

Introducción a las Matemáticas

Introducción a las Matemáticas

Arévalo Diego

Chappe Angélica

Zambrano Martha

Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Departamento de Ciencias Básicas

Bogotá, Enero 2013

Arévalo Ovalle, Diego
Introducción a las matemáticas / Diego Arévalo Ovalle, Angélica Chappe Chappe, Martha Helena Zambrano Valentín; director editorial Eduardo Norman Acevedo.
Bogotá D.C.: Editorial Politécnico Grancolombiano, 2012.

85 p.: il.; 24 cm.

Incluye bibliografía e índice.

ISBN: 978-958-8721-13-2

1. MATEMÁTICAS. 2. MATEMÁTICAS – PROBLEMAS, EJERCICIOS, ETC. I. Tít. II. Arévalo Ovalle, Diego. III. Chappe Chappe, Angélica. IV. Zambrano Valentín, Martha Helena. V. Norman Acevedo, Eduardo, dir.

510 cd. 21 ed.

Sistema Nacional de Bibliotecas - SISNAB
Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano.

©Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano Introducción a las Matemáticas

Autores:

Angélica Chappe

Martha Zambrano

Diego Arévalo

ISBN: 978-958-8721-13-2

E ISBN: 978-958-8721-14-9

Editorial Politécnico Grancolombiano

Calle 57 No. 3 – 00 Este Bloque A Primer piso

PBX: 7455555 ext. 1170

www.poligran.edu.co/editorial

Noviembre de 2012

Bogotá, Colombia

Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano

Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Fernando Dávila Ladrón de Guevara

Rector

Rafael García

Decano Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Eduardo Norman Acevedo

Director editorial

David Ricciulli

Coordinador editorial

Nydia Patricia Gutiérrez

Corrección de estilo

Leonardo López

Diseño y armada electrónica

Juan Gómez

Fotografía portada

Xpress estudio gráfico y digital

Impresión y encuadernación

Impreso y hecho en Colombia

Printed in Colombia

La Editorial del Politécnico Grancolombiano pertenece a la Asociación de Editoriales Universitarias de Colombia, ASEUC.

El contenido de esta publicación se puede citar o reproducir con propósitos académicos siempre y cuando se dé cuenta de la fuente o procedencia. Las opiniones expresadas son responsabilidad exclusiva del autor.

Índice general

1. Conjuntos numéricos	5
1.1. Números naturales y números enteros	5
1.1.1. Números naturales	5
1.1.2. Números enteros	6
1.1.3. Ejercicios	8
1.2. Números racionales	9
1.2.1. Ejercicios	12
1.3. Números irracionales y reales	13
1.3.1. Ejercicios	16
2. Propiedades de los números reales	19
2.1. Potenciación	19
2.1.1. Notación de la potenciación	19
2.1.2. Propiedades de la potenciación	19
2.1.3. Potenciación natural	20
2.1.4. Potenciación entera	20
2.1.5. Potenciación base 10	21
2.1.6. Potenciación racional	22
2.1.7. Ejercicios	23
2.2. Factorización	24
2.2.1. Factor común	24
2.2.2. Una variante del factor común	25
2.2.3. Diferencia de cuadrados	25
2.2.4. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$	26
2.2.5. Suma y diferencia de cubos	27
2.2.6. Ejercicios	28
Ejercicios complementarios	28
Respuestas a los ejercicios complementarios	32

3. Ecuaciones	35
3.1. Ecuaciones de primer grado	35
3.1.1. Ejercicios	37
3.2. Aplicaciones de ecuaciones de primer grado	38
3.2.1. Ejercicios	39
3.3. Sistemas de ecuaciones lineales	40
3.3.1. Ejercicios	42
3.4. Ecuación cuadrática	43
3.4.1. Ejercicios	47
3.5. Ecuaciones no-lineales y no-cuadráticas	48
3.5.1. Ejercicios	51
4. Inecuaciones	53
4.1. Inecuación lineal	53
4.1.1. Ejercicios	56
4.2. Inecuaciones no-lineales	57
4.2.1. Ejercicios	60
Ejercicios complementarios	60
Respuestas a los ejercicios complementarios	62
5. Función	65
5.1. Concepto de función real	65
5.1.1. Ejercicios	67
5.2. Transformaciones de funciones	68
5.2.1. Ejercicios	71
5.3. Generalidades de funciones	73
5.3.1. Ejercicios	76
5.4. Función lineal	76
5.4.1. Ejercicios	79
5.5. Función cuadrática	80
5.5.1. Ejercicios	83
Bibliografía	85

Capítulo 1

Conjuntos numéricos

1.1. Números naturales y números enteros

Se tienen 12 monedas iguales en apariencia, pero una de ellas pesa distinto que el resto. Con todo, no se sabe si pesa más o menos, solo que pesa diferente. El objetivo es descubrirla. Para ello, se cuenta con una balanza de dos platillos. En realidad, es una balanza muy sencilla que solo detecta si lo que se pone en uno de los platillos pesa más, igual o menos que lo depositado en el otro. Nada más. Para descubrir la moneda distinta se pueden efectuar solo tres pesadas. ¿cómo encontrar la moneda del peso diferente?

Problema presentado en el libro “*Matemática ... ¿Estás ahí?*” de Adrián Paenza [3]

1.1.1. Números naturales

Dentro del desarrollo de nuestras actividades diarias, en algunas ocasiones es necesario conocer la cantidad de objetos de un conjunto. Por ejemplo, ¿cuántas canciones puedo almacenar en mi reproductor de música? ¿cuántos amigos están conectados? ¿cuántas horas faltan para salir del trabajo? ¿cuántos días hacen falta para mi cumpleaños? ¿cuántos estudiantes conozco en la clase de matemáticas?

Ejercicio 1. Cite un ejemplo de una situación cotidiana, donde sea necesario contar.

Para dar respuesta a cada uno de los interrogantes anteriores, empleamos números como 2, 5, 7, 11, etc. que pertenecen al conjunto de los números naturales (\mathbb{N}).

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Ejercicio 2. ¿Qué representan los puntos suspensivos en la línea anterior?

Parte 1: Trabajando con los números naturales

Antes de iniciar “las cuentas”, es indispensable detenerse en el concepto: **término de una expresión algebraica**, en particular, de una expresión aritmética. La idea en este punto es, identificar cuáles son los términos en una expresión.

Un **término algebraico** es el producto entre un elemento de un conjunto numérico y símbolos de constante o de variable. Por ejemplo: 7 , $5(9-3)$, $3xy$, $-5a$, $7cab$, $(3a-b)$ son términos algebraicos, mientras que $3a-b$ no lo es.

Dos **términos algebraicos son semejantes** si los símbolos de constante o variable presentes en cada uno son los mismos, con igual potencia. Por ejemplo: abc es semejante a $-5abc$ y $-\frac{3}{14}x^2z$ es semejante a $5zx^2$, mientras el término $-6ax$ no es semejante a $\frac{1}{3}bx$, ni $9xy^3z$ es semejante a $-xyz$.

Un término o la adición de términos algebraicos se denomina una **expresión algebraica**, por ejemplo, $5x^2y$ es una expresión de un solo término y $3a-b$ es la adición entre los términos $3a$ y $-1b$.

En el conjunto de los números naturales están definidas las operaciones: adición y multiplicación, y sobre éstas, algunas propiedades. Antes de presentarlas formalmente, se hará una primera aproximación a ellas.

Ejercicio 3. En cada una de las siguientes expresiones algebraicas, indique cuántos términos hay y señálelos (no efectúe operaciones):

- | | |
|---------------------------------|--|
| i) $2 + 3(5 + 2) + 4 + (3 + 1)$ | iv) $3(7 + 6(5 + 2)4)$ |
| ii) $5(9 + 6) + 3(10 + 2)$ | v) $4x + 3(7x + 2(3 + 4))$ (x es natural) |
| iii) $273 + (8 + 6)4 + 377$ | vi) $7ab + 3a(5b + 6) + 1 + (11b + 11)2a$ (a y b son naturales) |

Ejercicio 4. Retome el ejercicio anterior y ahora sí, efectúe las operaciones indicadas (no emplee calculadora).

Aunque los números naturales permiten responder a situaciones de conteo, otros escenarios exigen representaciones distintas, específicamente, aquellas en donde se requiere un punto de referencia (el número cero) y otros números “contrarios” a los naturales. Esto exige disponer de un nuevo conjunto: el de los *números enteros*.

1.1.2. Números enteros

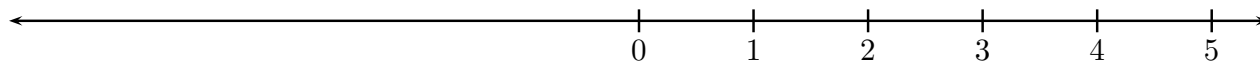
Parte 2: Un nuevo conjunto

Lea detenidamente las siguientes frases:

- La temperatura en un refrigerador es de tres grados bajo cero.
- La empresa XYZ presenta este mes en su balance, pérdidas por \$20.000.000.
- Sócrates nació en el año 470 a.C.
- El señor Alberto adquirió una deuda de \$5.000.000.

Al tratar de representar mediante números naturales las afirmaciones anteriores, aparecen algunas limitaciones de este conjunto que se resolverán haciendo una “extensión” al sistema de los naturales.

Sobre la siguiente recta numérica se representan los números naturales y el cero:



El número cero (0) determina un punto de referencia (origen)

Ahora, para cada número natural n se construye un punto localizado a la izquierda del origen y que esté a la misma distancia de 0 que n . A este punto se denota como $-n$ y se hará referencia a él como el *opuesto de n* .

Por ejemplo, sea $n = 3$, entonces el opuesto de 3, el cual denotamos por -3 , está representado por el punto localizado tres unidades a la izquierda de 0.

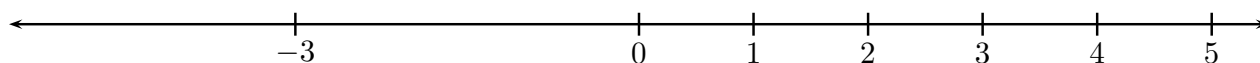


Figura 1.1: Localización del opuesto de 3

Aunque la noción de opuesto se construye para números naturales, esta definición se puede emplear de un modo más general y así cuestionarse por la ubicación del opuesto, por ejemplo, de -7 . De acuerdo con lo expuesto, el número localizado a la derecha de cero que esté a la misma distancia de 0 que -7 es el número 7, es decir, el opuesto de -7 es 7.

Ejercicio 5. Indique y localice el opuesto de -3 y 5.

Parte 3: Propiedades de la operaciones

El conjunto de números conformado por los números naturales, sus opuestos y el cero es denominado el *conjunto de los números enteros* y se describe como $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Propiedad. Para cada número entero n y su opuesto $-n$ se cumple $n + (-n) = 0$.

Como en el caso de los números naturales, en el conjunto de los números enteros están definidas las operaciones de adición y multiplicación; algunas de sus propiedades se presentan a continuación.

Sean a , b y c números enteros:

■ $a + (b + c) = (a + b) + c$

Ejemplo: Si $a = 1$, $b = -3$ y $c = -2$ entonces

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= 1 + (-3 + (-2)) \\ &= 1 + (-5) \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= (1 + (-3)) + (-2) \\ &= (-2) + (-2) \\ &= -4 \end{aligned}$$

■ $a + b = b + a$

■ $a \cdot b = b \cdot a$ *

■ $a + 0 = 0 + a = a$

■ $-(-a) = a$

*En la literatura, se representa la multiplicación entre los números a y b por la expresión $a \cdot b$, ab , $(a)(b)$ o $a(b)$.

- $a + (-a) = 0$
- $a1 = 1a = a$
- $a(bc) = (ab)c$
- $a(b + c) = ab + ac$

Ejercicio 6. Identifique los términos de cada expresión algebraica y posteriormente emplee las propiedades mencionadas para simplificar (a, b y c representan números enteros).

- i) $3 + 4(-2 + 5) - (3 - 7)4$
- ii) $2 + (a + b)c - 3c(a + 2)$
- iii) $1(3 + b + 0)(-4) + 2(-a)5 - (-2)$
- iv) $-(b(-c(a - 3)))$

Ejercicio 7. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique su respuesta con un ejemplo, si la afirmación es falsa; en caso contrario, construya un argumento válido.

- i) Todo número entero es un número natural.
- ii) $a - b = b - a$ para todos los números enteros a y b .

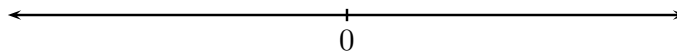
Parte 3: Una aplicación

Ejercicio 8. Encuentre la solución a los siguientes problemas. Escriba su procedimiento.

- i) Manuel ha invertido \$127.000 en la bolsa, la primera semana ganó \$12.000, la segunda semana perdió \$115.000, la tercera semana ganó \$17.000 y la cuarta semana perdió \$ 70.000. ¿Cuál es la utilidad** de Manuel en esta inversión?
- ii) Dos trenes A y B parten de una misma estación en direcciones opuestas. Luego de tres horas, el tren A está ubicado a 300 kilómetros de la estación y el tren B está ubicado a 557 kilómetros de la estación. ¿En cuántos kilómetros supera el tren B al tren A , durante las tres primeras horas después de que ha partido de la estación? ¿cuál es la distancia entre los trenes al cabo de las tres primeras horas?
- iii) Determine cuatro números enteros consecutivos cuya suma sea -2 .

1.1.3. Ejercicios

- i) Sobre la siguiente recta, localice el opuesto de -7 , 11 y -8 :



- ii) Cite un ejemplo de las siguientes propiedades de las operaciones en el conjunto de los números enteros:
 - a) Para todo número entero a el valor de $a \cdot a$ es igual al valor de $(-a)(-a)$.
 - b) Para todo par de números enteros a y b existe un número entero c , tal que $a + c = b$.
- iii) Identifique los términos de cada expresión

** La utilidad puede ser positiva, negativa o cero. En el primer caso nos referiremos a ganancia, en el segundo a pérdida y el último a un estado de equilibrio.

a) $2 - 3(2 + 5(1 + 3))$

d) $(5 - 6)7 - 7(3 - 4)$

b) $2(3 - 5 \cdot 5) - 6(2 - 3)$

e) $x - y(2 - x)(-5) - 5xy - x$

c) $(-2)(-2)(-3)(-2)(-3)$

f) $-(5 - x)3 - 6(-2)(x - 1) + (x - y)$

iv) Simplifique las expresiones del ejercicio anterior.

v) Resuelva los siguientes problemas:

a) Expresar -5 como la suma de tres enteros, ninguno de ellos puede ser cero.

b) ¿Cuál es el signo del producto de 50 números enteros, si la mitad de ellos son negativos?

c) Camilo decide invertir 100 dólares en la bolsa durante un día. Si el movimiento de su cuenta fue el siguiente:

Hora	Ganó	Perdió
10:00	25	
12:00		75
14:00		15
14:30	32	
15:30		90

¿Cuál es el saldo al final del día?

d) ¿Cuál es el número entero, menor que -15 , mayor a -23 y múltiplo de 7 y 3?

1.2. Números racionales

Hasta ahora se han estudiado los números naturales y los números enteros. En esta sección se presenta un conjunto de números que permite responder interrogantes como: se dispone de \$2.000.000 para repartir entre tres personas, ¿cuál es la cantidad que le corresponde a cada persona, si asumimos que cada uno recibe lo mismo que los demás? De manera similar, si un terreno de siete hectáreas se desea dividir en tres partes iguales para cultivar tres productos diferentes, ¿cuál es el área de cada división?

Parte 1: Una nueva construcción

Observe la siguiente figura:

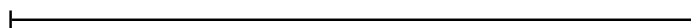


Figura 1.2: Segmento unitario

Si se divide este segmento en tres partes iguales, se obtiene:

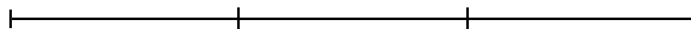
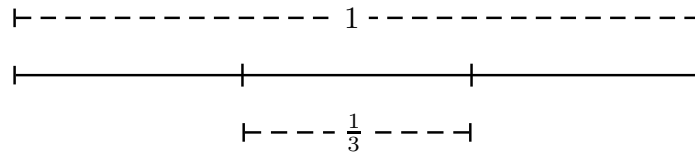


Figura 1.3: Segmento dividido

Al definir como *uno* la medida del segmento de la figura 1.2, una pregunta sería: ¿cómo definir la medida de los segmentos presentes en la figura 1.3? Es claro que la medida de éstos no puede corresponder

a ningún número entero porque _____. Por lo tanto, se debe recurrir a un conjunto de números que permita representar situaciones como ésta.

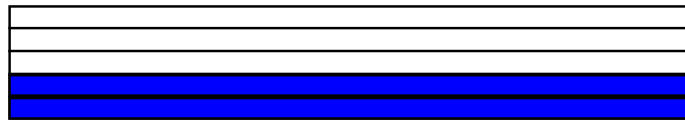
Para responder al interrogante anterior, se denotará por $\frac{1}{3}$ (se lee “un tercio”) la medida de cada uno de los segmentos presentes en la figura 1.3. Así, la situación estaría representada por:



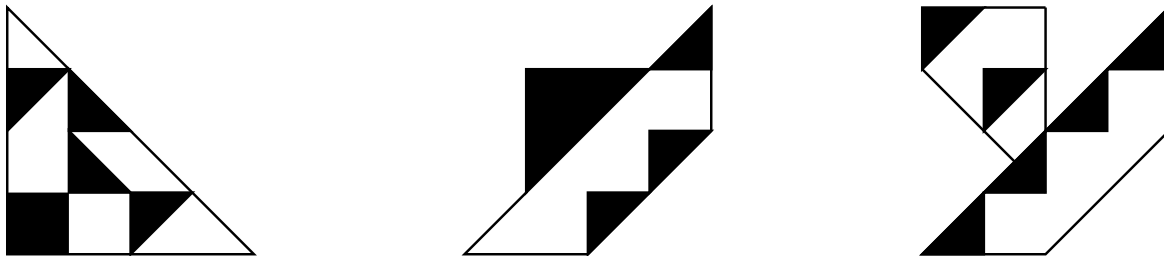
La unidad de medida no necesariamente corresponde a un segmento de recta. Por ejemplo, al considerar como unidad la figura siguiente:



Una forma de representar $\frac{2}{5}$ es dividirla en cinco partes iguales y sombrear dos de ellas:



Ejercicio 1. Represente numéricamente las regiones sombreadas y no sombreadas, con respecto a cada figura.



Los números hasta aquí construidos pertenecen al conjunto de los números racionales, el que se denota por \mathbb{Q} .

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

No sólo en el estudio de figuras aparecen estos números, también en situaciones como:

- De cada 22 estudiantes de Ingeniería, tres hacen doble titulación.
- Las tres quintas partes de un enjambre de abejas se posa sobre una flor de Kadamba.
- De cada 135 libros en una biblioteca, cuatro son de matemáticas.

Ejercicio 2. Represente con un número racional cada una de las situaciones anteriores.

Parte 2: Operaciones

Así como en el conjunto de los números enteros, en los números racionales también se definen operaciones básicas: suma, multiplicación y división; éstas se revisan a continuación.

