y su descripción se explicará más adelante.

Para la solución de la parte de Advección, dadas las velocidades en los arreglos `u` y `v` se procede a efectuar la interpolación del método de características, para garantizar estabilidad, para este caso el código que efectúa el método de Advección, se resume en el método `adveccion`:

```
void adveccion(int b, float[] d, float[] d0, float[] du, float[] dv){
    int i0, j0, i1, j1;
    float x, y, s0, t0, s1, t1, dt0;
    dt0=dt*cx;
    for(int i=1; i<=cx; i++){
        for(int j=1; j<= cy; j++){
```

```

    x=i-dt0*du[ix(i,j)];
    y=j-dt0*dv[ix(i,j)];
    if(x> cx+0.5){
        x=cx+ 0.5f;
    }
    if(x<0.5){
        x=0.5f;
    }
    i0=(int)x;
    i1=i0+1;
    if(y>cy+0.5){
        y=cy+0.5f;
    }
    if(y<0.5){
        y=0.5f;
    }
    j0=(int)y;
    j1=j0+1;
    s1=x-i0;
    s0=1-s1;
    t1=y-j0;
    t0=1-t1;
    d[ix(i,j)]= s0*(t0*d0[ix(i0,j0)]+t1*d0[ix(i0,j1)])+
        s1*(t0*d0[ix(i1,j0)]+t1*d0[ix(i1,j1)]);
}
}
setBoundary(b,d);
}

```

Para garantizar las condiciones de frontera, se programó el método de `setBoundary()`, el cual se describe de la siguiente manera:

```

void setBoundary(int b, float[] x){
    for(int i=1; i<=cx;i++){
        x[ix(0,1)]= b==1 ? -x[ix(1,i)] : x[ix(1,i)];
        x[ix(cx+1,i)]= b==1 ? -x[ix(cx,i)] : x[ix(cx,i)];
        x[ix(i,0)]= b==2 ? -x[ix(i,1)] : x[ix(i,1)];
        x[ix(i, cy+1)]= b==2 ? -x[ix(i, cy)] : x[ix(i, cy)];
    }
    x[ix(0,0)]= 0.5f *(x[ix(1,0)]+ x[ix(0,1)]);
    x[ix(0, cy+1)]= 0.5f * (x[ix(1, cy+1)]+ x[ix(0,cy)]);
    x[ix(cx+1,0)]= 0.5f *(x[ix(cx,0)]+ x[ix(cx+1,1)]);
    x[ix(cx+1,cy+1)]= 0.5f *(x[ix(cx,cy+1)]+ x[ix(cx+1,cy)]);
}
}

```

Donde la variable `b`, se garantiza la condición de frontera, y toma los valores de:

- `b==0` garantiza la condición de frontera para la densidad
- `b==1` garantiza la condición de frontera para la velocidad en  $x$
- `b==2` garantiza la condición de frontera para la velocidad en  $y$

En efecto, como la condición de frontera en el caso implementado es de *frontera reflectiva*, es decir, los vectores de velocidad en los bordes deben cambiar de sentido para que el fluido *rebote*[16]. Adicionalmente, para manejar los sistemas de ecuaciones de ecuaciones lineales que involucran el estado actual del sistema para calcular su estado futuro, se hizo uso del método `swapU`, `swapV` y `swapRho`, que intercambia los arreglos dados:

```

void swapU(){
    temp=u;
    u=antu;
    antu=temp;
}

void swapV(){
    temp=v;
    v=antv;
    antv=temp;
}

void swapRho(){
    temp=rho;
    rho=antrho;
    antrho=temp;
}

```

Conforme al esquema de solución propuesto, se definen los metodos `pasoDensidad` y `pasoVelocidad`:

```

void pasoDensidad(){
    sumarFuenteRho();
    swapRho();
    difusionRho();
    swapRho();
    adveccion(0,rho,antrho,u,v);
}

void pasoVelocidad(){
    float a= dt*viscosidad*(cx+2)*(cy+2);
    sumarFuenteUV();
    swapU();
    solucionLineal(1,u,antu,a,1.0+4.0*a);
    swapV();
    solucionLineal(2,v,antv,a,1.0+4.0*a);
    project(u,v,antu,antv);
    swapU();
    swapV();
    adveccion(1,u,antu,antu,antv);
    adveccion(2,v,antv,antu,antv);
    project(u,v,antu,antv);
}