Suma y resta:

- i) Si los fraccionarios son homogéneos, es decir, tienen igual denominador, el resultado de la suma corresponde al fraccionario cuyo numerador es la suma de los numeradores y el denominador, al denominador común.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} - \frac{9}{4} + \frac{1}{4} &= \frac{3 - 9 + 1}{4} && \text{(Fraccionarios homogéneos)} \\ &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

- ii) En el caso de fraccionarios no-homogéneos, se debe amplificar*** cada fracción con el fin de obtener fraccionarios homogéneos y proceder como en el numeral anterior. La amplificación de cada fraccionario se realiza de tal manera que cada una de las fracciones resultantes tenga como denominador, al mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} - \frac{7}{5} + \frac{1}{6} &&& \text{(El mínimo común múltiplo de 3, 5 y 6 es 30)} \\ = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} - \frac{7 \cdot 6}{5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 5}{6 \cdot 5} &&& \text{(Amplificación de cada fracción)} \\ = \frac{20}{30} - \frac{42}{30} + \frac{5}{30} \\ = \frac{20 - 42 + 5}{30} \\ = -\frac{17}{30} \end{aligned}$$

Multiplicación y División: Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos números racionales ($b, d \neq 0$), entonces

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \text{ con } , c \neq 0$$

Estas operaciones también cumplen las propiedades presentadas en el conjunto de los números enteros.

Ejercicio 3. En cada una de las siguientes expresiones algebraicas, determine cuántos términos hay, opere y simplifique (no use calculadora):

- i) $\frac{5}{11} - \frac{5}{11} \left(\frac{7}{3} - 14 \right)$
- ii) $\frac{3}{4} - \frac{1}{10} \left(3 + 4 \div \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$
- iii) $2a - 3(b + a)$, si $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3} \div a$.

Parte 3: Una aplicación

Las dos quintas partes de un presupuesto se destinan para la adquisición de maquinaria; las tres décimas partes del presupuesto se invierten en la compra de equipos de oficina; con una quinta parte se paga nómina y con el resto se cubren gastos administrativos. Si estos gastos corresponden a \$ 3.000.000, ¿cuál es el total del presupuesto?

Antes de responder el interrogante planteado es importante tener en cuenta los siguientes dos aspectos:

- Los datos que corresponden a las gastos de maquinaria, equipos de oficina y pago de nómina están dados en fracciones, referentes al presupuesto total.

*** Para amplificar una fracción se multiplica el numerador y el denominador por un mismo número entero, que no sea cero.

- Los gastos administrativos se presentan en unidades monetarias.

Ahora, para dar solución al problema:

- Calcule qué parte del total del presupuesto se invierte en maquinaria, equipos de oficina y pago de nómina.
- De acuerdo al resultado anterior, ¿con qué fraccionario se pueden representar los gastos administrativos?
- Por lo tanto, si un décimo del presupuesto corresponde a \$ 3.000.000, diez décimos, que representan el total del presupuesto, ¿a cuánto dinero corresponden?

Ejercicio 4. Un granjero ha dividido su hacienda en cuatro partes: la primera, corresponde a $\frac{2}{15}$ del total de la hacienda y lo ha destinado para el cultivo de rosas rojas; la segunda es $\frac{2}{5}$ del total de la hacienda y lo ha destinado para el cultivo de rosas blancas; la tercera equivale a un tercio del total de la hacienda y ha decidido que sea un invernadero. Si el terreno restante corresponde a 84 hectáreas, ¿cuál es el área total de la hacienda?

Una nota sobre porcentajes

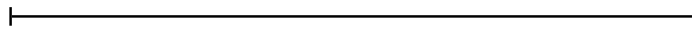
Si un objeto o un total de objetos se divide en 100 partes iguales, el *porcentaje* es una forma de expresar cada una de estas partes y se denota utilizando el símbolo %. Por ejemplo, el 37 % de descuento en un artículo cuyo precio es \$15.250, significa que por cada \$100, se descuentan 37 sobre el precio original. El 37 % equivale al fraccionario $\frac{37}{100}$.

Ejercicio 5. En una población de 7.000 habitantes, el 80 % tiene 18 años o más.

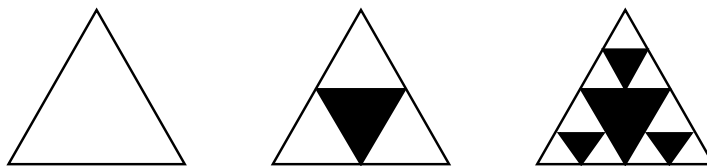
- ¿Cuántas personas son mayores de edad?
- Si 2.500 son mujeres, ¿a qué porcentaje de la población corresponde este grupo?

1.2.1. Ejercicios

- Tomando como unidad la siguiente figura, represente $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$.



- Represente con un número racional las siguientes regiones sombreadas y no sombreadas, recuerde que cada figura representa la unidad:



- En cada una de las siguientes expresiones algebraicas: identifique los términos que la componen, luego opere y simplifique (no emplee calculadora)

- $2\left(\frac{5}{7} - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-10}{6}\right)$
- $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\left(2 - \frac{4}{3}\right)\left(1 + \frac{7}{2}\right)$
- $-\frac{5}{2} \div \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{6}\right) - \frac{5}{3} + 1$
- Si $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{-2}{7}$ y $c = \frac{3}{4}$ determinar $a + b - 2(c - a - b) \div b$
- $\frac{3xy}{2} - \frac{1}{3}x(y - 15) + \frac{1}{4}(x - 8)\left(\frac{-6}{5}\right)$
- $6\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}y\right) - (x - 3)\left(y + \frac{5}{6}\right)$

iv) En cada caso responda el (los) interrogante(s) planteado(s).

- a) Dos automóviles A y B hacen un mismo trayecto de 572 km. El automóvil A lleva recorridos los $\frac{5}{11}$ del trayecto cuando el B ha recorrido los $\frac{6}{13}$ del mismo. ¿Cuál de los dos va primero? ¿Cuántos kilómetros ha recorrido cada uno?
- b) Una empresa tiene un presupuesto anual de \$15.000.000 y decide invertir el 35 % de su presupuesto en publicidad, de la parte restante invierte un 20 % en mantenimiento de equipos. ¿Qué porcentaje del presupuesto dispone para otros gastos?
- c) El precio de un artículo se modifica de la siguiente manera: primero se incrementa el 10 % y luego sufre un descuento del 10 %, ¿En qué porcentaje varía el precio original del artículo?****
- d) En las elecciones locales celebradas en un pueblo, $\frac{3}{11}$ de los votos fueron para el partido A, $\frac{3}{10}$ para el partido B, $\frac{5}{14}$ para C y el resto para el partido D. Si el total de votos ha sido 30.800, ¿cuál es el número de votos obtenidos por cada partido? ¿a cuánto ascienden las abstenciones, sabiendo que el número de votantes representa $\frac{5}{8}$ del censo electoral?
- e) De un pozo inicialmente lleno se saca un día la cuarta parte y luego la tercera de lo que quedaba, quedando finalmente 450 m³. ¿Cuál es la capacidad total del pozo?
- f) Un obrero construye un muro de ladrillos en 8 horas. Si su aprendiz trabajando solo tarda 12 horas, ¿cuál es la fracción del muro que construyen juntos trabajando 4 horas? ¿cuánto tiempo tardarán juntos en construir todo el muro?
- g) Un ejecutivo de una empresa gasta su sueldo de diciembre de la siguiente manera: un quinto lo invierte en alimentación; el 10 % de lo restante en ropa y dos tercios de lo restante en un viaje. Por último, le sobran \$6.000.000, ¿cuánto invierte en ropa?
- h) Las notas acumuladas de un estudiante en su curso de matemáticas durante el primer periodo, que equivale al 30 % de la nota final, son: *quiz*: 3,7 (10 %); proyecto de aula: 4,2 (5 %) y parcial: 1,2 (15 %).
 - ¿Qué nota obtendrá el estudiante en el primer corte?
 - Si la nota del segundo corte, cuyo valor es el 30 % de la nota definitiva, fue 2,1, ¿cuál debe ser la nota del corte para aprobar la asignatura con la nota mínima, es decir, con 3,0?

1.3. Números irracionales y reales

Parte 1: Una nueva representación de los números racionales

En la sección 1.2 se estudió el conjunto de los números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

**** Reduce el 1 %

Es decir, el conjunto de números de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

Ahora, si cada número racional $\frac{a}{b}$ se relaciona con el *cociente* entre a y b , se obtiene una nueva representación de estos números, la cual se denomina *representación decimal*.

Cada número racional $\frac{a}{b}$ está representado de manera única por un número decimal finito o un número decimal infinito periódico, que se obtiene al realizar el cociente entre a y b .

Ejercicio 1. Complete la siguiente tabla:

$\frac{a}{b}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{-5}$	$\frac{-7}{9}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{5}{11}$
Cociente entre a y b	0,2					
Tipo de decimal	Finito					

Cuadro 1.1: Representación decimal

Una nota sobre números decimales periódicos: Una forma de simplificar la escritura de los números decimales periódicos es emplear el símbolo “ $\overline{\quad}$ ” sobre el bloque de números que se repiten. Por ejemplo, el número $3,1415151515\dots$ se simplifica por $3,14\overline{15}$; el número $-3,121121121\dots$ se simplifica por $-3,\overline{121}$; el número $0,2222\dots$ se simplifica por $0,\overline{2}$.

Ejercicio 2. Simplifique la escritura de los números periódicos que aparecen en la tabla 1.1.

Parte 2: Números irracionales

Números como los siguientes:

$$\begin{aligned} &12,568974563215411\dots \\ &-125,10100100010000\dots \\ &-0,25689876240896\dots \end{aligned}$$

Se denominan *decimales infinitos no periódicos* y pertenecen al conjunto de los números irracionales, el cual se denota por \mathbb{I} , es decir,

$$\mathbb{I} = \{x \mid x \text{ es un número decimal infinito no periódico}\}$$

Ejercicio 3. Cite tres ejemplos de números irracionales.

Otros ejemplos de números irracionales son $\pi, e, \phi, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \dots$ ****, algunos de ellos conocidos por el lector; estos aparecen en diferentes contextos como geometría y finanzas.

Ejercicio 4. Clasifique los siguientes números como irracionales o racionales

- i) $2,2563\overline{45}\dots$ _____
- ii) $-1242,76$ _____
- iii) $0,001000100001\dots$ _____
- iv) $1,737215923624\dots$ _____
- v) 0 _____

**** también las raíces inexactas son números irracionales

vi) -126 _____

Hasta aquí se han revisado los siguientes conjuntos numéricos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} = \{x \mid x \text{ es un número decimal finito o infinito periódico}\}$$

$$\mathbb{I} = \{x \mid x \text{ es un número decimal infinito **no** periódico}\}$$

Parte 3: El conjunto de los números reales \mathbb{R}

Todo número decimal es un número racional o un número irracional. Si se construye la unión entre estos dos conjuntos, se obtiene el *conjunto de los números reales* y se denota por \mathbb{R} , luego:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Este conjunto estará presente en todos los conceptos del curso, y será una herramienta esencial en el desarrollo de actividades prácticas. Entre otras, estas razones motivan hacer un estudio más detallado de este conjunto.

Representación de los números reales

Una forma de representar el conjunto de los números reales es a través de una recta que, se denomina *recta numérica*, tal como se presentó en la sección 1.1.2. Se debe destacar que sobre la recta numérica se puede representar cualquier número real y que todo punto de la recta numérica corresponde con un número real.

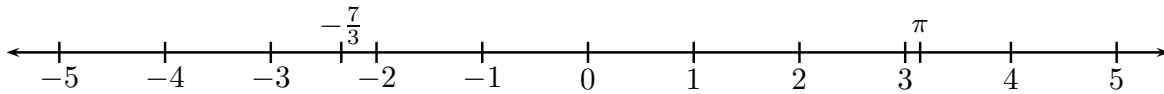


Figura 1.4: Recta numérica

Ejercicio 5. Represente en la recta numérica los siguientes números: $-1, 2; 2, 36; 2\pi; \sqrt{2}; 2, \overline{26}$ y $-0,001$

Algunas definiciones:

- Se denominan números *reales positivos* a los números ubicados a la derecha del origen en la recta numérica.
- Se denominan números *reales negativos* a los números ubicados a la izquierda del origen en la recta numérica.

Parte 4: Propiedades y aplicaciones

Sobre el conjunto de los números reales \mathbb{R} se definen dos operaciones, suma y producto, notadas $+$, \cdot respectivamente, las cuales satisfacen las siguientes propiedades:

Propiedades de la suma

- $a + b = b + a$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$
- $a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$
- $a + (-a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$

Propiedades del producto

- $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$
- $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$
- $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

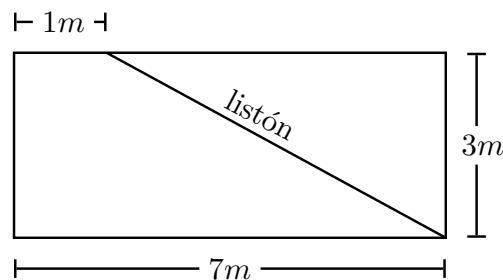
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ para todo } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 6. Simplifique, sin utilizar calculadora, cada una de las siguientes expresiones:

- i) $-4 + 2(3,1 + 0,5) - 1$
- ii) $a(b - 2c) + b(-a + \frac{1}{b}) - (ca + 1)$ donde a, b, c representan números reales, con b diferente de cero.
- iii) $a(b - 2)3 - 2ba + a$ donde a y b representan números reales.
- iv) $\pi(2 - 0,5) + 3,5\pi - 2,25$

Ejercicio 7. Resuelva los siguientes interrogantes, escriba su procedimiento:

- En un tanque de agua hay 540 litros. Si se sacan 184,5 litros, después otros 128,75 litros y finalmente se depositan 102,5 litros de agua, ¿qué cantidad de agua queda en el tanque?
- Horacio cuenta con 18 dólares y por cada día que pasa, gasta la mitad del dinero que tenía el día anterior, es decir, el primer día gasta 9 dólares, el segundo 4,5 dólares y así sucesivamente. ¿Cuánto dinero gasta el décimo día?, ¿cuánto ha gastado al cabo de los primeros diez días? [Sugerencia: Realice el cálculo utilizando racionales]
- Se desea colocar un listón sobre una piscina, como lo muestra la figura. Si las dimensiones de la piscina son 7 m de largo y 3 m de ancho, ¿cuál debe ser la longitud del listón?



1.3.1. Ejercicios

- i) Clasifique los siguientes números y utilice una X para marcar a qué conjuntos numéricos pertenecen:

	Natural	Entero	Racional	Irracional	Real
45					
23,10100100010000...					
$\frac{4}{3}$					
-25					
$0, \overline{45}$					
-126					

- ii) Represente en una recta numérica los siguientes números reales: $-3, \overline{5}; -3\pi; e; \sqrt{7}; -3,5; 0,15$
- iii) Simplifique las siguientes expresiones, donde a, b y c son números reales:

- $-3, 12 + \pi(2, 45 + 1, 35)$
- $2 + 3(a + b)c$
- $2 + 4, 56(3, 14 + 7)$
- $\frac{3}{4} - 2(3, 16 + 4, 78)$
- $a(b + c) - ca - b$
- $0, 001(312, 1 - 4, \overline{15})$

iv) Plantee y resuelva los siguientes ejercicios:

- Camilo va de compras al supermercado y adquiere los siguientes elementos:

Producto	Cantidad	Valor unitario
Aceite (litro)	2	1.450,25
Arroz (libra)	10	756,23
Atún (lata)	4	1.457,24

¿Cuánto cancela en total Camilo?

- Si un automóvil se desplaza sobre una carretera a una velocidad de 47,5 km por hora, ¿qué distancia recorre en una hora y 30 minutos? ¿qué distancia recorre en una hora y 18 minutos?
- Dos trenes A y B parten de una misma estación. El tren A se dirige hacia el norte, mientras el B se dirige al occidente. Si el tren A está ubicado a 6 km de la estación y el tren B a 4 km, ¿cuál es la distancia entre ellos?

Capítulo 2

Propiedades de los números reales

2.1. Potenciación

Tradicionalmente las cantidades que requieren muchos dígitos, como la distancia entre estrellas, la cantidad de células en el cuerpo humano o el producto interno bruto se expresan mediante una notación que permita su fácil manipulación. Esta representación se conoce como *notación científica* y es una aplicación de la potenciación.

2.1.1. Notación de la potenciación

En la expresión a^p , donde a y p son números reales, al número a se denomina *base* y a p , *exponente*. La expresión a^p se lee “ a elevado a la p ”, o simplemente “ a a la p ”.

La expresión a^p existe cuando p es un número real y a un real positivo. Si p es un número entero diferente a cero, entonces a^p existe para toda base a , diferente de cero.*

Ejercicio 1. Determine si las siguientes expresiones tienen sentido o no, justificando su respuesta a partir de lo anterior:

i) $2^{\frac{2}{3}}$

iii) $(1, 1213141516 \dots)^3$

ii) $(-2)^{1.2}$

iv) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$

2.1.2. Propiedades de la potenciación

1) $a^1 = a$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

2) $a^0 = 1$

3) $(ab)^p = a^p b^p$

7) $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

4) $a^p a^q = a^{p+q}$

5) $(a^p)^q = a^{pq}$

8) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

*Las expresiones 0^0 y 0^p cuando p es entero negativo no existen, sin embargo 0^p para p entero positivo sí existe.

Las propiedades anteriores siguen siendo válidas, siempre que la expresión donde se use esté definida.

2.1.3. Potenciación natural

En caso de que p sea un número natural, la expresión a^p corresponde simplemente a una contracción de la multiplicación del factor a consigo mismo p veces. Es decir, $a^p = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{p\text{-veces}}$, por ejemplo:

$$\text{i) } \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2^4}{5^4}.$$

$$\text{ii) } 3^8 \cdot 3^7 = \underbrace{3 \cdot \dots \cdot 3}_{8\text{-veces}} \cdot \underbrace{3 \cdot \dots \cdot 3}_{7\text{-veces}} = \underbrace{3 \cdot \dots \cdot 3}_{(8+7)\text{-veces}} = 3^{8+7} = 3^{15}$$

Las propiedades de las potencias y su notación no excluyen ni modifican las propiedades de la suma ni de la multiplicación.

Una aplicación de la potenciación natural.

En un examen se detecta cáncer a un paciente y se estima que la cantidad de células en el tumor es 6.650.400. Si cada célula cancerígena se duplica por minuto,

- i) ¿Cuántas células tendrá el tumor luego de dos minutos de realizada la medición?
- ii) ¿Cuántas habrá luego de 15 días? (simplemente exprese su respuesta usando potencias)

Ejercicio 2.

- i) Exprese los siguientes números usando potenciación natural:

a) 16

b) $-\frac{16}{54}$

- ii) Justifique las siguientes igualdades con base en las propiedades de la potenciación:

a) $(-3)^{13} = -3^{13}$

c) $\frac{-32}{45} = \frac{(-2)^5}{5 \cdot 3^2}$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{36} = \left(\frac{1}{2}\right)^{36}$

d) $\left(\frac{12}{7}\right)^4 (21)^3 = \frac{3^7 \cdot 2^8}{7}$

2.1.4. Potenciación entera

A partir de la propiedad (7) se puede representar cualquier potencia con exponente positivo, así, la expresión:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} \text{ es igual a } \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^p}$$

Empleando las propiedades de simplificación de racionales y la propiedad (6) de la potenciación, se tiene que:

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \frac{1}{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{b^p}{a^p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$$

Por ejemplo, $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$

Ejercicio 3.

i) Exprese los siguientes números usando potenciación natural:

a) 16^{-2}

b) $-\frac{16}{2^3 \cdot 3^{-2}}$

ii) Justifique las igualdades que aparecen a continuación:

a) $(-1)^{-2} = 1$

b) $-1^{-2} = -1$

c) $\left(-\frac{1}{2^{-3}}\right)^{36} = \left(\frac{1}{2^3}\right)^{-36}$

d) $\left(\frac{2^{-1}}{7}\right)^{-4} \cdot (21)^{-3} = 3^{-3} \cdot 2^4 \cdot 7$

2.1.5. Potenciación base 10

Para simplificar la escritura de un número muy grande o muy pequeño, bien sea un número entero o decimal, se emplean potencias de 10, ya que $10^n = \underbrace{10 \dots 0}_{n\text{-veces}}$ y $10^{-n} = \underbrace{0,0 \dots 01}_{n\text{-veces}}$. Por ejemplo,

$$10^4 = \underbrace{10.000}_{4\text{-veces}} \text{ y } 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1.000} = 0,001$$

Luego, la multiplicación de un número m con 10^p desplaza la coma decimal de m , p posiciones a la derecha, así, $3,243 \times 10^4 = 32.430$. En la multiplicación de m con 10^{-p} , la coma decimal se desplaza p posiciones a la izquierda, por ejemplo, $32,345 \times 10^{-4} = 0,0032345$.

La notación científica de un número positivo a , corresponde a su escritura como el producto entre los factores m y 10^p , en donde m es un número real mayor o igual que 1 y menor que 10 y p es un número entero. Así, 234,5560 en notación científica se expresa como $2,34556 \times 10^2$.

Ejercicio 4. Exprese la cantidad de células en el tumor usando notación científica.

Ejercicio 5. Exprese los siguientes números en notación científica:

i) 0,000023445

iii) $\frac{0,15}{0,2345}$

ii) 34.456×10^3

iv) $\frac{1.234}{13}$

Al multiplicar, sumar o dividir números muy grandes o pequeños, una opción es emplear potencias de 10, por ejemplo:

$$23,3455 \times 10^3 - 0,03445 = 2.334.550.000 \times 10^{-5} - 3.445 \times 10^{-5}$$

La idea es desplazar la coma decimal hasta que los números se expresen como el producto de un natural con una potencia de 10, en el caso de la suma el exponente debe ser igual, así:

$$= (2.334.550.000 - 3.445) \times 10^{-5} = 2.334.556.555 \times 10^{-5} = 23.345,56555$$

Para la multiplicación y la división se tienen situaciones similares.

$$\frac{4}{3} \times 10^3 \div 0,0012 = \frac{\frac{4}{3} \times 10^3}{12 \times 10^{-4}} = \frac{4}{12} \times 10^{3-(-4)} = \frac{48}{3} \times 10^7 = 16 \times 10^7 = 160.000.000$$

Ejercicio 6. Realice las siguientes operaciones:

i) $23 \times 10^2 - 0,12 \times 10^5$

iii) 0.34545×435.600

ii) $2.345 \div 0,0234$

iv) $\frac{0,23 \times 10^{-2}}{234 \times 10^2}$

Ejercicio 7. Si el valor comercial de un bien es de $1,2567 \times 10^8$ pesos, y se devalúa el 20% cada año, ¿cuál es el valor comercial al final del primer año?

2.1.6. Potenciación racional

El número que multiplicado consigo mismo da como resultado tres es $3^{\frac{1}{2}}$, ya que la propiedad (5) de la potenciación establece que $(3^{\frac{1}{2}})^2 = 3^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 3^1 = 3$, lo cual quiere decir que $3^{\frac{1}{2}}$ elevado al cuadrado da como resultado 3.

En general, $a^{\frac{1}{n}}$, donde n es un número natural, es el único número real que elevado a la n -ésima potencia da como resultado a ; este número se denomina la raíz n -ésima de a y se simboliza $\sqrt[n]{a}$.

Ejemplos:

a) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

En el caso $a^{\frac{m}{n}}$, donde m y n son naturales, la interpretación se hace nuevamente a través de las propiedades de la potenciación, ya que $a^{\frac{m}{n}} = a^{(m)\frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, o también se puede interpretar mediante $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n}(m)} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$.

Ejercicio 8.

i) Encuentre la versión decimal de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt[3]{9^6}$

b) $(\sqrt[5]{8})^2$

c) $\sqrt{\left(\frac{9}{\sqrt[3]{32}}\right)}$

$$d) \left(\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt{32}} \right)^{\frac{6}{5}}$$

ii) Verifique las siguientes igualdades haciendo uso de la propiedades de la potenciación:

$$a) \sqrt[4]{\frac{3^4}{16}} = \frac{3}{2}$$

$$b) (2^3 3^2)^{\frac{2}{3}} = 12 \left(3^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$c) \left(\sqrt{\frac{2^3}{36}} \right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$$

2.1.7. Ejercicios

1. Efectúe:

$$i) (3x)(-2y)(-2x^2y)$$

$$ii) (-m^2)(-m)^2$$

$$iii) c^2(2c^3 - 7c)$$

$$iv) (2a^3b^2c^2)^4$$

$$v) \frac{(a-b)^0}{2^{-1}} \text{ se asume que } a \text{ no es igual a } b$$

$$vi) \frac{4x^0y^{-2}}{-2x^{-1}y^2} \text{ se asume que } x \neq 0 \text{ y } y \neq 0$$

$$vii) 5(2^3)^{-2} - \frac{3}{2(2^{-1})} + \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$viii) \frac{(-7a^2b)^{-1}(a^{-3}b^{-1})^2}{(-7a^{-3}b^2)^{-2}b^3}$$

2. Si $x = 3$, $y = -2$ encuentre el valor numérico de la expresión $2xy^2 - yx^2 - (9x - y)$

3. Si $(3^{-2})(3^5)(3^k) = 3^{-4}$ determine el valor de k

4. Si $m = -3$, $n = 1$, $x = 2$, $y = 1$ determine el valor numérico de la expresión $\frac{m^{x+y}n^{x-y}}{m^yn}$

5. Exprese en notación científica:

$$\blacksquare 0,000086$$

$$\blacksquare 14.500.000$$

6. Escriba en forma decimal, los siguientes números:

$$\blacksquare 3,8 \times 10^4$$

$$\blacksquare 9,3 \times 10^{-7}$$

7. La población de una especie de bacterias se duplica en tamaño cada tres horas. Si la población inicial es de 1.500, determine el número de bacterias luego de 30 días. [Exprese su resultado utilizando potencias]

8. Si el espesor de una hoja de papel es $1,2 \times 10^{-2}$ cm, ¿cuántos metros de altura tiene una columna de papel donde se apilan 14.400 hojas?

9. Opere y simplifique:

- a) $(7\sqrt{3})(5\sqrt{3})$
 b) $3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 11\sqrt{28}$
 c) $(2m - 3)\sqrt{5} + (m + 2)\sqrt{5}$
 d) $x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 2x\sqrt{2}$
 e) $\frac{7\sqrt{20}}{3\sqrt{5}}$
 f) $4\sqrt{x^8y^6} - 4xy\sqrt[3]{8y^9}$
 g) $\frac{\sqrt{25x^4 - 6x^2}}{x^3}$
- h) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{64}}{49}} - \frac{\sqrt{144}}{\sqrt[5]{32}}$
 i) $\frac{\sqrt{12x^3y^3}}{4xy}$, x, y reales positivos
 j) $\sqrt[3]{\frac{(-3x)^3y^2}{x^{-5}y^{-3}}}$
 k) $25^{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{26} + 3^{-2}$
 l) $7(\sqrt{3})(50\sqrt[3]{64})^{1/2}$

10. Determine la longitud de la diagonal de un cuadrado que tiene 10 centímetros de lado.
11. Una escalera está apoyada sobre una pared y su parte superior está a 4 metros del piso. Si la distancia entre el extremo de la escalera que está apoyado en el piso hasta la pared es 5 metros, ¿cuál es aproximadamente la longitud de la escalera?

2.2. Factorización

Uno de los conceptos más importantes en las próximas secciones del curso es la *factorización*, que consiste en reescribir expresiones como el producto de otras expresiones. Existen diferentes técnicas para factorizar, a continuación se presentan algunas de ellas.

2.2.1. Factor común

De la propiedad distributiva de la multiplicación, se tiene que $a(b + c) = ab + ac$. Si se lee esta igualdad de derecha a izquierda, se observa que la suma entre los términos ab y ac equivale al producto entre a y $(b + c)$. En otras palabras:

$$\underbrace{ab + ac}_{\text{dos términos}} = \underbrace{a(b + c)}_{\text{un término}}$$

Donde a se denomina factor común.

En la práctica, para hallar el factor común de una expresión algebraica se determina el máximo común divisor entre los términos que la componen. Una forma de identificarlo es tomar el producto entre el mayor divisor de los coeficientes y las potencias de menor grado, de las letras que se repiten.

Ejemplo:

Para factorizar la expresión $144x^3y^2 + 48x^2y^5 - 84(xy)^2z^3$, se tiene en cuenta que el máximo común divisor entre los coeficientes es 12 y entre las potencias de las letras comunes es x^2y^2 . Por lo tanto, el factor común es $12x^2y^2$.

Así:

$$144x^3y^2 + 48x^2y^5 - 84(xy)^2z^3 = 12x^2y^2(12x + 4y^3 - 7z^3)$$

Ejercicio 1. Factorice las siguientes expresiones y verifique los resultados obtenidos:

i) $m^2 - 3nm^3 + 6mn^2$

iii) $\frac{4}{x}(xm - n)^2 - x(2m + n)^2$

ii) $\frac{4m}{9x} - 6mx^2$

iv) $\frac{1200y}{x+1} - \frac{126xy}{(x+1)^2}$

2.2.2. Una variante del factor común

En ciertas expresiones, al intentar factorizar se advierte que no hay factor común; sin embargo, al agrupar de manera conveniente los términos y factorizar cada uno de ellos, se advierte que, sí hay factor común.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 16x^2y - 24xy^2 &= (2x - 16x^2y) + (3y - 24xy^2) \\ &= 2x(1 - 8xy) + 3y(1 - 8xy) && \text{(Factorizando cada término)} \\ &= (1 - 8xy)(2x + 3y) && \text{(Hallando el factor común total)} \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Factorice las siguientes expresiones:

i) $(3x - 1)y^3 - 9y + 27xy$

ii) $\frac{1}{3} + x - \frac{y + 3xy}{6x}$

iii) $xy - 2ym + xn + x - 2nm - 2m$

2.2.3. Diferencia de cuadrados

Si se tiene en cuenta que $(a + b)(a - b) = aa - ab + ba - bb = a^2 - b^2$, se observa con facilidad que la factorización de la expresión $a^2 - b^2$ corresponde a $(a + b)(a - b)$. Note que a y b son las raíces cuadradas de a^2 y b^2 , respectivamente.

Ejemplo:

Factorizar $x^4y^2 - z^6$. En esta diferencia, la raíz cuadrada de x^4y^2 es x^2y y la de z^6 es z^3 , por lo tanto, $x^4y^2 - z^6 = (x^2y + z^3) \cdot (x^2y - z^3)$.

Ejercicio 3. Factorice las siguientes expresiones, teniendo en cuenta que en todas encontrará diferencia de cuadrados:

i) $x^2 - 1$

ii) $-\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{y^4}$

iii) $\frac{x^2y}{3} - 3y$

iv) $x^2 + y^2 + 2xy - 6$

v) $(x + y)^2 - (x - y)^2$

2.2.4. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Al multiplicar $a(x + p)(x + q)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} a(x + p)(x + q) &= a(x^2 + (p + q)x + pq) \\ &= ax^2 + a(p + q)x + apq \\ &= ax^2 + bx + c, \quad \text{si } b = a(p + q) \text{ y } c = a(pq) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $ax^2 + bx + c$ es factorizable de la forma $a(x + p)(x + q)$ si existen números reales p y q tales que $c = a(pq)$ y $b = a(p + q)$.

Ejemplos:

- Factorizar:

$$x^2 - 8x + 15$$

En este caso, $a = 1$, $b = -8$ y $c = 15$, por lo tanto, es necesario determinar p y q reales tales que $b = a(p + q)$ y $c = a(pq)$, es decir, p y q tales que $-8 = p + q$ y $15 = pq$, luego $p = -5$ y $q = -3$. Así,

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 5)(x - 3)$$

- Factorizar:

$$5x^2 - 16x + 3$$

A diferencia del ejemplo anterior, hallar los valores de p y q que satisfacen las relaciones $-16 = 5(p + q)$ y $3 = 5(pq)$ es dispendioso. Por lo tanto, se presenta la siguiente técnica para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$:

$$\begin{aligned} 5x^2 - 16x + 3 &= \frac{25x^2 - 16(5x) + 15}{5} && \text{(Amplificando por 5, el coeficiente principal)} \\ &= \frac{(5x)^2 - 16(5x) + 15}{5} && \text{(Aplicando propiedades de la potenciación)} \\ &= \frac{w^2 - 16w + 15}{5} && \text{(Sustituyendo } 5x \text{ por } w) \\ &= \frac{(w - 15)(w - 1)}{5} && \text{(Factorizando el numerador)} \\ &= \frac{(5x - 15)(5x - 1)}{5} && \text{(Retomando que } 5x \text{ es } w) \\ &= \frac{5(x - 3)(5x - 1)}{5} && \text{(Factorizando 5, en el primer factor)} \\ &= (x - 3)(5x - 1) && \text{(Simplificando)} \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Factorice y verifique su resultado:

i) $t^2 + 3t - 10$

iv) $2x^3 + 5x^2 - 3x$

ii) $x^2 + 3x - 18$

v) $\frac{1}{2} + \frac{5}{6}t + \frac{1}{3}t^2$

iii) $-3x^2 + 2x + 8$

vi) $(x - 3y)^2 - 6x + 18y + 5$

2.2.5. Suma y diferencia de cubos

Al efectuar el producto entre $a + b$ y $a^2 - ab + b^2$, se obtiene:

$$\begin{aligned}(a + b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3\end{aligned}$$

De donde se concluye que, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. De forma análoga se puede probar que la factorización de $a^3 - b^3$ es $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Ejemplos:

- Factorizar:

$$x^3 + 8$$

Note que la raíz cúbica de x^3 es x y de 8 es 2, por lo tanto $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

- Factorizar:

$$27m^3 - \frac{64}{729}y^6$$

De forma similar al ejemplo anterior, la raíz cúbica de $27m^3$ es $3m$ y de $\frac{64}{729}y^6$ es $\frac{4}{9}y^2$, luego:

$$\begin{aligned}27m^3 - \frac{64}{729}y^6 &= \left(3m - \frac{4}{9}y^2\right) \left((3m)^2 + (3m) \left(\frac{4}{9}y^2\right) + \left(\frac{4}{9}y^2\right)^2\right) \\ &= \left(3m - \frac{4}{9}y^2\right) \left(9m^2 + \frac{4}{3}my^2 + \frac{16}{81}y^4\right)\end{aligned}$$

Ejercicio 5. Factorice completamente y verifique su solución:

i) $x^3 + 1$

ii) $3 - x^6$

iii) $-x^9 + y^9$

iv) $\frac{8}{x^3} + \frac{27}{y^9}$

v) $-72x^8 - \frac{9x^2}{y^3}$

2.2.6. Ejercicios

i) Determine cuántos términos hay en cada uno de las siguientes expresiones algebraicas y luego factorícelas completamente:

a) $x^2y + 2xy^2 + y^3$

i) $\frac{4}{9}x^4 - 36x^2$

b) $\frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{x^2 + xy}{xy}$

j) $27 - 8a^3$

c) $\sqrt{t} + t - 2$

k) $t^3 + t^2 - 12t$

d) $t^3 - 8 + t^2 - 2t$

l) $-2m^2 + 5m + 3$

e) $6x^3 + 12x^2 - 21x$

m) $64a^3 + 27$

f) $3x + 5bx - 6 - 10b$

n) $x^2 - 3m + xm - 3x$

g) $25m^2 - 49n^2$

ñ) $3x^2 + 11x - 4$

h) $3x^2 - 17x + 10$

o) $p^2 - 5p + 6$

ii) Factorice completamente y simplifique:

a) $\frac{4xn - 8n}{3n^2x - 6n^2}$ con $n \neq 0$ y $x \neq 2$

b) $\frac{-2t^3 + 12t^2 - 10t}{t^2 - 25}$, con $t \neq 5$ y $t \neq -5$

c) $\frac{x^2 + xy + y^2 + yx}{x^2 - y^2}$, con $x \neq y$

d) $\frac{49n^4 - (n^2 - n)^2}{6n^3 + n^2}$, con $n \neq 0$ y $n \neq -\frac{1}{6}$

Ejercicios complementarios

i) Conjunto de los números naturales

a) Escriba verdadero o falso según corresponda. En caso de ser falso exponga un ejemplo que muestre la falsedad y en caso de ser verdadero justifique su respuesta con los respectivos conceptos.

1) La suma de los primeros 30 múltiplos de 4, es 200

2) Si m, n son números naturales cualesquiera, entonces $(m - n)$ es también un número natural.

ii) Conjunto de los números enteros

a) Indique cuántos términos tiene cada una de las siguientes expresiones y efectúe las operaciones:

1) $-3 + 2\{3 - 4(1 - 5)\}$

2) $3 - 5(a - 4)(3 - a) + 7a^2 - 11$

3) $[(-4 + 7) - (-4)]\{(-7) - (-3 + 2) + (-4 + 1 - 2)\}$

4) $2(z - y)b - 3[(1 - by) - 3] - (-2bz - 4)$, siendo b, y, z números enteros

b) Determine si el enunciado es falso o verdadero. Justifique su respuesta.

- 1) Siempre el cociente de dos números enteros es un número entero.
- 2) La diferencia de dos enteros siempre es un natural.
- 3) Si $x = -7$, $y = -3(x - 1) - 1$, el valor numérico de $7 - x - (y + 2)(-3) - x$ es 96

iii) Números Racionales

a) Resuelva cada uno de los siguientes problemas y compruebe su solución.