```

El método `project` efectúa la descomposición de Hodge, sobre un campo vectorial dado:

```

void project(float[] x, float[] y, float[] p, float[] d){
    for(int i=1; i<= cx;i++){
        for(int j=1; j<=cy;j++){
            d[ix(i,j)]=(x[ix(i+1,j)]-x[ix(i-1,j)])/2.0+
                (y[ix(i,j+1)]-y[ix(i,j-1)])/2.0)/(float)cx;
            p[ix(i,j)]=0;
        }
    }
    setBoundary(0,d);
    setBoundary(0,p);
    solucionLineal(0,d,p,1,4);
    for(int i=1; i<=cx; i++){

```

```

    for(int j=1; j<=cy;j++){
        x[ix(i,j)]=cx*(p[ix(i+1,j)]-p[ix(i-1,j)])/2.0;
        y[ix(i,j)]=cy*(p[ix(i,j+1)]-p[ix(i,j-1)])/2.0;
    }
}
setBoundary(1,x);
setBoundary(2,y);
}

```

## 3.2. Resultados

Luego de realizar varias pruebas, estos fueron los resultados:

- La implementación corre multiplataforma y se puede poner en web, gracias al lenguaje escogido.
- El programa trabaja en tiempo real, es decir, se puede simular en vivo el fluido, utilizando los parámetros apropiados, permitiendo interacción con el usuario y cambio de parámetros como el número de iteraciones para Gauss Seidel, el paso del tiempo y los coeficientes de densidad y viscosidad, sin embargo la interfaz gráfica se puede trabajar más.
- La viscosidad afecta el modo como la velocidad se propaga. De las pruebas efectuadas, cuando el coeficiente de viscosidad está entre 0,000001 y ,00001 produce ondas parecidas al humo (Figura 3.6), mientras que si la viscosidad esta entre 0,10 y 0,010, la simulación produce cosas parecidas a Agua (Figura3.7).
- Con menor cantidad de iteraciones en el método de Gauss-Seidel el programa es mas rápido y mantiene buena representación gráfica (Figura 3.8). Sin embargo, con mayor cantidad de iteraciones, sus gráficas son mas nítidas (Figura 3.9) pero es mucho mas lento el programa, su complejidad es de  $n^2$ , donde  $n \times n$  es el tamaño de la matriz.
- Se incluyó un método `void removerRho()` para evitar que el fluido llene toda la pantalla, éste método colabora en gran medida con la solución permitiendo resultados más realistas.
- El factor de fuerza puesto en el método `sumarFuerzas(..)` permite al usuario controlar la fuerza que afecta al fluido, de tal manera que el usuario puede establecer que tanta fuerza se le aplica al fluido en el momento que es afectado por el movimiento del mouse.

## 3.3. Conclusiones

Luego del estudio y desarrollo de la presente tesis, así como la implementación basada en el paper de Jos Stam, aplicando los conocimientos adquiridos durante la carrera de Ingeniería de Sistemas en el Politécnico Gran Colombiano, se puede concluir que:

- Fué de gran utilidad la implementación en Spaghetti, por facilidad en el manejo de los datos necesarios para la solución del problema, a diferencia de haberlo manejado bajo el concepto de Diagramas de Clases u Orientado a Objetos, lo cuál daba un grado de dificultad más alto en el desarrollo de la tesis, y el resultado de la implementación en cualquiera de los dos casos visualmente es el mismo, de igual manera se intentó realizar la implementación bajo un diagrama de clases, lo cual no fue posible por el manejo de los datos y variables, de tal manera que el trabajo futuro que representa puede incluir su programación Orientada a Objetos.
- El esquema es estable en el tiempo, gracias a utilizar métodos estables que convergen rápidamente a una solución y bajo el concepto de diferencias finitas, por más amplios que sean los pasos de tiempo  $dt$ , el simulador funciona mostrando el comportamiento del fluido(contemplando las demás variables que lo afectan). Esto se logra observar en la práctica realizando pruebas con distintos  $t$ , entre más grande sea el paso del tiempo  $dt$ , el fluido desaparece más rápido (gracias al método `removerRho(..)`).

- Los valores se mantienen en  $[0, 1]$  para la densidad y la velocidad entre  $[-F, F]$  donde  $F$  es la norma de la fuerza impresa por el mouse (determinada por el usuario) en las pruebas pero la velocidad depende de cómo se le pone con el mouse.
- El esquema es estable pues se escogieron métodos numéricos que garantizan que converge a la solución (Euler regresivo y método de características). Sin embargo, el parámetro  $t$  afecta la velocidad con la que se generan ondas expansivas, turbulencia y demás.
- El programa no solamente es estable y es rápido (fijando los parámetros apropiadamente), sino que es capaz de producir tanto flujo laminar como flujo turbulento. Véase las figura 3.5 para ver distintas capas de fluido.

### 3.4. Limitaciones

- El dominio es simple (un cuadrado), a la hora de tratar con geometrías más complejas tocaría usar elementos finitos que implican una implementación más compleja que no se puede garantizar que funcione en tiempo real.
- Para realizar la implementación de la solución se manejaron arreglos, en vez de matrices, ya que los recursos de hardware con los que se contaron son limitados e imposibilitaba manejar información contenida en matrices muy grandes.

### 3.5. Trabajo Futuro

Gracias a este estudio preliminar se puede dar inicio a otras investigaciones, para simulaciones reales aplicadas por ejemplo a inundaciones, o comportamientos de la sangre dentro del cuerpo humano, explosiones, o inclusive manejo bajo 3 dimensiones, fijando variables reales de acuerdo a la necesidad del caso a estudiar. Además de una verificación escrita de la correctitud de la implementación.

#### 3.5.1. Apéndice A

Como parte del trabajo futuro mencionado, se encuentra la verificación formal del algoritmo descrito en este documento. Para el comienzo de dicho trabajo se muestra a continuación la precondition y postcondición necesaria para cada uno de los métodos del programa desarrollado[2]:

- Precondición: Los valores de las variables  $x$ ,  $y$ ,  $dx$ ,  $dy$  deben ser  $\geq a 0$ .

```
void sumarFuerza(float x, float y, float dx, float dy)
```

Postcondición: A las posiciones de los arreglos de velocidad  $antu[]$ ,  $antv[]$  se le han sumado y aplicado las fuerzas ejercidas. Estas posiciones son dadas por las variables  $x, y$ .

- Precondición: Los arreglos  $u[]$ ,  $v[]$ ,  $antu[]$ ,  $antv[]$  deben estar inicializados y tener valores  $\geq a 0$ .

```
void difusionUV()
```

Postcondición: Los arreglos  $u[]$ ,  $v[]$ ,  $antu[]$ ,  $antv[]$  han realizado la difusión.

- Precondición: Los arreglos  $\rho[]$ ,  $antrho[]$  deben estar inicializados y tener valores  $\geq a 0$ .

```
void difusionRho()
```

Postcondición: Los arreglos  $\rho[]$ ,  $antrho[]$  han realizado la difusión.

- Precondición: Los valores de las variables  $b$ ,  $a$ ,  $c$  y los arreglos  $x[]$ ,  $x0[]$  deben estar inicializados y tener valores  $\geq a 0$ , además la variable  $numitera$  debe indicar el número de iteraciones definidas para Gauss-Seidel.

```
void solucionLineal(int b, float[] x, float[] x0, float a, float c)
```

Postcondición: Todas las posiciones del arreglo `x[]` se han evaluado sus vecinos, calculando las incognitas y aproximando a la solución con el número de iteraciones definidas para Gauss-Seidel.

- Precondición: La variable `b` debe estar declarada, y los arreglos `d[]`, `d0[]`, `du[]`, `dv` deben estar inicializados y tener valores  $\geq 0$ .

```
void adveccion(int b, float[] d, float[] d0, float[] du, float[] dv)
```

Postcondición: El arreglo `d[]` es recorrido en su totalidad actualizando cada valor, según la densidad de sus vecinos tanto en  $x$  como en  $y$ .

- Precondición: La variable `b` y el arreglo `x[]` deben ser  $0 \leq b \leq 2$  y  $x \geq 0$ .

```
void setBoundary(int b, float[] x)
```

Postcondición: El arreglo `x[]` de velocidad es actualizado de acuerdo a la frontera reflectiva del dominio.

- Precondición: Los arreglos `u[]`, `antu[]` deben estar declarados y con valores  $\geq 0$ .

```
void swapU()
```

Postcondición: Los arreglos `u[]`, `antu[]` deben intercambiar sus valores.

- Precondición: Los arreglos `v[]`, `antv[]` deben estar declarados y con valores  $\geq 0$ .

```
void swapV()
```

Postcondición: Los arreglos `v[]`, `antv[]` deben intercambiar sus valores.

- Precondición: Los arreglos `rho[]`, `antrho[]` deben estar declarados y con valores  $\geq 0$ .

```
void swapRho()
```

Postcondición: Los arreglos `rho[]`, `antrho[]` deben intercambiar sus valores.

- Precondición: Los arreglos `x[]`, `y[]`, `p[]`, `d[]` deben estar declarados.

```
void project(float[] x, float[] y, float[] p, float[] d)
```

Postcondición: Se realiza la descomposición de Hodge y los valores de los arreglos son actualizados.