- 1) De un presupuesto de \$4.800.000 para actividades lúdicas, una empresa destina \$400.000 para comprar juegos de mesa. Así mismo asigna $\frac{7}{12}$ del total para actividades al aire libre y el resto lo asigna para dotar una sala de juegos. Escriba un procedimiento para determinar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.
 - a' El dinero asignado para juegos de mesa es menor que el destinado a actividades al aire libre
 - b' El porcentaje del presupuesto destinado para la sala de juegos es mayor que el porcentaje del presupuesto asignado para las actividades al aire libre.
- 2) Se tiene un capital de \$ 250.000.000, el cual se distribuye así: El 20 % para comprar una camioneta; el 35 % para comprar una bodega. Si el 15 % de la parte restante se invierte en muebles para oficina, ¿cuánto dinero queda?
- 3) En un terreno cuadrado se sabe que la quinta parte se utiliza para sembrar trigo, las tres cuartas partes para cebada y el resto que corresponden a $20m^2$ se utilizan para pastar. ¿Cuál es el área total del terreno? ¿Cuál es el área destinada para sembrar trigo? ¿cuál para cebada?
- 4) Un inversionista tiene cierta cantidad de dinero de la cual se sabe que el 30 % lo invierte en bonos del estado, el 20 % en una fiducia y el 8 % en un CDT. Si le quedan \$21.000.000 y lo invierte en la compra de acciones de una empresa, ¿cuánto dinero tenía?
- 5) Tío Rico reparte entre sus sobrinos Hugo, Paco y Luis, la suma de 1800 dólares de la siguiente manera: $\frac{4}{9}$ de esa cantidad para Hugo, $\frac{1}{3}$ para Paco y el resto para Luis. ¿Cuántos dólares suman entre Hugo y Paco?
- 6) Julia decide invertir su salario así: la mitad en pago de arriendo y alimentación; de lo que le queda invierte las dos terceras partes en educación y el resto lo ahorra. Si ahorra \$300.000, ¿cuánto gana Julia?
- 7) Luis invita a sus amigos a comer una tarta. Pedro come $\frac{2}{5}$; Ana $\frac{1}{6}$ y Tomás $\frac{1}{3}$. Si Luis se come el resto, ¿cuánto come?
- 8) Una herencia se debe repartir de la siguiente manera: el hijo mayor tomará los $\frac{2}{5}$ del total, de la parte restante la mitad será para el segundo hijo. Si el 20 % del total es la parte que corresponde al hijo menor y aún quedan \$10.000.000 para ser donados a un hogar de niños huérfanos:
 - a' ¿Cuál es el monto de la herencia?
 - b' ¿Cuánto le correspondió a cada hijo?
- 9) Un capital de \$120.000.000 se debe repartir de la siguiente manera: Los $\frac{2}{5}$ para invertir en Bonos, el 20 % para un CDT . Lo que queda, para ser invertidos en una acción de cementos, ¿ A qué porcentaje del capital corresponde la cantidad de dinero invertida en la acción de cementos?
- 10) Un agricultor de flores parcela el área total de su jardín. La tercera parte del área total de su jardín la siembra en Jazmines. Una sexta parte de lo que falta por sembrar lo utilizó para la siembra de Rosas. Tres quintas partes de lo que aún falta por sembrar lo utilizó para la siembra de Claveles. Finalmente, el resto del área de su jardín, que equivale a 80 metros cuadrados, lo utilizó para la siembra de Lirios. ¿Cuál es el área total del jardín?

11) Juancho pacta el pago de su matrícula en cuatro cuotas: la primera cuota corresponde a un tercio del total; la segunda cuota es \$200.000 menos que la primera, las dos cuotas restantes, ambas por el mismo valor, suman \$1.000.000. Por favor, determine:

a' El valor total de la matrícula

b' El valor exacto de cada una de las cuotas.

b) Si $x = -3$, y es el opuesto de x , y $z = \frac{x - 2y}{2}$, determinar el valor numérico de la expresión

$$3 \left(y + \frac{1}{2} \right) - 2(y - x) + z$$

c) Encuentre el valor numérico de la expresión $2a - 3(-b - 5)(b - a) + \frac{1}{2}a$, si se sabe que: $a = -\frac{3}{2}$ y $b = 2 - a$

d) Encuentre el valor numérico de la expresión $3 - y(-x - \frac{1}{2}) - xy$, siendo $x = -3$ y $y = \frac{x}{2}$

e) Encuentre el valor numérico de la expresión $a - b(1 - a)a$, si se sabe que: $a = \frac{1}{4}$ y $b = -\frac{1}{2}$

f) Si $a = 5$, $b = 3a^{-2}$ resuelva $ab - 5(2a - b) + b^{-1}$

g) Realice las siguientes operaciones y simplifique las respuestas:

1) $\frac{3}{5}(\frac{4}{3} - 2) + 4(\frac{1}{2} - \frac{7}{4})2 - 5$

2) $\frac{1}{2} - 2(1 - \frac{2}{5} \div \frac{5}{2})$

3) $2 - \frac{3}{2}(-1 + \frac{2}{5} \div \frac{1}{2})$

iv) Números reales

a) Escriba verdadero o falso según corresponda. En caso de ser falso exponga un ejemplo que muestre la falsedad y en caso de ser verdadero justifique su respuesta con los respectivos conceptos.

1) El producto de dos números irracionales siempre es un irracional.

2) Si el precio original de un artículo se incrementa en 18 %, y al nuevo precio, se le hace un descuento del 18 %, este precio final es igual al precio original.

3) Todo número entero es un número racional.

4) El producto de todo número con su recíproco es 1.

5) No existe un número irracional que sea más grande que 1,32456781 y más pequeño que 1,32456782

6) El producto de dos irracionales nunca es un racional.

7) El resultado de simplificar $2 - \frac{3}{2}[-1 + \frac{2}{5}(1 - \frac{1}{2})]$ es $\frac{16}{5}$

8) Si a y b son números reales diferentes de cero, tales que $a + 2b = 0$ entonces, $4b + 2a = 0$

9) El resultado de $-\frac{4}{7} - 7,2345743821$ es un número irracional.

v) Potenciación y radicación

a) Simplifique la expresión $\sqrt[3]{\frac{8ab^3x^{-1}}{81x^4b^{-5}}}$

b) Simplifique la expresión $\sqrt[5]{\frac{243x^{12}y^9z^3}{x^{-3}y^4}}$, con $x \neq 0$, $y \neq 0$

c) Simplifique la expresión $(2y)^3(x - y^{-1} + z) - y(2y - xy^2 - y^2z)$

d) Simplifique la expresión $7 - 5(x + 3)(x - 2)x + x^2$

e) Simplifique la expresión $(x - y)^2 - xy + y^2$

f) Simplifique la expresión $(x + y)^3 - x^3 - y^3$

g) Simplifique la expresión $\frac{b^2}{\sqrt{x^4}} \sqrt[3]{\frac{b^7m^6x^{-4}y^{-1}}{-27(b^{-1}xy^{-2}m^3)^2}}$

h) Simplifique la expresión $\frac{x^{-3}y^{-5}\sqrt[3]{b^6m^6x^{-3}}}{-27(b^{-1}xy^{-2}m^3)^2}$

i) Dada la expresión $\frac{4a^{-1}b^2ac^{-2}}{8b^2a^2c^{-4}}$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$:

1) Simplifique completamente dicha expresión.

2) Calcule el valor numérico si $a = 3$, $b = 2$ y $c = 1$

j) Si $x = -2$, $y = 3$ y $z = x - y$, calcule el valor numérico de la expresión

$$\frac{z(x - y) - y^2 + 2(z - y)}{-z + 2(x + y - z) + y^x}$$

k) Si la deuda externa colombiana fuera de $4,6819 \times 10^{10}$ y la población fuera de 46'819.000 habitantes ¿Cuánto sería la deuda por cada habitante?

vi) Factorización

a) Factorice cada una de las siguientes expresiones.

1) $3ab^2x^3 + 6a^2b^3x^2 - 12a^3b^4x^3$

2) $64x^2 - 9z^4$

3) $2x^2 - 5x - 7$

4) $5x^2 - 8x - 4$

5) $t^3 - 2t^2 + t - 2$

6) $-4t^3 + 10t^2 + 6t$

7) $4w^2 - 16$

8) $8x(b - 4) - 6y(b - 4)^2 + 10b(b - 4)^3$

9) $-2x^2 - 6x - 4$

b) Simplifique completamente cada una de las siguientes expresiones:

1) $\frac{2x^2 - 5x - 3}{4x^2 - 1}$

2) $\frac{5x^2 - 7x + 2}{x^2 - 1}$

3) $\frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 4}$

4) $\frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4}$

5) $\frac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4x + 4}$

6) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$

7) $\frac{9x^3 + 24x^2 - 9x}{x^2 + 8x + 15}$

Respuestas a los ejercicios complementarios

i) Conjunto de los números naturales

a) 1) (F) La suma es 1.860

2) (F) $m - n$ no es siempre un número natural

ii) Conjunto de los números enteros

a) Los resultados de las operaciones son:

1) 35

2) $12a^2 - 35a + 52$

3) -77

4) $4bz + by + 10$

b) En cuanto a los enunciados:

1) (F) Por ejemplo, $3 \div 2$ no es un entero

2) (F) Por ejemplo, $3 - 5 = -2$ y -2 no es un número natural

3) (V) El resultado es 96

iii) Números Racionales

a) Respuesta a los problemas planteados

1) Las afirmaciones son:

a' (V)

b' (F) El porcentaje para juegos de mesa es del 33,33 %, en tanto que para actividades al aire libre es del 58,33 %

2) \$95'625.000

3) $400m^2$

4) \$50'000.000

5) 1.400 dólares

6) \$1'800.000

7) $\frac{1}{10}$

8) En cuanto a la herencia se sabe que:

a' \$100'000.000

b' Mayor: \$40'000.000; Segundo: \$30'000.000; Menor: \$20'000.000

9) 40 %

10) $360m^2$

11) En cuanto al préstamo:

a' \$2'400.000

b' Primera cuota: \$800.000; segunda cuota: \$600.000; tercera cuota: \$500.000; cuarta cuota: \$500.000

b) -6

c) $\frac{495}{4}$

d) $\frac{9}{4}$

e) $\frac{11}{32}$

f) $-\frac{607}{15}$

g) Las respuestas a los ejercicios son:

- 1) $-\frac{77}{5}$
- 2) $-\frac{59}{50}$
- 3) $\frac{23}{10}$

iv) Números reales

a) En cuanto a las afirmaciones:

- | | |
|--|------|
| 1) F | 5) F |
| 2) F | 6) F |
| 3) V | 7) V |
| 4) V si el número es diferente de cero. Si el número es cero no tiene recíproco. | 8) V |
| | 9) F |

v) Potenciación y radicación

a) $\frac{2b^2}{3x} \sqrt[3]{\frac{ab^2}{3x^2}}$

h) $-\frac{b^4}{27m^4x^6y}$

b) $3x^3y\sqrt[5]{z^3}$

i) Las respuestas son:

c) $9xy^3 - 10y^2 + 9zy^3$

1) $\frac{c^2}{2a^2}$

d) $-5x^3 - 4x^2 + 30x + 7$

2) $\frac{1}{18}$

e) $x^2 - 3xy + 2y^2$

f) $3x^2y + 3xy^2$

j) 0

g) $-\frac{b^5y}{3x^4}$

k) 1×10^3

vi) Factorización

a) Las expresiones factorizadas son:

- 1) $3ab^2x^2(x + 2ab - 4a^2b^2x)$
- 2) $(8x - 3z^2)(8x + 3z^2)$
- 3) $(2x - 7)(x + 1)$
- 4) $(x - 2)(5x + 2)$
- 5) $(t - 2)(t^2 + 1)$
- 6) $-2t^2(t - 3)(2t + 1)$
- 7) $(2w - 4)(2w + 4)$
- 8) $(b - 4)(8x - 6by + 24y + 10b^3 - 80b^2 + 160b)$
- 9) $-2(x + 2)(x + 1)$

b) Las expresiones simplificadas:

- 1) $\frac{x-3}{2x-1}$
- 2) $\frac{5x-2}{x+1}$
- 3) $\frac{3x-1}{x-2}$
- 4) $\frac{3x-2}{x-2}$
- 5) $\frac{3x}{x-2}$
- 6) $\frac{x+3}{x+2}$
- 7) $\frac{3x(3x-1)}{x+5}$

Capítulo 3

Ecuaciones

3.1. Ecuaciones de primer grado

Muchas actividades prácticas involucran la construcción de una o varias ecuaciones, es decir, igualdades entre expresiones algebraicas, en donde aparecen constantes (valores conocidos) e incógnitas (cantidades desconocidas). El interés principal es hallar dichas cantidades. En esta sección se presentará una de las técnicas básicas utilizadas para la resolución de ecuaciones lineales o de primer grado con una incógnita.

Situaciones como la siguiente pueden modelarse mediante ecuaciones: el perímetro de un terreno rectangular es 180 metros y su largo tiene 10 metros menos de longitud que el ancho, ¿cuál es la longitud del lado más largo?

Parte 1: Trabajando con ecuaciones

Inicialmente se hará “traducción” de algunas frases en expresiones matemáticas que las representen.

Ejemplos.

- i) “El triple de un número disminuido en 25 equivale a 50”

Si representamos con x el número, entonces, la ecuación que modela la situación es $3x - 25 = 50$

- ii) “Un número aumentado en la mitad del mismo número, equivale a 7”

Si representamos con b el número, entonces, la ecuación que modela la situación es $b + \frac{1}{2}b = 7$

- iii) “Cierta día, Jorge compra chokolatinas y Andrea compra cinco chokolatinas más que el doble de las que compró Jorge. Entre los dos compraron 50 chokolatinas”

El modelo que representa la situación planteada, es $x + (2x + 5) = 50$

Ejercicio 1. Determine qué representa x en el ejemplo iii).

Ejercicio 2. Escriba, en cada caso, una ecuación que modele el problema.

- “El perímetro de un terreno rectangular es 180 metros y su largo tiene 10 metros menos de longitud que el ancho, ¿cuál es la longitud del lado más largo?”
- “Tres números consecutivos pares suman 50”

Ejercicio 3. ¿Qué es una ecuación?

Parte 2: Ecuación de primer grado con una incógnita

Una ecuación de primer grado con una incógnita es una ecuación que tiene la forma $ax + b = 0$, con a, b números reales y $a \neq 0$. La solución de esta ecuación es $x = \frac{-b}{a}$

Ejercicio 4.

- i) ¿Qué significa resolver una ecuación?
- ii) Compruebe que $K = 600.000$ es solución de la ecuación $\frac{4}{5}K = \frac{2}{3}K + 80.000$

Parte 3: Resolver una ecuación

A continuación se presentan dos propiedades que permiten resolver una ecuación:

Propiedad 1. (Posibilidad de la sustracción)

Para a y b números reales, existe un único número real x que satisface $a + x = b$, el cual se escribe $x = b - a$

Propiedad 2. (Posibilidad de la división)

Para a y b números reales, con $a \neq 0$, existe un único número real x que satisface $ax = b$, el cual se escribe $x = \frac{b}{a}$

Los ejemplos que aparecen a continuación, ilustran el uso de las dos propiedades anteriores para resolver ecuaciones de primer grado.

Ejemplo:

Resolver la ecuación $x - 9 + \frac{5}{3}x = -11$

Solución.

$$\begin{aligned} x - 9 + \frac{5}{3}x &= -11 \\ x + \frac{5}{3}x &= -11 + 9 \\ \frac{8}{3}x &= -2 \\ 8x &= 3(-2) \\ 8x &= -6 \\ x &= \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4} \end{aligned}$$

Ejercicio 5. Verifique que $x = -\frac{3}{4}$ es solución de la ecuación del ejemplo anterior.

Ejercicio 6. Resuelva las siguientes ecuaciones, y en cada caso verifique la solución:

- i) $3x + 5 = 2(4x - 7) + 7x$
- ii) $\frac{m+1}{3} = 4m$
- iii) $\frac{1}{2}(3x - 4) = 2x$
- iv) $\frac{3x-2}{3} - \frac{x-3}{2} = 5$

v) $\frac{3}{4} - \frac{2-\frac{x}{3}}{\frac{1}{2}} = x + 3$

vi) $\frac{12x}{8(x-2)^{-1}} = \frac{3}{2x^{-2}}$

Ejercicio 7. Despeje y en $ay - c = 4y$ con $a \neq 4$

Ejercicio 8. Resuelva cada uno de los siguientes problemas e interprete la solución en el contexto dado. De no tener solución comente por qué:

- i) Un terreno rectangular tiene un perímetro de 180 metros. Un lado tiene 10 metros menos de longitud que el otro lado. ¿Cuál es la longitud del lado más largo?
- ii) Distribuir \$480.000 entre Pedro y José, de tal manera que el doble de lo que le corresponde a Pedro, sea \$60.000 más que lo que le corresponde a José. ¿Cuánto le corresponde a cada uno de ellos?
- iii) Determine tres números pares consecutivos que sumen 50.

3.1.1. Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $2(n - 3) - 5 = n - 7$

b) $4x - 3(2 - x) = 11$

c) $\frac{2+x}{3} - 2 = 4$

d) $4(x - 1) - 7(2 - x) = \frac{1}{2}x$

e) $5(x - 3) - 2 = 4(2x - 3) + 11$

f) $-\frac{(-2x+5)^2}{6} + x = \frac{-x}{3}(2x - 1)$

g) $2 - 3\left(\frac{5-x}{7} + 5\right) = 3x - 1$

h) $4x - \frac{2}{5}\left(x - \frac{2-x}{3}\right)5 - 5 = 2(x - 3)$

2. ¿Es $x = 2$ solución de la ecuación $\frac{9-2x}{3} - 1 = \frac{4(2-x)}{3}$? Justifique su respuesta.

3. Escriba una ecuación que modele cada una de las siguientes situaciones y responda el interrogante:

a) La suma de dos números consecutivos impares equivale a 24, ¿cuáles son dichos números?.

b) La edad actual de mi hermano es el triple de la mía. Dentro de 10 años, mi hermano tendrá el doble de mi edad. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

4. a) Si $y = mx + b$, hallar x si $b = 5$, $m = 2$, $y = 11$.

b) Si $za + M = zK$, despejar z .

3.2. Aplicaciones de ecuaciones de primer grado

En esta sección se presentan problemas que pueden ser traducidos al lenguaje matemático a través de ecuaciones como las trabajadas en la sección anterior.

Parte 1: Solución de problemas.

En lo que sigue, se estudian situaciones que pueden modelarse mediante ecuaciones.

Ejercicio 1. La tragedia de Haití conmocionó el mundo y obligó a unir esfuerzos para beneficio de ese país. La teletón organizada por George Clooney, el Banco Mundial y la donación de EE.UU. logró recolectar 305 millones de dólares. Si se sabe que el Banco mundial aportó el doble de lo que recolectó George Clooney y, a su vez, EE.UU. aportó 20 millones de dólares más de lo que donó el Banco Mundial, ¿cuánto aportó cada uno de ellos?

Como forma de trabajo, se sugiere identificar los datos (cantidades) conocidos y desconocidos que presenta la situación. Los datos desconocidos se representan por una incógnita y los demás datos se expresan en términos de ésta.

Datos desconocidos:

Dinero que recogió George Clooney, llámelo x millones de dólares

Dinero donado por el Banco Mundial: $2x$ millones de dólares

Dinero donado por EE.UU.: _____ millones de dólares

Datos conocidos:

Total del dinero recogido: 305 millones de dólares

Planteamiento de la ecuación: El total de dinero recolectado, corresponde a la suma de los aportes individuales, luego, la ecuación es:

$$\begin{aligned} x + 2x + 2x + 20 &= 305 && \text{(Ecuación)} \\ x + 2x + 2x &= 305 - 20 && \text{(Términos semejantes)} \\ 5x &= 285 && \text{(Operaciones entre términos semejantes)} \\ x &= \frac{285}{5} && \text{(Posibilidad de la división)} \\ x &= 57 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede concluir que George Clooney recolectó 57 millones de dólares, el Banco Mundial aportó 114 millones de dólares y Estados Unidos donó 134 millones de dólares.

Ejercicio 2. Un empresario tiene 10.000 dólares invertidos al 10 %, ¿cuánto dinero adicional deber invertir al 16 %, si desea obtener un rendimiento del 12 % sobre el total de dos inversiones?

Datos desconocidos: Dinero que debe invertir al 16 %, llámelo x

Rendimiento del dinero invertido al 16 %: $\frac{16}{100}x = \frac{4}{25}x$

Total de las dos inversiones: $x + 10.000$

Total del rendimiento que desea obtener: $\frac{12}{100}(x + 10.000) = \frac{3}{25}(x + 10.000)$

Datos conocidos: Dinero invertido al 10 %: 10.000 dólares

Rendimiento del dinero invertido al 10 %: $\frac{10}{100}(10.000) = 1.000$ dólares

Planteamiento de la ecuación: La suma entre el rendimiento del dinero invertido al 16 % y los 1.000 dólares es igual al rendimiento obtenido por el total de los dos capitales al 12 %. Esta afirmación se puede representar a través de una ecuación. Indique cuál.