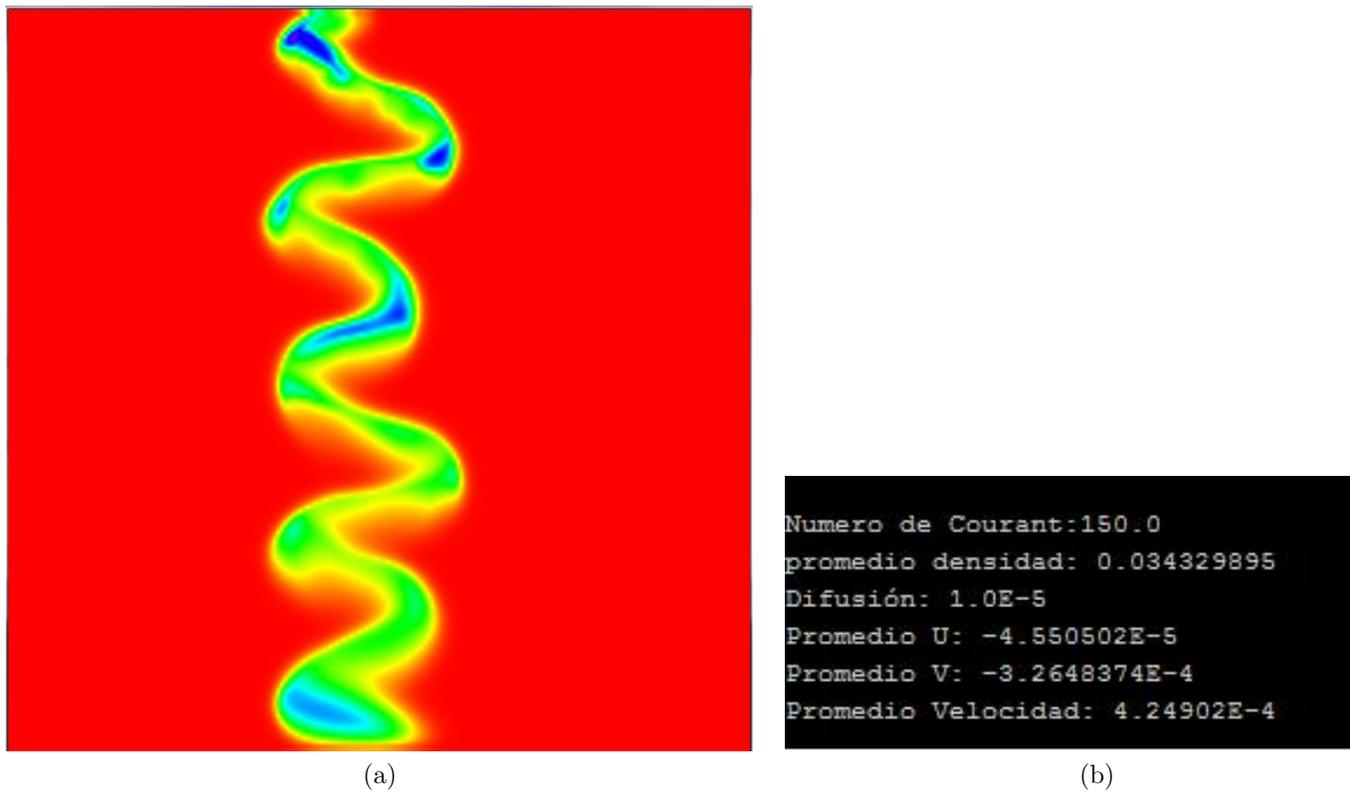


Figura 3.1: Prueba Numero 1: (a) Fluido graficado en esquema HSB, luego de imprimir una fuerza con el mouse, con  $dt=1.5$ , y en una malla de tamaño  $200 \times 200$ , (b) Coeficientes utilizados y valores promedio de la velocidad, tanto en x como en y (promedio U, promedio V respectivamente)

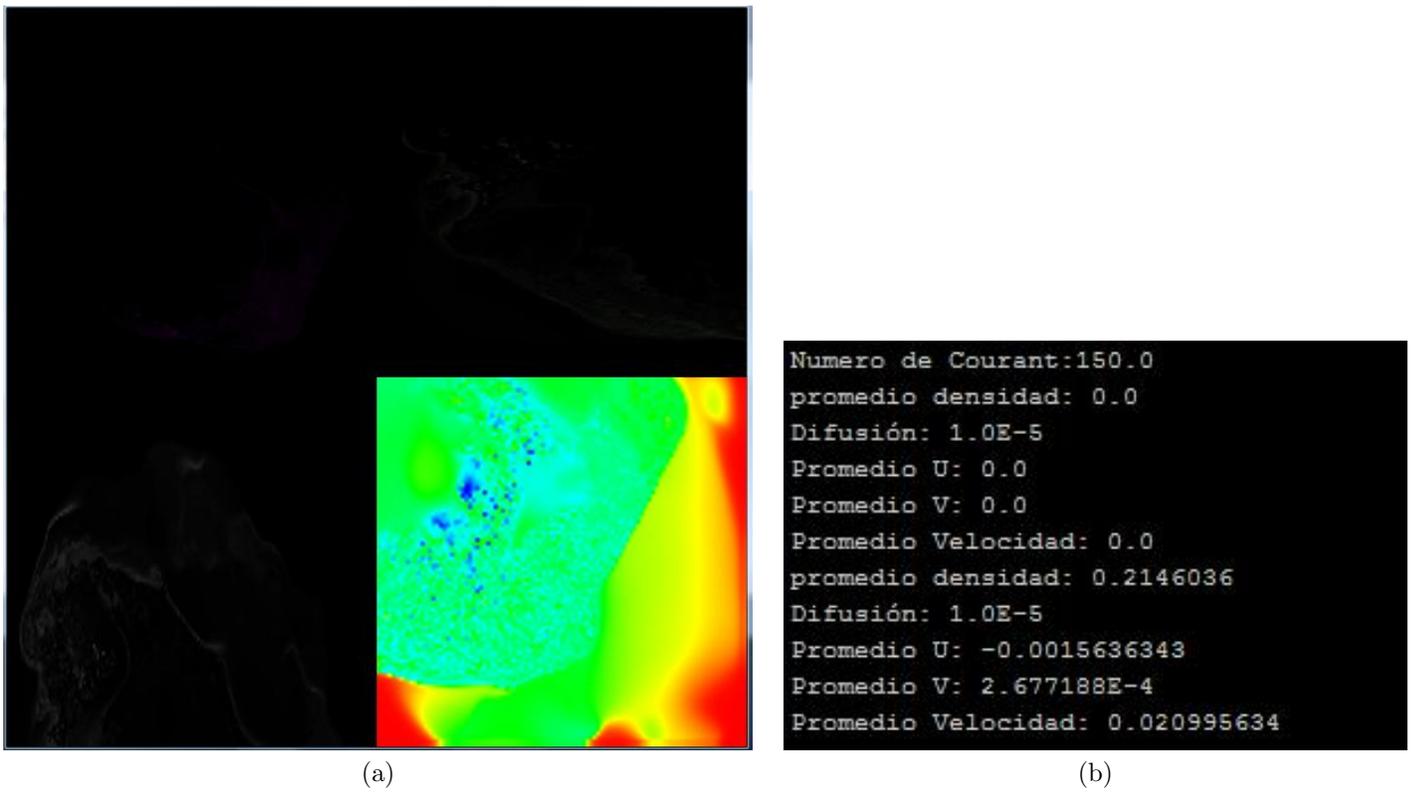
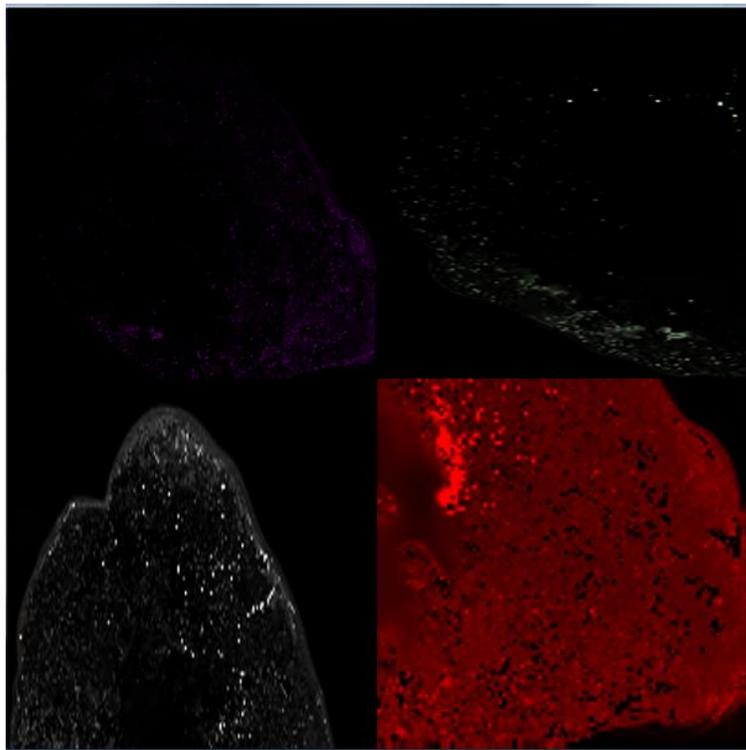


Figura 3.2: Prueba Número 2: (a) Fluido en morado las velocidades en x, en verdoso las velocidades en y, en grises el campo de velocidades, y en colores el campo de densidad, con los parámetros en la parte, (b) utilizando una malla de  $200 \times 200$  y con  $dt=1,5$ .