Resuelva la ecuación anterior *. Justifique cada paso y dé respuesta al interrogante.

Ejercicio 3. Carla distribuye su salario mensual de la BKN de la siguiente manera: paga la cuota de su apartamento, que equivale a la quinta parte del total; de la parte restante, utiliza el 40 % para cubrir parte de la deuda de su carro, y para el resto de sus gastos cuenta con \$ 2.400.000. ¿A cuánto asciende el salario que recibe mensualmente Carla de la BKN?

Datos desconocidos:

Salario mensual de Carla, llámelo x

Valor de la cuota del apartamento: $\frac{1}{5}x$

Valor de la cuota del carro: $\frac{8}{25}x$. ¿De dónde surge esta expresión? Indique las operaciones necesarias que sustenten su respuesta.

Datos conocidos:

Total de dinero asignado a otros gastos: \$ 2.400.000

Planteamiento de la ecuación: El total de los gastos, es decir, la suma entre la cuota del carro, la cuota del apartamento y el efectivo dedicado a los otros gastos, debe ser igual al salario mensual de Carla. Escriba una ecuación que modele esta situación y encuentre la solución al problema. **

Parte 2: A practicar

En el primer periodo del semestre, cuyo valor es el 30 % de la nota definitiva del curso, un estudiante de matemáticas ha obtenido:

- *Quizes* (10 %): 3,2
- Proyecto de aula (5 %): 2,5

1. Para que apruebe el primer corte de esta asignatura, ¿cuál debe ser la nota mínima del parcial?
2. Si su nota de primer corte fue 3,7, ¿cuánto obtuvo en el parcial?
3. ¿Cuál es la nota máxima que puede obtener en el primer corte? ¿cuál es la nota mínima?

3.2.1. Ejercicios

En cada caso, responda el interrogante y verifique sus soluciones.

1. Pablo divide una herencia en dos cuentas de ahorro, una le paga el 7 % y la otra le paga el 10 % de interés anual. Invierte al 10 % el doble de lo que invirtió al 7 %. Si sus ingresos anuales totales son de \$ 2'025.000, de cuánto fue su herencia? *

* 5.000 dólares

** \$ 5'000,000

* \$ 22'500.000

2. Para la entrada al concierto de *Metallica*, se vendieron boletas *one* a \$350.000 y *the unforgiven* a \$260.000. Si se vendieron en total cincuenta mil boletas y el recaudo de dinero fue de \$ 15.520 millones, ¿cuántas boletas de cada valor se vendieron?***
3. El perímetro de un terreno rectangular es de 38 metros. Si el lado más largo mide 5 metros más que la longitud del lado más corto, ¿cuánto mide cada lado? ¿cuál es el área del terreno?***
4. En una ciudad el costo de la electricidad está expresado por la fórmula $c = 0,08n + 26.500$, siendo c el costo y n la cantidad de kilovatios-hora consumidos. Si el costo es de \$ 89.930, cuál fue el consumo de electricidad?****
5. Un carpintero desea cortar una tabla de 186 pies en cuatro secciones, ¿cuáles son las longitudes de las cuatro secciones, si cada una debe tener 3 pies más que la anterior?*****

3.3. Sistemas de ecuaciones lineales

En la sección anterior se plantearon y solucionaron problemas mediante ecuaciones de primer grado con una incógnita. Surgen ahora algunas inquietudes, ¿y si una sola incógnita no es suficiente? o ¿si una ecuación tampoco lo es? Tal vez se requieran más incógnitas y más ecuaciones. Veamos.

Parte 1: Solución de un sistema de ecuaciones lineales por sustitución.

Algunos problemas prácticos pueden ser modelados a través de un conjunto de ecuaciones o *sistema de ecuaciones*, en donde intervienen dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas), cuya solución exige revisar algunos métodos.

Ejercicio 1. Nescafé ha introducido en Colombia la última tecnología en máquinas cafeteras y nuevos productos. Estos equipos modernos tienen la capacidad de preparar distintas variedades de café, mezclando diferentes tipos de calidad. Suponga que toma dos calidades de café: cuando toma 2 kilogramos de la primera calidad y 3 kilogramos de la segunda, resulta la mezcla a \$ 2.500 el kilogramo y cuando toma 3 kilogramos de la primera clase y 2 kilogramos de la segunda, entonces resulta la mezcla a \$ 3.000 el kilogramo. ¿Cuál es el precio de cada kilogramo según la calidad del café?

Se debe seguir la misma estrategia propuesta en secciones anteriores, pero en lugar de una ecuación, se plantearán dos, con dos incógnitas.

Datos desconocidos:

Llame x al precio del kilogramo de café de primera calidad.

Llame y al precio del kilogramo de café de segunda calidad.

Datos conocidos:

Primera mezcla: compuesta por dos y tres kilogramos de cada calidad, respectivamente.

Segunda mezcla: compuesta por tres y dos kilogramos de cada calidad, respectivamente.

Precio del kilogramo de café de la primera mezcla: \$ 2.500

Precio del kilogramo de café de la segunda mezcla: \$ 3.000

Planteamiento de ecuaciones:

** One:28.000; The Unforgiven:22.000.

*** Largo: 12 metros; Ancho: 7 metros; área: 84 metros cuadrados

**** $n = 792,875$ kilowatt-hora

***** Las longitudes son:42, 45, 48 y 51 pies

Primera mezcla: el precio por kilogramo de café de primera calidad más el precio por kilogramos de café de segunda calidad debe ser igual al precio total por kilogramo de la mezcla, es decir, $2x + 3y = 5(2.500)$

Segunda mezcla: realizando un análisis similar al anterior, se plantea la ecuación: $3x + 2y = 5(3.000)$

Para dar solución al problema planteado, se encontrarán números x y y que satisfagan simultáneamente las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5(2.500) & \text{(ecuación 1)} \\ 3x + 2y = 5(3.000) & \text{(ecuación 2)} \end{cases}$$

El esquema anterior se denomina *sistema de ecuaciones lineales (o de primer grado) con dos incógnitas*.

Método de Sustitución.

Para exponer esta técnica se resolverá el anterior sistema de ecuaciones. Veamos el algoritmo.

Paso 1

Despeje x de la ecuación 1 y a esta nueva ecuación, llámela ecuación 3.

Paso 2

Sustituya la expresión que representa a x , (hallada en el paso 1), en la ecuación 2

Se obtiene ahora una ecuación con una incógnita. Encuentre la solución a esta ecuación

Paso 3

Sustituya el valor de y en la ecuación 3 y encuentre x *

Ejercicio 2. Resuelva nuevamente el sistema, pero ahora, en el primer paso 1 despeje y , y continúe hasta el paso 3. Compare estos resultados con los del ejercicio anterior.

Parte 2: Solución de un sistema de ecuaciones lineales por eliminación o reducción.

A través del método de reducción se resolverá el siguiente problema:

Ejercicio 3. La pastelería “Sol” prepara dos clases de tartas. Para la primera se necesita 2,4 kilogramos de masa y 3 horas de elaboración, mientras que para la segunda se necesitan 4 kilogramos de masa y 2 horas de elaboración. ¿Cuántas tartas se han preparado de cada tipo si se han dedicado 67 horas de trabajo y 80 kilogramos de masa?

Datos desconocidos:

Número de tartas de la primera clase, llámelo x

Número de tartas de la segunda clase, llámelo y

En la siguiente tabla se resume la información del problema:

	Kilogramos	Horas
Tarta clase 1:	2,4	3
Tarta clase 2:	4	2
Total	80	67

Planteamiento:

En la primera ecuación se tiene en cuenta la cantidad de masa necesaria, por tanto, $2,4x + 4y = 80$

Para la segunda, las horas dedicadas a la preparación, es decir, $3x + 2y = 67$

Así, el sistema que se debe solucionar es:

$$\begin{cases} 2,4x + 4y = 80 & \text{(ecuación 1)} \\ 3x + 2y = 67 & \text{(ecuación 2)} \end{cases}$$

* $x = 4.000; y = 1.500$

Método de Eliminación o Reducción.

Para hacer uso de este método es necesario que el sistema de ecuaciones sea lineal, y para facilitar el esquema de trabajo:

- Las respectivas incógnitas deben estar alineadas.
- Los coeficientes de una incógnita deben diferir únicamente en el signo.

En caso de que no se cumpla la segunda condición, de manera arbitraria, se selecciona una de las incógnitas y sobre los términos asociados a ésta se multiplican una o ambas ecuaciones por constantes elegidas para lograr la condición.

En el último sistema de ecuaciones, se escoge eliminar la incógnita y , para ello, se multiplica la segunda ecuación por -2 , de tal forma que los coeficientes de y difieran solo en el signo así, los coeficientes de y son 4 y -4 , por lo tanto difieren solo en el signo.

$$\begin{cases} 2, 4x + 4y = 80 & \text{ecuación 1} \\ -6x - 4y = -134 & \text{ecuación 2, multiplicada por } -2 \end{cases}$$

El siguiente paso es sumar las ecuaciones, aplicando las operaciones entre términos semejantes, así:

$$\begin{aligned} \text{Luego de sumar: } -3, 6x &= -54 \\ x &= \frac{-54}{-3,6} \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Obtenga el valor de y , reemplazando el valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones.

Ejercicio 5. Resuelva el sistema anterior, pero elimine ahora x . Compare sus resultados.

Ejercicio 6. Dos grifos llenan un depósito de agua que tiene una capacidad de 31 metros cúbicos, abriendo el uno 7 horas y el otro 2 horas. Después llenan otro depósito de 27 metros cúbicos abriendo el uno 4 horas y el otro 3 horas. ¿Cuántos litros vierte por hora cada grifo? (Utilice, para su solución, cualquiera de los métodos estudiados anteriormente).

Ejercicio 7. Encuentre las dimensiones de un rectángulo tal que si se aumenta la base en 6 metros y se disminuye la altura en otros 6, el área no varía; pero si se aumenta la base en 3 y disminuye la altura en 4, el área aumenta en 3 metros cuadrados.

Ejercicio 8. Encuentre el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales: **

$$\begin{cases} 3x + 5y - 4z = 8 \\ x + y + 5z = -5 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

3.3.1. Ejercicios

1. Encuentre el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a) \begin{cases} 2y + x = 4 \\ 2x + 8 = 4y \end{cases}$$

** $x = -2; y = 2; z = -1$

$$b) \begin{cases} 3(x - y - 1) = 5x - 3 \\ 5y + 5x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6} = 1 \\ x - z = 2 \\ x - y + \frac{z}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{3}{4}x + 2 = \frac{5}{2}y \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

2. Resuelva los siguientes problemas y compruebe su solución:

- ¿Cuántas onzas de dos soluciones de alcohol, una al 8% y la otra al 15% se deben mezclar para obtener 100 onzas de una solución al 12,2%?
- Un vendedor de artículos deportivos vende 5 balones de fútbol y 3 bicicletas estáticas por \$1.510.000. Al día siguiente, vende 3 balones de fútbol y 4 bicicletas estáticas por \$1.500.000. ¿Cuál es el precio de cada artículo?
- Un capital de \$120.000.000 se distribuye para invertir en dos títulos valores, uno paga a 10% anual y el otro al 12% anual. ¿Cuánto se invierte a cada tasa, si se sabe que los ingresos anuales por las dos inversiones es \$13.100.000
- Un terreno rectangular está rodeado por 72 metros de cerca. Si ese terreno se divide con una cerca paralela al lado más corto, se necesitan en total 88 metros de cerca. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

3.4. Ecuación cuadrática

Las ecuaciones estudiadas hasta el momento han sido lineales, en esta sección se presentarán ecuaciones de segundo grado con una incógnita, llamadas *ecuaciones cuadráticas*. Adicionalmente se modelarán situaciones prácticas que requieran de este tipo de ecuaciones para su solución.

Parte 1: Solución de ecuaciones cuadráticas vía factorización.

Ejercicio 1. Observe el siguiente ejemplo:

¿Qué ancho tiene el marco que rodea la foto de la figura 3.1, si el área del marco es igual al área de la foto?



Figura 3.1: Marco que rodea una foto.

Continuando con la forma de trabajo sugerida en secciones anteriores, inicialmente se identifican los datos (cantidades) conocidos y desconocidos que presenta la situación.

Datos desconocidos:

Ancho del marco que rodea la foto, llámelo x .

Datos conocidos:

Área de la foto: $(10 \text{ pies}) \cdot (72 \text{ pies}) = 720 \text{ pies}^2$

Planteamiento de la ecuación: Utilizando la figura 1, realice los trazos que considere necesarios sobre el marco, de tal manera que le permita hallar su área. Escriba aquí su propuesta.

La ecuación $2(72x) + 2(10x) + 4x^2 = 720$ satisface la condición: “área del marco igual a área de la foto”. Justifique esta afirmación.

Solución de la ecuación:

$$\begin{aligned} 2(72x) + 2(10x) + 4x^2 &= 720 && \text{(Ecuación)} \\ 144x + 20x + 4x^2 &= 720 && \text{(Realizando multiplicaciones indicadas)} \\ 4x^2 + 164x - 720 &= 0 && \text{(Operaciones entre términos semejantes e igualando a cero)} \\ 4(x^2 + 41x - 180) &= 0 && \text{(Factorizando)} \\ x^2 + 41x - 180 &= 0 && \text{(Aplicando la posibilidad de la división, se divide por 4)} \end{aligned}$$

Esta última ecuación es de segundo grado (cuadrática) y una forma de resolverla es factorizando la expresión $x^2 + 41x - 180$, es decir $(x + 45)(x - 4)$. Por lo tanto, la ecuación $x^2 + 41x - 180 = 0$ es equivalente a la expresión $(x + 45)(x - 4) = 0$.

Se tienen ahora dos factores cuyo producto es cero, y la única forma en que esto ocurre, es que uno de ellos, o ambos, sean iguales a cero, es decir,

Propiedad: Si c, d son números reales y $c \cdot d = 0$, entonces $c = 0$, o, $d = 0$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x + 45 = 0, \text{ o, } x - 4 = 0 & \quad \text{(Igualando a cero cada factor)} \\ x = -45, \text{ o, } x = 4 & \quad \text{(Despejando el valor de } x) \end{aligned}$$

Así, la ecuación $x^2 + 41x - 180 = 0$ tiene dos soluciones $x = -45$, o, $x = 4$. Para dar respuesta al problema planteado, se toma como única solución $x = 4$. ¿Por qué no se toma como solución $x = -45$?

Después del análisis anterior se puede afirmar que el ancho del marco del cuadro debe ser 4 pies .

Ejercicio 2. Para encerrar un terreno rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de alambre. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

Datos conocidos:

Área encerrada: 750 m^2

Total de alambre utilizado: 110 m

Datos desconocidos:

Largo del terreno: llámelo x

Ancho del terreno: $55 - x$. ¿De dónde aparece esta expresión? Observe la figura 3.2 y justifique.

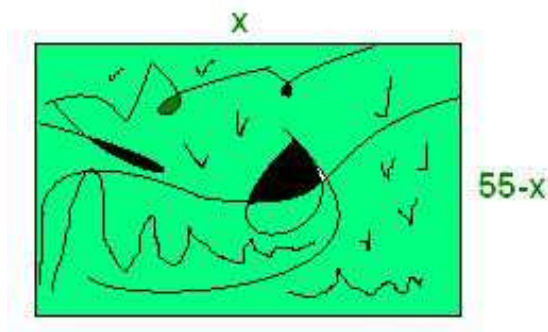


Figura 3.2: Terreno rectangular

Planteamiento de la ecuación:

El área del rectángulo es igual al producto entre el ancho y el largo. Escriba a continuación una ecuación que modele lo anterior.

Resuelva la ecuación *. Justifique cada paso y dé respuesta al interrogante.

Parte 2: Solución de ecuaciones cuadráticas mediante fórmula cuadrática.

Hasta ahora las ecuaciones cuadráticas estudiadas se han resuelto vía factorización; sin embargo, no siempre es fácil aplicar la propiedad enunciada en la parte 1, ¿por qué?

En esos casos se hará uso de la conocida *fórmula cuadrática* *, cuyo resultado se enuncia a continuación:

Fórmula cuadrática. Si $a \neq 0$, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La simple sustitución de los valores de a , b y c en la expresión anterior, permite resolver *cualquier* ecuación de segundo grado.

A partir de la fórmula cuadrática, se afirma que $b^2 - 4ac$ ** determina *cuántas* soluciones tiene la ecuación, así:

- Si $b^2 - 4ac$ es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes.
- Si $b^2 - 4ac$ es cero, la ecuación cuadrática tiene una solución real.
- Si $b^2 - 4ac$ es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.

Ejercicio 3. ¿Cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones cuadráticas?

i) $3x^2 - x = 10$

ii) $-10x + 1 + 25x^2 = 0$

* $x = 30$ o $x = 25$

*Para consultar más sobre ecuaciones cuadráticas, y cómo obtener la *fórmula cuadrática* visite: <http://valle.fiencias.unam.mx/~lugo/bach2/Cuadratica/index.html>

** Al número $b^2 - 4ac$ se le llama *discriminante* de la ecuación de segundo grado, puesto que indica el *tipo de soluciones* que tiene la ecuación.

iii) $8x - 2x^2 - 20 = -10$

Ejercicio 4. Encuentre las soluciones de las ecuaciones cuadráticas del *Ejercicio 3*.

Parte 3: A practicar lo aprendido

Ejercicio 5. Solucione los siguientes problemas:

1. Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son esos números?***
2. Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^3 cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Halle las dimensiones de la caja.**** Recuerde que el volumen de la caja es el producto entre el largo, el ancho y el alto.

Ejercicio 6. Solucione las siguientes ecuaciones:

i) $-7x^2 + 2x + 5 = 0^*$

ii) $5x^2 + 3 = 5^{**}$

iii) $\frac{9x^2}{5} + \frac{6x}{4} + 1 = 0^{***}$

Parte 4: Aplicación de la fórmula cuadrática en factorización.