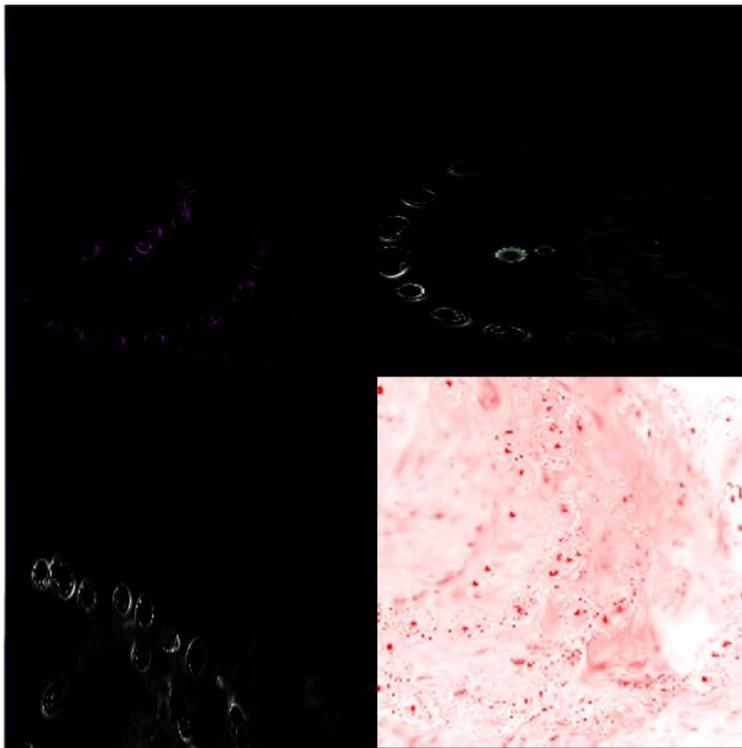


(a)

```
Numero de Courant:150.0
promedio densidad: 0.0
Difusión: 1.0E-5
Promedio U: 0.0
Promedio V: 0.0
Promedio Velocidad: 0.0
promedio densidad: 0.2344742
Difusión: 1.0E-5
Promedio U: 0.0021980107
Promedio V: -0.0053785066
Promedio Velocidad: 0.017155496
```

(b)

Figura 3.3: Prueba Número 3: (a) Fluido en morado las velocidades en x, en verdoso las velocidades en y, en grises el campo de velocidades y en rojo el campo de densidad, con los parámetros en la parte (b) utilizando una malla de  $200 \times 200$  y con  $dt=1,5$ .



(a)

```

float dt=1.5;
float viscosidad=0.00010;
float difusion=0.0000001;
float removervelocidad=0.001;
float desviacionVelocidad;
float desviacionDensidad;
float promedioVelocidad;
float promedioDensidad;
float promedioU;
float promedioV;
int cx=300;
int cy=300;

```

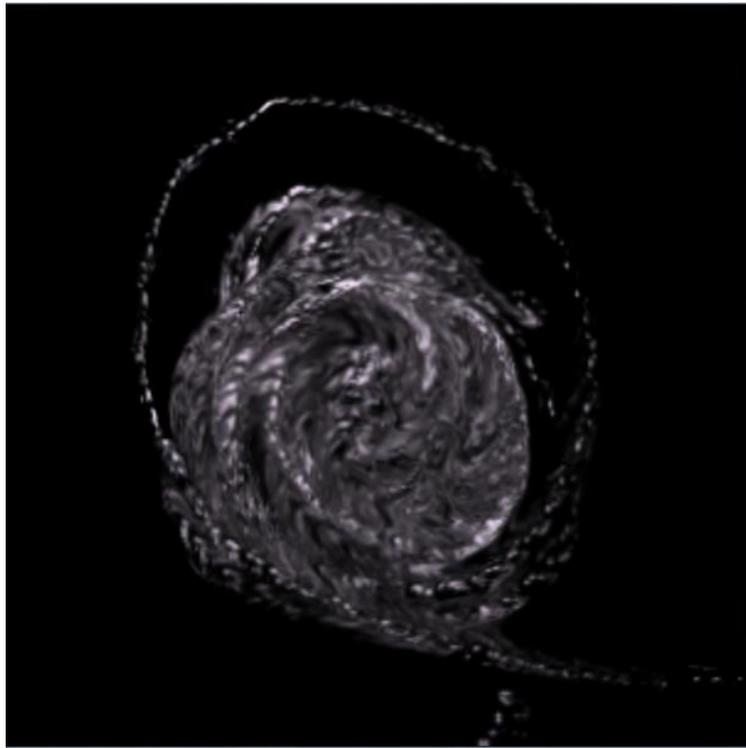
```

Numero de Courant:225.0
promedio densidad: 0.01240743
Difusión: 1.0E-7
Promedio U: 3.3134624E-5
Promedio V: 1.8424056E-5
Promedio Velocidad: 8.874218E-4
promedio densidad: 0.1014553
Difusión: 1.0E-7
Promedio U: -3.3084248E-4
Promedio V: -2.3134288E-4
Promedio Velocidad: 0.0075047445

```

(b)

Figura 3.4: Prueba Número 4: (a) Fluido en morado las velocidades en x, en verdoso las velocidades en y, en grises el campo de velocidades y en rojo y blanco el campo de densidad, con los parámetros en la parte (b) utilizando una malla de  $300 \times 300$  y con  $dt=1,5$ .



(a)

```
float dt=1.5;
float viscosidad=0.00010;
float difusion=0.0000001;
float removervelocidad=0.001;
float desviacionVelocidad;
float promedioVelocidad;
float promedioDensidad;
float promedioU;
float promedioV;
int cx=300;
int cy=300;
```

```
Numero de Courant:225.0
promedio densidad: 0.062094584
Difusión: 1.0E-7
Promedio U: 3.606037E-8
Promedio V: 5.067829E-8
Promedio Velocidad: 2.412461E-7
```

(b)

Figura 3.5: Prueba Número 5: (a) Fluido en escala de grises, con los parámetros en la parte (b) utilizando una malla de  $300 \times 300$  y con  $dt=1,5$ .



Figura 3.6: Experimento 1, con  $dt=1,5$ , viscosidad=0.000001, difusión=0.00001,  $cx=200$ ,  $cy=200$ .

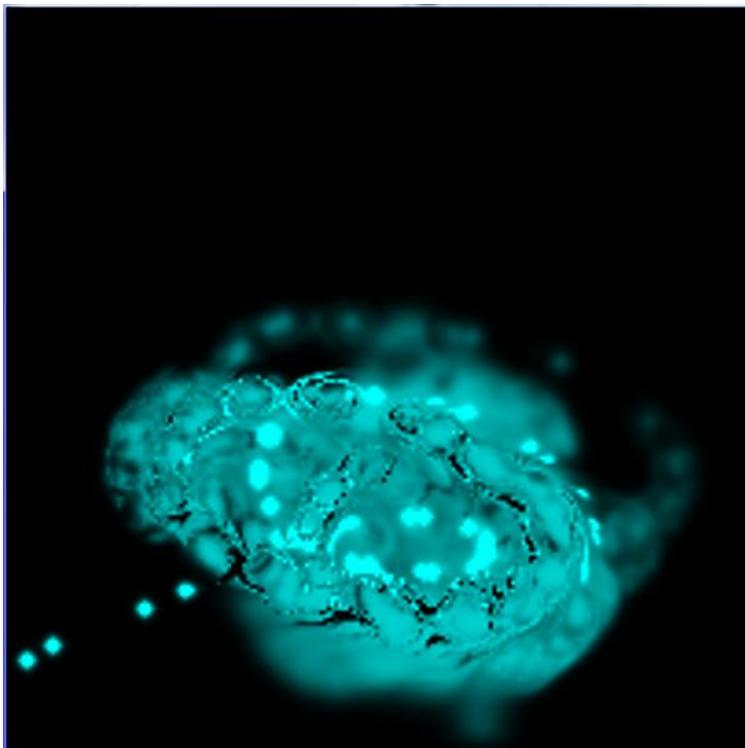


Figura 3.7: Experimento 2, con  $dt=1.5$ , viscosidad=0.10, difusión=0.0010;  $cx=200$ ,  $cy=200$ .