Otro método para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) se basa en la fórmula cuadrática, ya que:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \\ &= a \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \end{aligned}$$

Ejemplos:

- Factorizar:

$$3x - 7 + 2x^2$$

*** 16 y 18

**** Largo: 14 cm Ancho: 10 cm y Alto: 6 cm

* $x = 1$ o $x = \frac{-5}{7}$

** $x = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$

*** No tiene solución

En este caso, $a = 2$, $b = 3$ y $c = -7$, entonces:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 7 &= 2 \left(x + \frac{3 + \sqrt{3^2 - 4(2)(-7)}}{4} \right) \left(x + \frac{3 - \sqrt{3^2 - 4(2)(-7)}}{4} \right) \\ &= 2 \left(x + \frac{3 + \sqrt{9 + 56}}{4} \right) \left(x + \frac{3 - \sqrt{9 + 56}}{4} \right) \\ &= 2 \left(x + \frac{3 + \sqrt{65}}{4} \right) \left(x + \frac{3 - \sqrt{65}}{4} \right) \end{aligned}$$

■ Factorizar:

$$x^2 - 5x + 4$$

Comparando con la forma general se tiene que, $a = 1$, $b = -5$ y $c = 4$, por tanto:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= 1 \left(x + \frac{(-5) + \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2} \right) \left(x + \frac{(-5) - \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2} \right) \\ &= \left(x + \frac{(-5) + \sqrt{25 - 16}}{2} \right) \left(x + \frac{(-5) - \sqrt{25 - 16}}{2} \right) \\ &= \left(x + \frac{(-5) + \sqrt{9}}{2} \right) \left(x + \frac{(-5) - \sqrt{9}}{2} \right) \\ &= \left(x + \frac{(-5) + 3}{2} \right) \left(x + \frac{(-5) - 3}{2} \right) \\ &= \left(x + \frac{-2}{2} \right) \left(x + \frac{-8}{2} \right) \\ &= (x - 1)(x - 4) \end{aligned}$$

3.4.1. Ejercicios

1. Solucione las siguientes ecuaciones y verifique su respuesta:

a) $3x^2 + 17x = 6$

b) $10x^2 - \frac{39}{2}x + 9 = 0$

c) $-3(x^2 - x) = -6(x + 2)$

d) $25x^2 - 30x + 9 = 0$

e) $x(x + 3) = 2(x - 3) + x$

f) $(x - 3)(2x + 7) = 1$

2. Empleando la fórmula cuadrática, halle las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones:

a) $3 \left(\frac{-9x + 2}{4} \right)^2 - 5x = 1$

$$b) \frac{-\frac{x}{2} - x \left(x - \frac{2}{5} \right)}{\frac{1}{2} - 2} - x = 2$$

$$c) 16 + x^4 = 17x^2$$

$$d) 6 - x - \sqrt{x} = 0$$

$$e) -3\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = -2$$

$$f) 2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} + 8 = 0$$

$$g) \sqrt{x+3} = 2 + \sqrt{x-5}$$

$$h) \sqrt{4x+1} = x+1$$

3. Resuelva los siguientes problemas y compruebe su solución:

- Las edades de Angie y Lucy suman 37 años. Si el producto de ambas edades es 330 años, ¿cuál es la edad de cada una?
- ¿Qué área tiene un cuadrado, si su diagonal mide 30 cm?
- Un cuadrado y un rectángulo tienen la misma altura. Halle el perímetro de cada uno si se sabe que, el área del rectángulo es el doble del área del cuadrado y además, la base del rectángulo mide 4 cm más que su altura.
- Encuentre dos números consecutivos cuyo producto sea 380.
- Calcule las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que su área es 405 m² y su perímetro es 84 m.

4. Factorice los siguientes trinomios empleando la fórmula de esta sección y verifique su solución:

$$a) -5x^2 + 6 - 3x$$

$$b) \frac{1}{4} + 2x^2 - 3x$$

$$c) 2x - 15 + 7x^2$$

3.5. Ecuaciones no-lineales y no-cuadráticas

En esta sección se plantean y solucionan problemas que generan ecuaciones de tipo *no lineal* o *no cuadrático* pero se pueden transformar, mediante procedimientos algebraicos, en ecuaciones lineales o cuadráticas y así determinar su solución.

Parte 1: Algunas situaciones prácticas.

Ejercicio 1. Se reparten \$60.000 entre cierto número de amigos presentes en una reunión, de tal manera que a cada uno le corresponda lo mismo y no sobre dinero. Una persona advierte que si hubiera dos amigos menos, a cada uno se le asignaría \$2.500 más. ¿Cuántos son los amigos presentes y cuánto le corresponde a cada uno?

Datos conocidos:

Dinero a repartir: \$60.000

Datos desconocidos:

Llame x a la cantidad de amigos presentes.

Dinero (en pesos) que le corresponde a cada uno: $\frac{60.000}{x}$

Planteamiento de la ecuación:

Según el enunciado del problema, si existieran dos amigos menos, es decir, $x - 2$ amigos, cada uno recibiría \$2.500 más. Así, se puede modelar el problema mediante la ecuación:

$$\frac{60.000}{x} + 2.500 = \frac{60.000}{x - 2}$$

Solución de la ecuación:

La ecuación anterior no es lineal ni cuadrática, esta ecuación se llama ecuación racional, ¿por qué?

Antes de dar solución a esta ecuación es necesario imponer restricciones sobre la incógnita. Recuerde que no se puede dividir por cero, por lo tanto para que $\frac{60.000}{x}$ tenga sentido, es necesario que $x \neq 0$, para que $\frac{60.000}{x-2}$ tenga sentido es necesario que $x \neq 2$. Es decir, para que la ecuación planteada tenga sentido se necesita que $x \neq 0$ y $x \neq 2$. Luego de conocer las restricciones sobre la incógnita, siga la solución paso a paso.

$$\frac{60.000}{x} + 2.500 = \frac{60.000}{x - 2} \quad (\text{Ecuación})$$

$$\frac{60.000}{x} - \frac{60.000}{x - 2} + 2.500 = 0 \quad (\text{Igualando a cero})$$

$$\frac{60.000(x - 2) - 60.000x + 2.500x(x - 2)}{x(x - 2)} = 0 \quad (\text{Realizando la operación})$$

$$\frac{60.000x - 120.000 - 60.000x + 2.500x^2 - 5.000x}{x(x - 2)} = 0$$

$$\frac{2.500x^2 - 5.000x - 120.000}{x(x - 2)} = 0 \quad (\text{Términos semejantes})$$

Se tiene ahora una ecuación de la forma $\frac{c}{d}$ igual a cero, y la única forma en que esto ocurre, es que c sea igual a cero, es decir,

Propiedad: Si c, d son números reales con d diferente de cero, y $\frac{c}{d} = 0$, entonces $c = 0$

Aplicando esta propiedad a la última ecuación, se tiene $2.500x^2 - 5.000x - 120.000 = 0$ (**ecuación cuadrática**)

Encuentre la solución * y dé respuesta al problema propuesto.

Ejercicio 2. Un número excede a otro en 56. Si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 3 y el residuo 8, ¿cuáles son los números?

Datos desconocidos: Número mayor: llámelo x

Número menor: $x - 56$

*En la reunión hay 8 amigos

Planteamiento de la ecuación: Recuerde los términos de una división (dividendo: P , divisor: Q , cociente: C y residuo: R , $P = Q * C + R$). Cuando queda residuo, si al dividendo se le quita el residuo, la división es exacta. Utilizando este hecho la ecuación a solucionar es: $\frac{x-8}{x-56} = 3$. Comente sobre este planteamiento.

Resuelva la ecuación **. Justifique cada paso y dé respuesta al interrogante.

Parte 2: Solución de ecuaciones

Ejemplo:

Encontrar la solución de la siguiente ecuación, no olvide imponer condiciones sobre la incógnita:

$$\frac{14}{x^2 + 3x - 18} = \frac{5}{x^2 + 6x}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{14}{x^2 + 3x - 18} - \frac{5}{x^2 + 6x} &= 0 && \text{(Ecuación planteada)} \\ \frac{14}{x^2 + 3x - 18} - \frac{5}{x^2 + 6x} &= 0 && \text{(Igualando a cero)} \end{aligned}$$

Para realizar la suma de racionales, se debe encontrar el común denominador. Esto requiere que los denominadores estén factorizados, así:

$$\frac{14}{(x+6)(x-3)} - \frac{5}{x(x+6)} = 0 \quad \text{(Compruebe las factorizaciones)}$$

El común denominador entre expresiones algebraicas está constituido por los factores comunes con su mayor exponente y por los no comunes, luego, el común denominador en este caso es: $x(x+6)(x-3)$

Por lo tanto, cada término de la ecuación debe amplificarse de tal forma que cada uno quede con el común denominador, tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{14x}{x(x+6)(x-3)} - \frac{5(x-3)}{x(x+6)(x-3)} &= 0 \\ \frac{14x - 5(x-3)}{x(x+6)(x-3)} &= 0 \\ \frac{14x - 5x + 15}{x(x+6)(x-3)} &= 0 \\ \frac{9x + 15}{x(x+6)(x-3)} &= 0 \end{aligned}$$

Luego, la ecuación a solucionar es: $9x + 15 = 0$ ¿Por qué? ¿Qué restricciones tiene la incógnita?

Ejercicio 3. Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones:

i) $\frac{4+3x}{x+5} = \frac{x-6}{x+5}$ ****

** 80 es una solución

**** No tiene solución

$$\text{ii) } \frac{(x-5)(x+3)(2x+8)}{(3x-1)(x^2-25)} = 0$$

$$\text{iii) } 3 - \frac{4}{5 - \frac{1}{x-2}} = \frac{x-3}{4}$$

$$\text{iv) } \sqrt{2x-5} + 4 = x \text{ (Verifique su solución con nota al pie)*****}$$

3.5.1. Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones, imponga condiciones sobre la incógnita y verifique soluciones:

$$a) \frac{3x-8}{x^2-4} = \frac{2x-6}{x^2-4}$$

$$b) \frac{8x+1}{5x^2+x-6} = \frac{2}{x-1}$$

$$c) \frac{3x}{3x-1} = \frac{1}{2}$$

$$d) 5 - \frac{2x - \frac{7}{2}}{2+x} = \frac{3}{4}$$

$$e) \frac{x}{2x-4} - \frac{2}{3} = \frac{7-2x}{3x-6}$$

$$f) \frac{(2x-6)(x+1)(-x-3)}{(-x+7)(3x-5)} = 0$$

$$g) 3 \left(\frac{x-1}{x} \right)^2 - 4 = 4 \left(\frac{x-1}{x} \right)$$

$$h) x+2 = \sqrt{-2-3x}$$

$$i) \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 3 = 0$$

2. Resuelva los siguientes problemas y compruebe su solución:

a) El numerador de un fraccionario excede al denominador en 2. Si el denominador se aumenta en 7, se obtiene $\frac{1}{2}$. Halle el fraccionario.

b) La diferencia de dos números es 44, y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 3 y el residuo 2. Halle los números.

Capítulo 4

Inecuaciones

4.1. Inecuación lineal

En esta sección y en la siguiente, se presentará un breve estudio sobre inecuaciones lineales y no-lineales y algunos métodos de solución. Con estas herramientas se dará solución a problemas prácticos como los siguientes:

La diferencia entre 21 y cuatro veces un número es mayor que 45 y menor que 73. ¿Cuáles son los posibles valores del número?

El Club Pep está vendiendo manzanas acarameladas a fin de recaudar fondos. El precio de cada manzana es \$800, excepto el viernes, día en el que se venderá cada una en \$650. Si el Club vende 200 manzanas, ¿cuál es el mínimo número de manzanas de \$800 que se pueden vender a fin de obtener por lo menos \$148.000?

Parte 1: Desigualdades y algunas de sus propiedades

Expresiones como $a < b$, $a > b$,* $a \leq b$ y $a \geq b$ se denominan *desigualdades*, en particular, $a < b$ y $a > b$ son *desigualdades estrictas*, y al escribir $a \leq b$ queremos expresar que $a < b$ o bien $a = b$.

Propiedades

- i. Para a y b números reales, se tiene una y sólo una, de las tres relaciones:

$$a < b, \quad b < a, \quad a = b$$

- ii. Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $a + c < b + c$

- iii. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

- iv. Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$

- v. Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$

- vi. Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$

atienda esta afirmación!

Ejercicio 1.

Complete los espacios en blanco de tal forma que cada una de las siguientes afirmaciones sea verdadera:

* $a < b$ se lee “ a es menor que b ” y $a > b$ se lee “ a es mayor que b ”.

- i) (*Ejemplo*) Si $a = -3$ y $b = -5$ entonces a es *mayor* que b (Simbolización: $a > b$)
- ii) $-4 < 3$ entonces $(-4)(5)$ es _____ que $(3)(5)$. Propiedad empleada _____
- iii) $-4 < 3$ entonces $(-4)(-6)$ es _____ que $(3)(-6)$. Propiedad empleada _____
- iv) $-9 < 0$ entonces $(-9)(-2)$ es _____ que $(0)(-2)$.
- v) a negativo se puede simbolizar como _____
- vi) a positivo se puede simbolizar como _____

Parte 2: Inecuación lineal

Expresiones algebraicas de la forma:

$$\begin{aligned} ax + b < c, & \quad \text{o} \quad ax + b \leq c \\ ax + b > c, & \quad \text{o} \quad ax + b \geq c \\ c < ax + b < d, & \quad \text{o} \quad c \leq ax + b \leq d \end{aligned}$$

Son llamadas *inecuaciones lineales* o *inecuaciones de primer grado en una variable*.

Al resolver una inecuación se deben determinar los valores de la incógnita que la satisfacen.** Así por ejemplo, algunas soluciones de la inecuación $x + 2 < 7$ son: -2 (porque $-2 + 2 < 7$) y $4, 8$ (porque $4, 8 + 2 < 7$). Se podrá continuar con una lista de posibles soluciones, sin embargo, es fácil observar en este caso que las soluciones de la inecuación corresponden a todos los números reales menores que 5 . Esto se simboliza mediante $x < 5$ y se representa sobre una recta numérica como lo indica la figura 4.1.



Figura 4.1: Intervalo $(-\infty, 5)$

La solución de una inecuación corresponde, generalmente, a un conjunto de valores que se puede presentar en forma de *intervalo****.

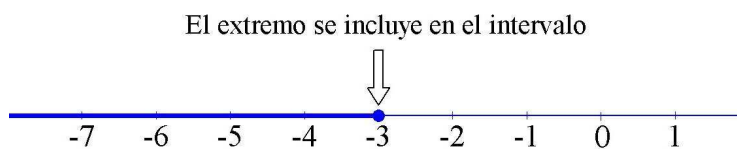
Ejemplos:

A continuación se estudia la solución de tres inecuaciones. Lea y revise cada paso.

- i) $8x + 15 \leq -9$. Así $8x \leq -24$, luego $x \leq -3$
- Representación gráfica de la inecuación $x \leq -3$

** Satisfacer una inecuación significa que, al reemplazar el valor de la incógnita en la inecuación, se obtiene una afirmación verdadera.

*** Algunos subconjuntos de números reales son los *intervalos* que, geoméricamente corresponden a segmentos de recta o a semirectas. Existen cuatro tipos básicos: cerrado, abierto, semiabierto e infinitos. Comente al respecto en clase.

Figura 4.2: Intervalo $(-\infty, -3]$

ii) $-6 - 2(5 - 2x) < 7(2x - 1)$. Así:

$$-6 - 10 + 4x < 14x - 7$$

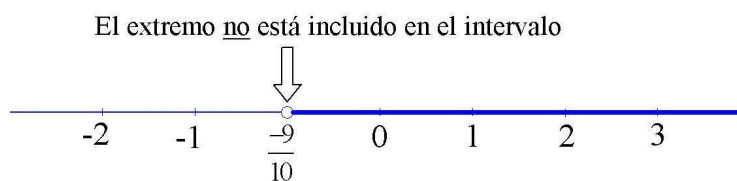
$$4x - 14x < -7 + 16$$

$$-10x < 9$$

$$10x > -9 \quad (\text{Propiedad vi, multiplicando por } -1)$$

$$x > -\frac{9}{10}$$

- Representación gráfica de la inecuación $x > -\frac{9}{10}$

Figura 4.3: Intervalo $(-\frac{9}{10}, \infty)$

iii) $-9 \leq 8 - 3x < 14$. Así:

$$-9 - 8 \leq -3x < 14 - 8$$

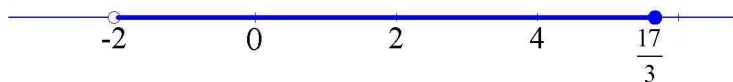
$$-17 \leq -3x < 6$$

$$17 \geq 3x > -6, \quad (\text{propiedad v})$$

$$\frac{17}{3} \geq x > -2, \quad \text{o equivalentemente}$$

$$-2 < x \leq \frac{17}{3}$$

- Representación gráfica de la inecuación $-2 < x \leq \frac{17}{3}$

Figura 4.4: Intervalo $(-2, \frac{17}{3}]$

Ejercicio 2. Resuelva las siguientes inecuaciones, grafique su solución y escríbala como un intervalo:

i) $x^2 + x(-6 + x) \geq 2(x^2 + 7x)$

Sol. $x \leq 0$

ii) $2 < \frac{6 - 5x}{6} \leq 7$

Sol. $-\frac{36}{5} \leq x < -\frac{6}{5}$

iii) $\frac{x}{6} - 1 > \frac{-3(x - 1)}{2}$

Sol. $x > \frac{3}{2}$ **Parte 3:** Situaciones modeladas con inecuaciones

Retomando las dos primeras situaciones prácticas presentadas al comienzo de esta sección.

- i) La diferencia entre 21 y cuatro veces un número es mayor que 45 y menor que 73. ¿Cuáles son los posibles valores del número?

Solución. Sea x el número. El modelo que satisface las condiciones presentadas en este problema se puede escribir como:

$$45 < 21 - 4x < 73$$

Ejercicio 3. Resuelva la inecuación anterior.Indique el conjunto de valores que puede tomar el número, tres soluciones particulares a la inecuación y dos valores que no sean solución de la inecuación.

- ii) El Club Pep está vendiendo manzanas acarameladas a fin de recaudar fondos. El precio de cada manzana es \$800, excepto el viernes, día en el que se venderá cada una en \$650. Si el Club vende 200 manzanas, cuál es el mínimo número de manzanas de \$800 que se pueden vender a fin de obtener por lo menos \$148.000?

Para construir el modelo, suponga que x es el número de manzanas que cuestan \$ 800 cada una.

- a) ¿Qué expresión representa el número de manzanas que cuestan \$650 cada una.?
- b) Ahora, el dinero recaudado por la venta de las manzanas corresponde a $800x + 650(200 - x)$. ¿Qué inecuación modela la situación planteada si se espera vender por lo menos \$ 148.000?
- c) Resuelva la inecuación propuesta y responda la pregunta al problema.

4.1.1. Ejercicios

1. Resuelva las siguientes inecuaciones y escriba la solución como un intervalo:

i) $-6 \leq -5 - 3x < 1$

ii) $\frac{5x}{3} + 2 < \frac{x}{3} - 1$

iii) $\frac{8}{3}(4 - z) \leq \frac{2}{9}(-3z + 3)$

iv) $2w - 7 > -1$ y $-w + 6 \geq 2$ [Indicación: La “**y**” representa una intersección. Resuelva cada inecuación y luego haga uso del significado de la “**y**”.]

v) Retome el ejercicio anterior y cambie la “**y**” por una “**o**”. [Indicación: La “**o**” representa una unión. Resuelva cada inecuación y luego haga uso del significado de la “**o**”.]

2. Justifique por qué las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- i) -5 es una solución de $\frac{3-x^2}{-x+1} < 1$
- ii) Si m es negativo entonces $-3m^2 + 5m$ es negativo. [Indicación: Tomar valores particulares de m no justifican la afirmación, solo la ejemplifican]

3. Ejercicios de aplicación.

- i. En 1993 el operador de telefonía celular *Pacific Bell*, cobraba 0,15 dólares por el primer minuto, más 0,14 dólares por cada minuto adicional (o fracción), si el cliente estaba inscrito en el plan *A*. ¿Cuántos minutos (máximo y mínimo) puede hablar, en una misma llamada, una persona que cuenta con más de 2 dólares pero con menos de 4,50?
- ii. Un estudiante de física obtuvo 85, 98 y 93 en tres parciales (valor máximo de cada examen 100 puntos), y le falta la nota del examen final, cuyo peso es dos veces un parcial. Si la nota definitiva debe ser 90 o más para alcanzar una *A* y ser admitido en un curso avanzado, ¿cuál es la menor nota en su examen que le dará la admisión a dicho curso?
- iii. Irene Martínez asistirá a una conferencia fuera de su país durante una semana. Antes del viaje, evalúa los costos de rentar un auto por ese periodo de tiempo en dos empresas; *Avery*, una de ellas, pide 51 dólares diarios sin cuota de kilometraje, mientras que *Hart*, cobra 207 dólares por semana más 0,28 dólares por kilómetro (o fracción). ¿Cuántos kilómetros debe manejar Irene para que un auto de *Hart* sea la mejor opción?
- iv. La suma de las longitudes de dos lados (cualquiera) de un triángulo debe ser mayor que el tercer lado. Si un lado de un triángulo mide 17 cm y otro lado mide 1 cm menos que dos veces el tercer lado, ¿cuáles son las posibles longitudes del tercer lado?

4.2. Inecuaciones no-lineales

El objetivo principal de esta sección es presentar un método para resolver inecuaciones no-lineales. Una situación práctica será la motivación a este ejercicio.

Parte 1: Problema de aplicación

Una decoradora diseña y vende lámparas para muros. Si la utilidad semanal (en dólares) por la fabricación y venta de x lámparas se puede describir a través de la expresión $-x^2 + 80x - 300$, ¿cuántas lámparas se deben vender cada semana, a fin de garantizar al menos 400 dólares de utilidad?

Proponga cómo modelar la situación anterior (para ello emplee una inecuación).

Parte 2: Solución de inecuaciones no-lineales

Con algunos ejemplos se ilustrará este método de solución. En el primero de ellos se resolverá el problema de las lámparas.

$$\begin{array}{ll}
 -x^2 + 80x - 300 \geq 400 & \\
 -x^2 + 80x - 700 \geq 0 & \text{(Comparando con cero)} \quad (\S) \\
 x^2 - 80x + 700 \leq 0 & \text{(Multiplicando por } -1 \text{) (para facilitar la factorización)} \\
 (x - 70)(x - 10) \leq 0 & \text{(Factorizando, si es posible) ****}
 \end{array}$$

**** En caso de que la expresión no sea factorizable, o aun si lo es, se puede recurrir a la solución de la ecuación asociada a la inecuación que, en este caso particular corresponde a $x^2 - 80x + 700 = 0$, cuyas soluciones son 10 y 70, cualquiera sea método empleado para resolverla. En otras palabras, luego de comparar con cero, el trabajo algebraico se concentra en resolver una ecuación.

Se tienen ahora dos factores, $x - 70$ y $x - 10$, cuyo producto debe ser negativo o cero, lo cual ocurre si uno de los factores es positivo y el otro negativo (o viceversa). El análisis de este comportamiento se simplificará recurriendo a la solución de las ecuaciones,

$$x - 70 = 0 \quad \text{y} \quad x - 10 = 0$$

y a su representación sobre la recta numérica, en donde, adicionalmente, se identifican los intervalos “generados” por los puntos 70 y 10, es decir, por las correspondientes soluciones de las ecuaciones mencionadas. Esto se puede observar en la *Figura 4.5*.

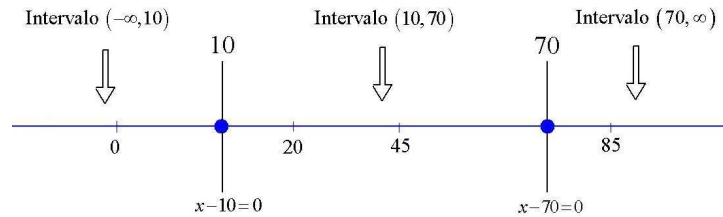


Figura 4.5: Intervalos para resolver $(x - 70)(x - 10) \leq 0$

Los valores $x = 10$ y $x = 70$ dan origen a los intervalos $(-\infty, 10)$, $(10, 70)$ y $(70, \infty)$. Para determinar cuál o cuáles de ellos dan solución a la inecuación, se elige un valor en cada intervalo y se evalúa en alguna de las inecuaciones presentadas en (§) (aquí se hará en $(x - 70)(x - 10) \leq 0$). Si la inecuación se satisface, el intervalo forma parte de la solución. Veamos:

Intervalo	Un valor de x en el intervalo	x evaluado en la inecuación
$(-\infty, 10)$	0	$700 \leq 0$ (falso)
$(10, 70)$	20	$-500 \leq 0$ (verdadero!)
$(70, \infty)$	85	$1125 \leq 0$ (falso)

Por lo tanto, el conjunto solución de $-x^2 + 80x - 300 \geq 400$ es el intervalo $[10, 70]$. Así, la decoradora debe diseñar y vender entre 10 y 70 lámparas semanales si espera obtener utilidades de 400 dólares o más.

Ejercicio 1. Utilice el método presentado para resolver $2x^3 - 10x^2 > 6(x - x^2)$.

i) Para ello complete:

$$\begin{aligned}
 2x^3 - 10x^2 &> 6(x - x^2) \\
 &> 0 && \text{(Comparando con cero y simplificando)} \\
 &> 0 && \text{(Factorizando)}
 \end{aligned}$$

ii) Resuelva las ecuaciones $2x = 0$, $x + 1 = 0$ y $x - 3 = 0$.
(Las soluciones aparecen en la *Figura 4.6*.)

iii) Complete la siguiente tabla:

Intervalo	Un valor de x en el intervalo	x evaluado en la inecuación

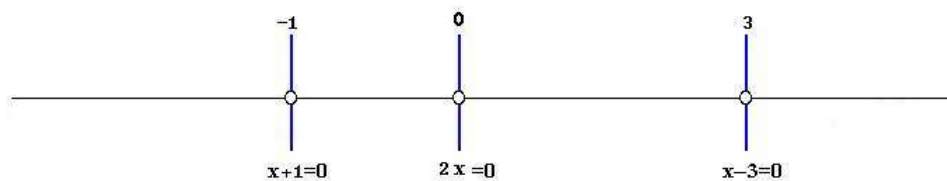


Figura 4.6: Intervalos para resolver $2x(x - 3)(x + 1) > 0$

iv) Finalmente, la solución de $2x^3 - 10x^2 > 6(x - x^2)$ es:

v) ¿Qué ocurre con la inecuación cuando x toma valores que no se encuentran en el conjunto solución?

Ejercicio 2. *****

Para resolver la inecuación $\frac{5}{x} \leq -2$ se empleará el mismo método. Por favor, siga los pasos presentados.

$$\begin{aligned} \frac{5}{x} &\leq -2 \\ &\leq 0 && \text{(Comparando con cero)} \\ &\leq 0 && \text{(Operando y factorizando)} \end{aligned}$$

En inecuaciones como la anterior (y las siguientes) debe igualar a cero tanto el numerador como el denominador de la expresión, y las soluciones a estas ecuaciones se ubican todas sobre la recta.

En este caso, los intervalos deben generarse a partir de:



Figura 4.7: Intervalos para resolver $\frac{5}{x} \leq -2$

Ejercicio 3. *****

Resuelva las siguientes inecuaciones, y exprese su solución en forma de intervalo:

i) $\frac{x^2 - 6x + 5}{1 - x} < 5$

ii) $\frac{-6x^2 + 2x - 7}{1 - 3x} > 2x$

iii) $\sqrt{1 + x} < 3$

***** Rta. $[-\frac{5}{2}, 0)$
 ***** Rtas. i) $(0, 1) \cup (1, \infty)$, ii) $[\frac{1}{3}, \infty)$, iii) $[-1, 8)$

4.2.1. Ejercicios

Parte 1: Resuelva las siguientes inecuaciones y escriba la solución como un intervalo.

i) $(5 - 3x)(x + 4) > 0$

ii) $x^3 \leq 5x^2 - 4x$

iii) $x^2 - 4x + 7 > 0$

iv) $\frac{2x + 5}{x - 4} < -3$

v) $\frac{2x + 5}{x - 4} \geq -3$

vi) $\frac{x + 5}{x - 7} \leq 1$

Parte 2: Ejercicios de aplicación.

- i) Si la utilidad (en dólares) de un gran complejo turístico de apartamentos está dada por $-x^2 + 250x - 15.000$, donde x es el número de apartamentos alquilados, ¿qué ocupación producirá ganancias al complejo?
- ii) El mercado de productos básicos es muy inestable; puede ganarse o perderse dinero muy rápidamente en inversiones en frijol de soya, trigo, etc. Suponga que un empresario lleva un control de sus ganancias totales en el tiempo t , en meses, después de que comienza a invertir y encuentra que la expresión $4t^2 - 29t + 39$ describe dichas ganancias, ¿en cuáles meses, después de haber empezado a invertir, el empresario está perdiendo?
- iii) Se desea cercar un terreno rectangular para después dividirlo a la mitad con otra cerca. La cerca del contorno cuesta 3 dólares por pie lineal, y la otra, 6 dólares por pie lineal. El área del terreno debe ser 1.800 pies² y el costo de la cerca no debe sobrepasar los \$2.310, ¿cuáles son las restricciones sobre las restricciones del terreno?

Ejercicios complementarios

- i) Solución de ecuaciones lineales (Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones)

a) $\frac{x - 1}{6} - \frac{x - 3}{2} = -1$

b) $(3 - \frac{x}{2}) - (1 - \frac{x}{3}) = 7 - (x - \frac{x}{2})$

c) $x - \frac{\frac{x}{2} - 2}{3} = 2 + \frac{x}{2}$

d) $5 + \frac{5 + \frac{x}{3}}{\frac{1}{2}} = 3$

e) $\frac{3 - x}{4} - \frac{2x - 3}{2} = \frac{x + 1}{3}$

ii) Problemas de ecuaciones lineales con una incógnita: (Plantee una ecuación que dé solución al problema planteado y encuentre su solución:)

- a) El total de estudiantes de tres universidades en Bogotá (Sergio Arboleda, La Sabana, El Politécnico Grancolombiano) es de 14.800. Si la segunda tiene lo de la primera disminuida en 1.200 y la tercera el triple de la primera ¿Cuántos estudiantes tiene el Politécnico Grancolombiano?
- b) ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?
- c) Daniel realizó un préstamo en el banco con el propósito de pagar el arriendo, comprar un computador de contado y pagar el semestre de la U. El arriendo fue del 10% del préstamo, el computador le costó \$1'850.000 y el valor del semestre fue la mitad del préstamo. Si a Daniel le sobró del préstamo \$550.000, ¿cuánto le prestó el banco?
- d) Un padre tiene 42 años y su hijo tiene 10 años. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el triple de la edad del hijo?
- e) En una reunión hay el doble número de mujeres que de hombres y el triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Halle el número de hombres, mujeres y niños que hay en la reunión si en total hay 156 personas?

iii) Sistemas de ecuaciones lineales (Encuentre el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones)

$$a) \begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{2}{5}y = 12 \\ \frac{5}{2}x + y = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ x + \frac{2}{5}y = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x - \frac{3}{4}y = 4 \\ 5x - y = 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{7}{2}x - \frac{3}{4}y = 5 \\ \frac{x+3y}{5} = -1 \end{cases}$$

iv) Plantee un sistema de ecuaciones y solucione cada uno de los siguientes problemas:

- a) Dos grifos, el primero se abre 7 horas y el segundo se abre 2 horas, llenan un tanque de $31m^3$. Después, los mismos grifos, llenan un tanque de $27m^3$, abriendo el primero 4 horas y el segundo 3 horas. ¿Cuántos m^3 vierte por hora cada grifo?
- b) Un crucero tiene dos tipos de habitaciones, sencillas (1 cama) y dobles (2 camas), si en total tiene 51 habitaciones y 85 camas, ¿cuántas habitaciones tiene de cada tipo?
- c) En una bolsa hay 16 monedas que suman en total \$220. Las monedas son de \$5 y de \$25. ¿Cuántas monedas hay de cada valor?
- d) Determine dos números tales que la diferencia de sus cuadrados es 120 y su suma es 6.
- e) Calcule el valor de dos números sabiendo que suman 51 y que si al primero lo divide entre 3 y al segundo entre 6, los cocientes se diferencian en 1.

v) Ecuación cuadrática (Solucione las siguientes ecuaciones)

$$a) 2x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$b) 3x^2 + 7x = 40$$

$$c) 7x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$d) x^2 + 2x = -1$$

vi) Problemas con ecuación cuadrática (Plantee una ecuación para cada problema y encuentre la solución)

a) Las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son 5 y $2x$; ¿Cuál es el perímetro de este triángulo si la longitud de la hipotenusa es $3x - 5$?

b) El área de un rectángulo es igual a su perímetro. Si uno de sus lados excede al otro en $3m$, ¿cuáles son las dimensiones de este rectángulo?

c) Encuentre dos enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 61.

vii) Ecuaciones no lineales no cuadráticas (Encuentre el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones)

$$a) \frac{x}{x^2-25} + \frac{5}{x-5} = \frac{1}{x+5}$$

$$b) \frac{1}{x} - \frac{1}{4} = \frac{1}{x+2}$$

$$c) \frac{2}{(x-8)(x+4)} - \frac{3}{(x-8)} = 1$$

$$d) \frac{2x}{x-3} + \frac{5}{x+3} = \frac{36}{x^2-9}$$

$$e) \frac{4}{x^2-x-6} = \frac{2}{x^2-4}$$

$$f) \sqrt{x+3} - x = 3$$

viii) Inecuaciones lineales (Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones)

$$a) \frac{2-7x}{6} > \frac{-4}{5}$$

$$b) 5 - \frac{3x}{2} > \frac{x}{-4}$$

$$c) \frac{2}{3}x - 1 + \frac{x}{2} < \frac{1+x}{2}$$

$$d) \frac{2}{7}(-3x+8) \geq x - \frac{2}{5}(x+3)$$

$$e) \frac{-3x+8}{5} \leq \frac{2x-3}{-4}$$

Respuestas a los ejercicios complementarios

i) a) $x = 7$

b) $x = 15$

c) $x = 4$

d) $x = -18$

e) $x = \frac{23}{19}$

ii) a) 9600 estudiantes

b) 12 cm^2

c) \$6.000.000

- d) Hay 13 hombres, 26 mujeres y 117 niños.
- iii) a) $x = \frac{272}{35}$ y $y = -\frac{108}{7}$
 b) No tiene solución (El sistema es inconsistente)
 c) Tiene infinitas soluciones
 d) $x = -\frac{13}{7}$ y $y = -\frac{72}{7}$
 e) $x = 1$ y $y = -2$
- iv) a) El primero vierte $3m^3$ y el segundo vierte $5m^3$ por hora
 b) 34 habitaciones dobles y 17 habitaciones sencillas
 c) Hay 9 monedas de \$5 y 7 monedas de \$25
 d) Los números son 13 y -7
 e) Los números son 19 y 32
- v) a) $x = 3$ y $x = 4$
 b) $x = \frac{8}{3}$ y $x = -5$
 c) No tiene solución
 d) $x = -1$
- vi) a) Perímetro es 30.
 b) Las dimensiones del rectángulo son $6m$ y $3m$.
 c) Los números son 5 y 6 o -6 y -5 .
- vii) a) $x = -6$
 b) $x = -4$ y $x = 2$
 c) $x = \frac{1 + \sqrt{99}}{2}$ y $x = \frac{1 - \sqrt{99}}{2}$
 d) $x = 3$ y $x = -\frac{17}{2}$
 e) $x = 1$
 f) $x = -3$ o $x = -2$
- viii) a) $x \in \left(-\infty, \frac{34}{35}\right)$
 b) $x \in (-\infty, 4)$
 c) $x \in \left(-\infty, \frac{9}{4}\right)$
 d) $x \in \left(-\infty, \frac{122}{51}\right]$
 e) $x \in \left[\frac{17}{2}, \infty\right)$

Capítulo 5

Función

5.1. Concepto de función real

A partir de esta sección de trabajo, y hasta el final del curso, se estudiará uno de los conceptos centrales de las matemáticas: la noción de *función*. Se presentarán los elementos de una función, sus representaciones (gráfica y algebraica) y algunos tipos de función (lineal y cuadrática), así como situaciones que ilustren este concepto.

Parte 1: Función. Un tipo de relación

En este curso se han estudiado diversas situaciones a la luz de las *relaciones* establecidas entre objetos. Por ejemplo, el ingreso de una venta, con la cantidad de artículos vendidos; el área de un terreno rectangular, con las dimensiones de éste; la ganancia recibida por una inversión, con el capital invertido, el tiempo transcurrido y la tasa de rentabilidad, etc. Conexiones como éstas son un tipo de relación, tal vez el más importante, conocido con el nombre de *función*.

En cada una de las situaciones anteriores es fácil ver que una variable “depende de” (o “está en función de”) otra(s), así:

- Ingreso por ventas: dinero recibido por ventas (I) **depende de** la cantidad x de artículos vendidos.
- Terreno rectangular: el área (A) **depende de** alto h y ancho w .
- Inversión: la ganancia (P) **depende de** capital c , tiempo t y tasa de interés r .

Ejemplo 1. I , A y P son llamadas *variables dependientes*. Las variables x , h , w , c , t y r son denominadas *variables independientes*

Ejercicio 1. Proponga una situación en la que se evidencie la dependencia entre variables, e indique cuál es la variable dependiente y cuál(es) la(s) independiente(s).

Función real*

La característica esencial de una relación que es *función* se puede describir indicando que: “A cada valor de la(s) variable(s) independiente(s) se asigna *un único valor* de la variable dependiente”. Por ejemplo, en la relación: “A todo número real positivo se le asigna su raíz cuadrada”, los reales positivos son los posibles valores de la variable independiente, y la raíz cuadrada de ellos, los posibles valores de la variable dependiente. Es decir, a cada real positivo se le asigna un único valor, su raíz cuadrada.

Ahora, otros ejemplos para aclarar la idea anterior sobre el concepto de función.

*También llamada *función real de variable real*.

- i) A cada elemento del conjunto $\{-3, 1, 2, 3, 4, 5\}$ se le asigna su cuadrado. Esta relación *sí es función*.
- ii) En un pequeño barrio se comercializan tres artículos a , b y c en cinco tiendas distintas, y cada tienda ofrece al menos uno de esos artículos. Si se relaciona cada artículo, con la(s) tienda(s) que lo ofrece(n), al menos uno de ellos debe ofrecerse en más de una tienda, es decir, esta relación *no es función*.
- iii) A cada día de la semana se asigna uno de los números 5, 6 ó 7, de acuerdo al número de letras que tiene el nombre del día. Note que en la lista de números no aparece el 9, luego esta relación *no es función*.

Ejercicio 2. A partir del significado de función, indique por qué las situaciones ii) y iii) no representan funciones, pero el caso i) sí. [Indicación: Elabore un diagrama de flechas^{**} en cada caso.]

Parte 2: Definición y notación

Definición de función: Dados A y B dos conjuntos no vacíos, una función f de A en B es una relación de A en B que satisface la condición de que para todo elemento x de A existe un único elemento y de B .

Notación: A una función f se le denota $y = f(x)$, y se lee “ y es igual a f de x ”, se dice además que y es la imagen por f de x , siendo x la variable independiente y y la dependiente. Se escribe:

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Ejemplo:

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{5x}{3} - x^2 + 2$, entonces:

- i) $f(6) = \frac{5(6)}{3} - (6)^2 + 2 = 10 - 36 + 2 = -24$.
- ii) La imagen de -4 es $-\frac{62}{3}$ porque $f(-4) = -\frac{20}{3} - 16 + 2 = -\frac{62}{3}$.

Ejercicio 3. Sean g y h dos funciones definidas por $g(x) = 1 + \sqrt{4 - 3x}$ y $h(x) = \frac{9 + x}{5 - x}$.

- i) Tanto para g , como para h , halle la imagen de 0 y de -2 .
- ii) ¿Por qué se puede afirmar que g es una función positiva?
- iii) ¿Cuándo h es cero? ¿Cuándo h no está definida?
- iv) ¿Cuándo g está definida?