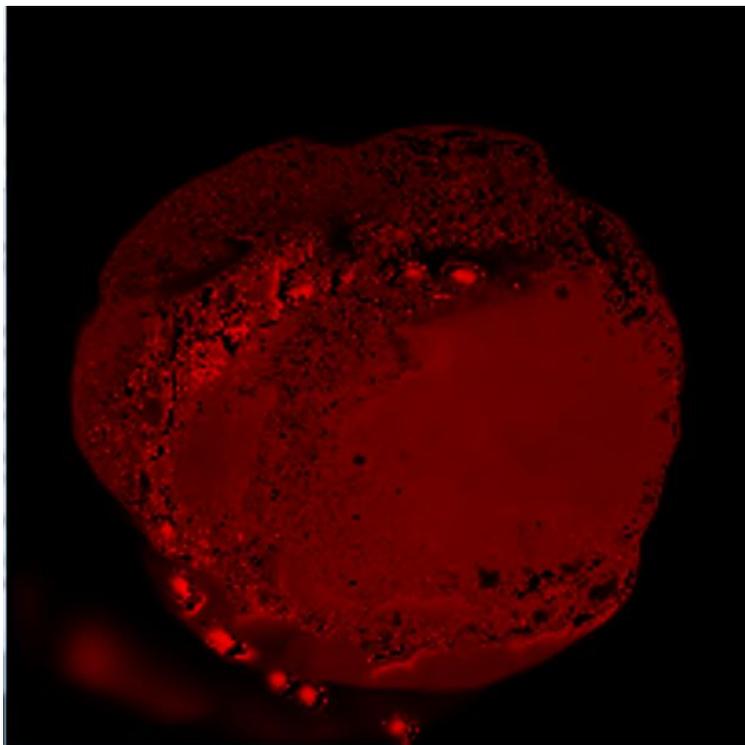


Figura 3.8: Experimento 3, Fluido: en rojo la densidad, con  $dt=1.5$ , viscosidad=0.000010, difusion=0.000010,  $cx=200$ ,  $cy=200$ , iteraciones=20.

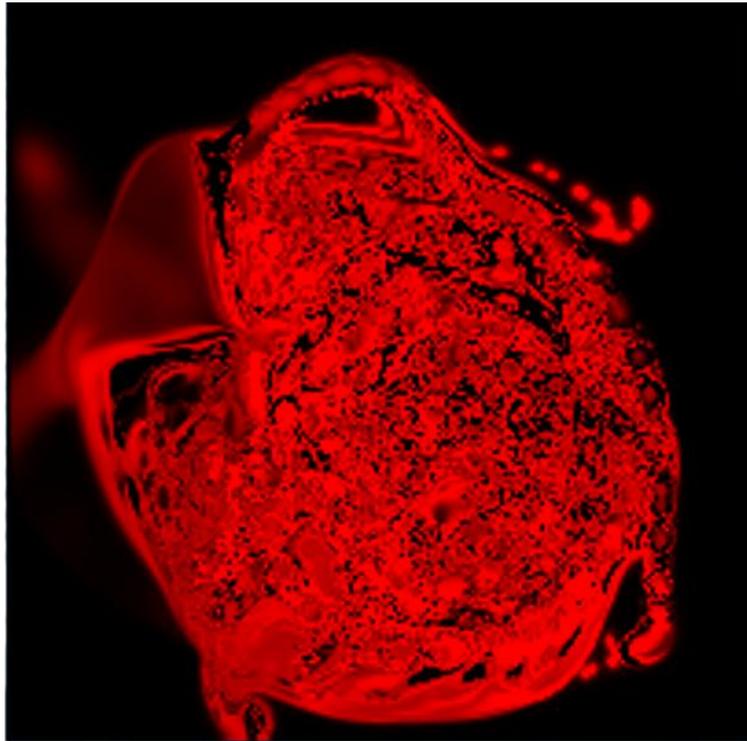


Figura 3.9: Experimento 4, nótese la presencia de flujo laminar en el borde del fluido y de flujo turbulento en el centro de éste, con  $dt=1.5$ , viscosidad=0.000060, difusión=0.000020,  $cx=200$ ,  $cy=200$ , iteraciones=200.

# Bibliografía

- [1] J. Benítez. Breve historia de las ecuaciones diferenciales, 2008.
- [2] J. Bohórquez. *Diseño Efectivo de Programas Correctos*. 1th edition, 2006.
- [3] J. Burden, R. Faires. *Análisis Numérico*. 7th edition, 2002.
- [4] Michael R. Cullen Dennis G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. 6th edition, 2006.
- [5] J. Escobar. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones en maple, 2004.
- [6] M.M.Sternheim J.W. Kane. *Física*. 2th edition, 2007.
- [7] C. Knudsen. Separation in fluid flows, 2006.
- [8] Bridson R. Fedkiw R. Muller-Fischer M. Fluid simulation, 2006.
- [9] Y. Tong S. Lombeyda A.N. Hirani M.Desbrun. Discrete multiscale vector field decomposition, 2003.
- [10] H. Mora Escobar. *Gauss Siedel*. 1th edition, 1994.
- [11] M. Muñoz. Manual de vuelo, 1995.
- [12] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. 5th edition, 1998.
- [13] A. Rivas. Notas de clase: El método de los elementos finitos en la ingeniería, 2008.
- [14] A. Rivas. Notas de clase ecuaciones diferenciales, 2008.
- [15] George F. Simmons. *Ecuaciones Diferenciales*. 2th edition, 1993.
- [16] Jos Stam. Stable fluids, 2008.