Parte 3: Gráfica de funciones

Si f es una función, entonces, la **gráfica** de f es el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y) del plano cartesiano, tales que $y = f(x)$. Se aprovecha la representación gráfica de una función para analizar su comportamiento. En las siguientes tres figuras se reconoce el concepto de función, y a partir de éste, se determina cuándo una gráfica representa una función.

^{**}Esta representación también es conocida como diagrama sagital, y aunque es sencillo es poco útil.

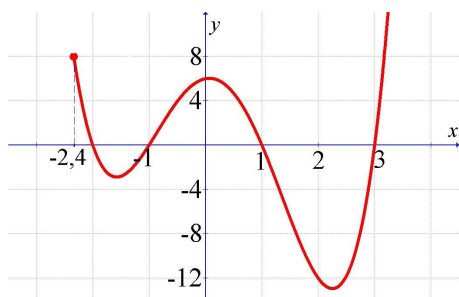


Figura 5.1: $y = f(x)$

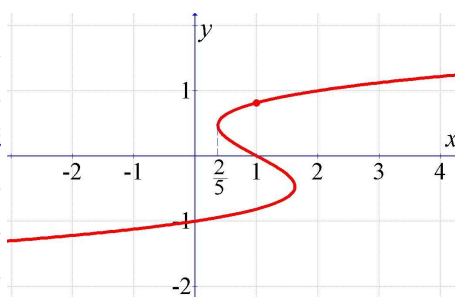


Figura 5.2:

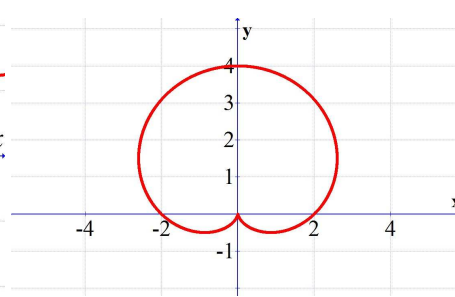


Figura 5.3:

En la figura 5.1 se observa que, a cada valor x le corresponde un único valor y ; por tanto, esta gráfica sí representa una función. ¿Por qué las figuras 5.2 y 5.3 no representan funciones?

[Nota: Existe una forma práctica de revisar si una relación es función. El “truco” consiste en trazar rectas paralelas al eje Y y comprobar que cada recta que se intersecte con la gráfica*** de la función, lo hace sólo en un punto.

Ejercicio 4.

- i) En cada una de las tres figuras arriba presentadas, trace rectas paralelas al eje Y , y a partir de esto corrobore que las gráficas 2 y 3 no representan funciones.
- ii) a) En la figura 5.1.
 - Halle o estime: $f(-2, 4) = \underline{\hspace{1cm}}$, $f(-2) = \underline{\hspace{1cm}}$, $f(0) = \underline{\hspace{1cm}}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \underline{\hspace{1cm}}$
 - ¿Cuántas veces la gráfica de f intersecta el eje x ? $\underline{\hspace{1cm}}$ Estime estos puntos.
 - ¿Qué valores x tienen imagen? (Dé su respuesta como un intervalo)
 - ¿En qué intervalos f es positiva?
- b) En la figura 5.2. Estime las imágenes de 1.
- c) En la figura 5.3. Halle las imágenes de 0.
- iii) En un plano cartesiano, represente dos relaciones, una que sea función y otra que no lo sea. Explique.
- iv) Trace la gráfica de una función r que satisfaga las siguientes condiciones: r definida si $x \in (-\infty, 2]$, $r(-3) = 2$, $r(2) = 4$ y $r(x) = 0$ en tres valores de x . Luego de realizar la gráfica de r , indique los intervalos en los cuales la función es positiva.

5.1.1. Ejercicios

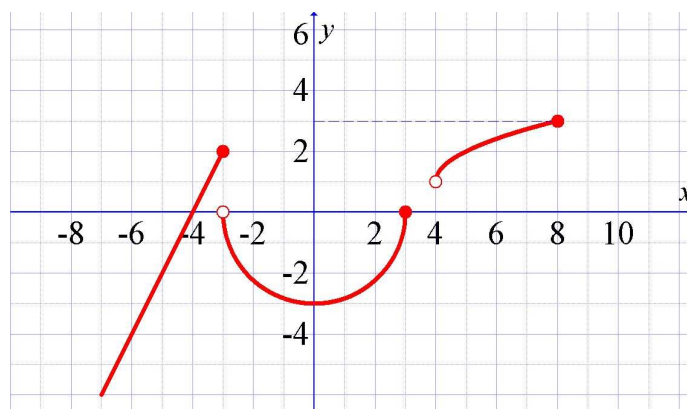
1. A partir de la siguiente gráfica, en donde se representa la función $y = h(x)$:

a) Complete:

- $h(-4) = \underline{\hspace{1cm}}$, $h(-3) = \underline{\hspace{1cm}}$
 $h(3) = \underline{\hspace{1cm}}$, $h(4) = \underline{\hspace{1cm}}$
- La imagen de 8 es: $\underline{\hspace{1cm}}$
- 2 es imagen de: $\underline{\hspace{1cm}}$ y $\underline{\hspace{1cm}}$.

b) Determine cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas; en cada caso justifique.

***Para ampliar, puede revisar <http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/lessons/vertical.html>



- $h(-2) = 0$
 - La gráfica de h se interseca con el eje x únicamente en $x = -4$.
 - h es negativa si $x \in (-3, 3)$, únicamente.
2. Trace la gráfica de una función t que satisfaga todas las siguientes condiciones:
- $t(-1) = 2$, $t(\frac{3}{2}) = -3$
 - $t(-3) < 0$
 - t se interseca con el eje x una sola vez
 - t definida si $x \in (-4, -1) \cup [-1, \frac{3}{2}] \cup [5, \infty)$
 - $t(x) = 4$ si $x \in [5, \infty)$
3. El área de un círculo de radio r está dado por $A(r) = \pi r^2$. Calcule $A(r - 4) - A(4)$.
4. Un carpintero vende estanterías para libros a x dólares cada una, y estima vender $300 - 2x$ unidades por mes. Si llamamos R a la función que describe el ingreso mensual del carpintero, tendremos $R(x) = x(300 - 2x)$.
- a) Explique, en español, el significado de R .
 - b) Halle el ingreso por la venta de 25 estanterías.
 - c) Si el ingreso fue de 8.800 dólares, ¿cuántas estanterías se vendieron?
 - d) ¿Cuál debe ser el rango de ventas para que el ingreso sea positivo?

5.2. Transformaciones de funciones

En esta sección se presenta una técnica para elaborar gráficas de funciones a través de ciertas *transformaciones*. Existen varios tipos de transformaciones, aquí se estudian *desplazamientos* (verticales y horizontales) y *reflexiones* (sobre los ejes coordenados). En general, se supone que se conoce la gráfica de $y = f(x)$.

Parte 1: Desplazamientos verticales

Dada la gráfica de la función $y = f(x)$ y c un real positivo:

- La gráfica de $y = f(x) + c$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$, c unidades hacia arriba.
- Análogamente, la gráfica de $y = f(x) - c$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$, c unidades hacia abajo.

Ejemplo:

Observe, en la figura 5.4, la construcción de las gráficas de $y = f(x) + 4$ y $y = f(x) - 1$; éstas corresponden a desplazamientos verticales de la gráfica de $y = f(x)$. En el primer caso, cuatro unidades hacia arriba y en el segundo, una unidad hacia abajo.

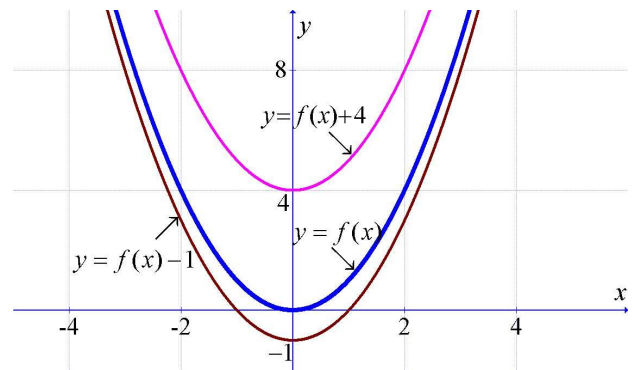


Figura 5.4:

Parte 2: Desplazamientos horizontales

¿Cómo se relacionan las gráficas de $f(x)$ y $f(x - 2)$? En la figura 5.5 se observan dos gráficas, a la izquierda $f(x)$, y a la derecha, la misma f pero desplazada dos unidades (a la derecha). Si se toma un x sobre la gráfica de la derecha, el punto (x, y) está sobre ella, y debido al desplazamiento horizontal, el valor $x - 2$ en f tiene la misma imagen que x , es decir, $(x - 2, y) \in f$. Este razonamiento funciona para todo x .

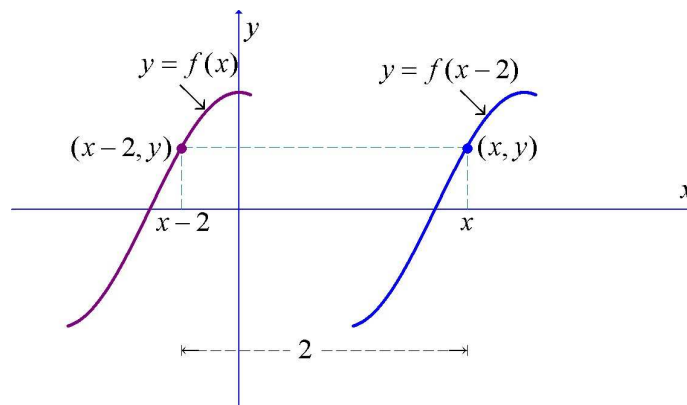


Figura 5.5:

De acuerdo con lo anterior se puede afirmar que, dada la gráfica de la función $y = f(x)$ y c un real positivo:

- La gráfica de $y = f(x - c)$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$, c unidades a la derecha.
- Análogamente, la gráfica de $y = f(x + c)$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$, c unidades a la izquierda.

Ejercicio 2. En la figura 5.7 se ilustra la gráfica de $y = g(x)$. A partir de ésta, trace la gráfica de las funciones $y = g(x - 1)$ y $y = g(x + 3)$.

Ejercicio 1. En la figura 5.6 se ilustra la gráfica de $y = f(x)$. A partir de ésta, trace la gráfica de las funciones $y = f(x) - 3$, y $y = f(x) + 1$.

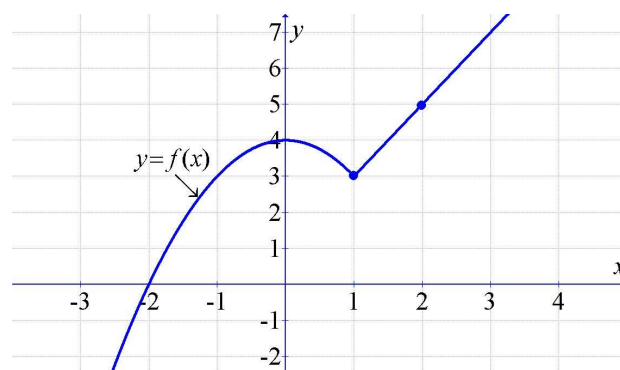


Figura 5.6:

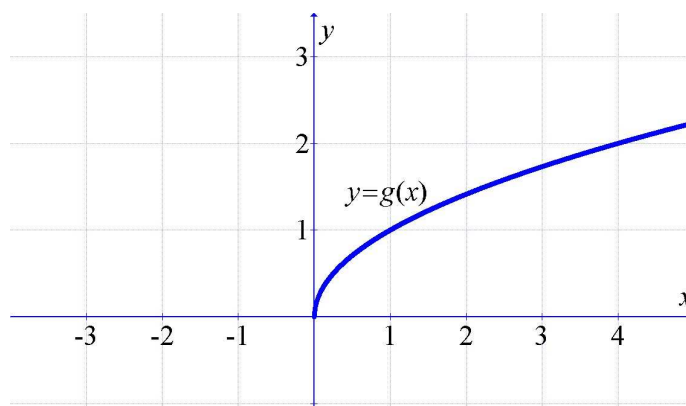


Figura 5.7:

Ejercicio 3. En la figura 5.8 se ilustra la gráfica de $y = h(x)$. A partir de ésta, trace la gráfica de las funciones $y = h(x - 3) - 1$, $y = 1 + h(x + 2)$ y $y = h(x - 1) + 2$.

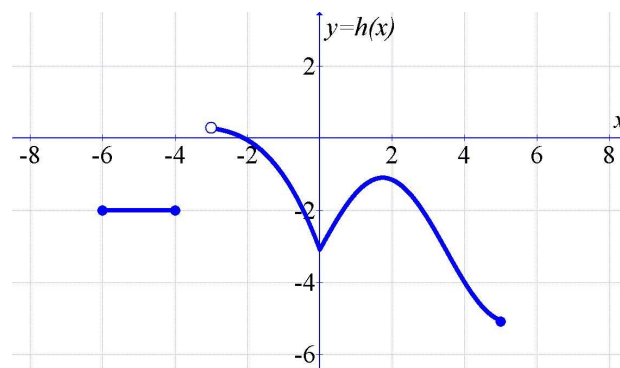


Figura 5.8:

Parte 3: Reflexión sobre los ejes coordenados

1. Reflexión sobre el eje x

Dada la gráfica de la función $y = f(x)$, es posible obtener la gráfica de $y = -f(x)$, asignando a cada x de f la imagen opuesta, es decir, si $(x; y) \in f$, entonces $(x; -y) \in (-f)$. Para aclarar esta idea observe la figura 5.9.

2. Reflexión sobre el eje y

Dada la gráfica de la función $y = f(x)$, es posible obtener la gráfica de $y = f(-x)$, asignando $f(x)$ a cada x de $f(-x)$, es decir, si $(x; y) \in f$, entonces $(-x; y) \in f(-x)$. Para aclarar esta idea observe la figura 5.10.

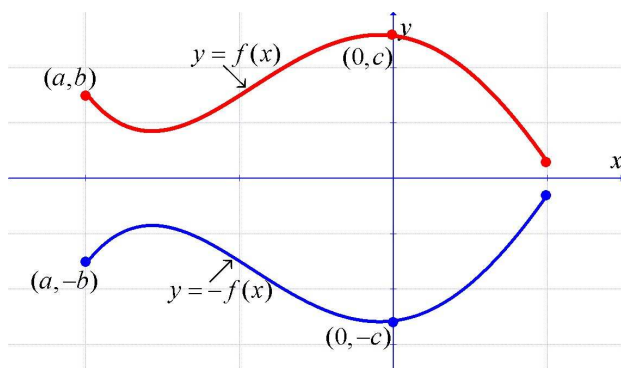


Figura 5.9:

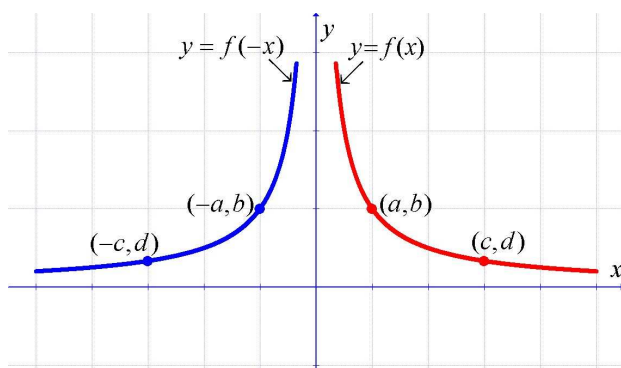


Figura 5.10:

Ejercicio 4.

- a) En la figura 5.11 se ilustra la gráfica de $y = f(x)$. A partir de ésta, trace la gráfica de la función $y = 2 - f(x - 1)$.

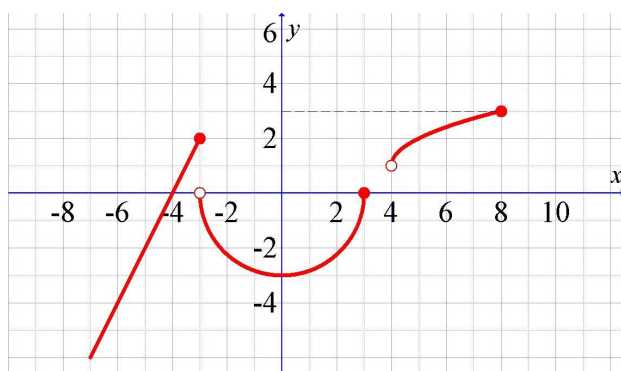


Figura 5.11:

- b) En la figura 5.12 se ilustra la gráfica de $y = t(x)$. A partir de ésta, trace la gráfica de la función $y = -1 - t(-x + 2)$.

5.2.1. Ejercicios

- 1) A partir de las siguientes curvas, trace la gráfica de la función $h(x) = 2 - f(x - 3)$:

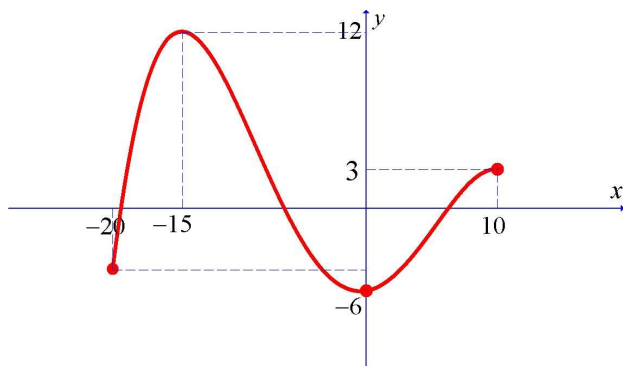
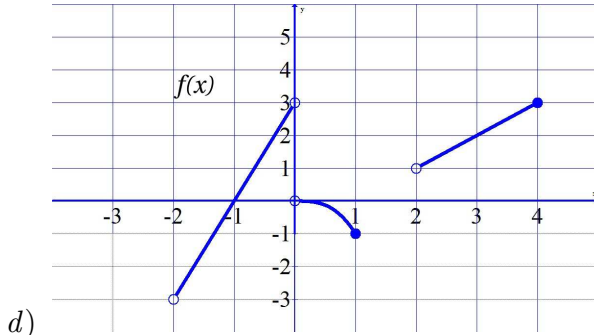
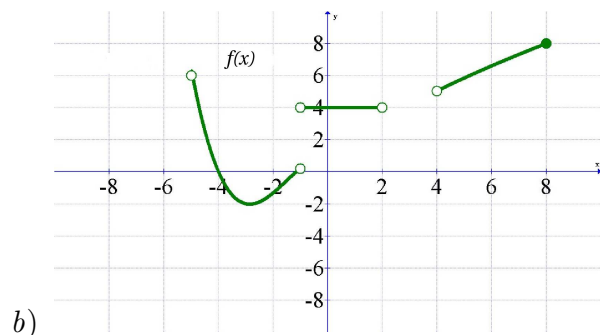
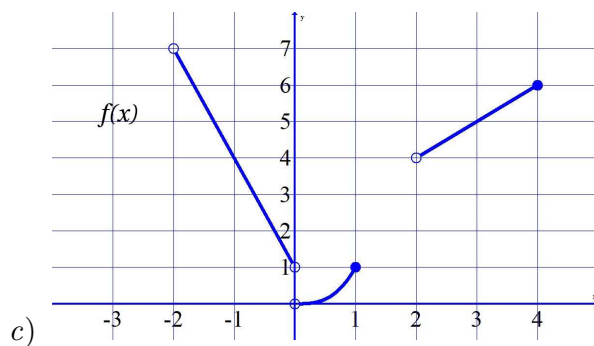
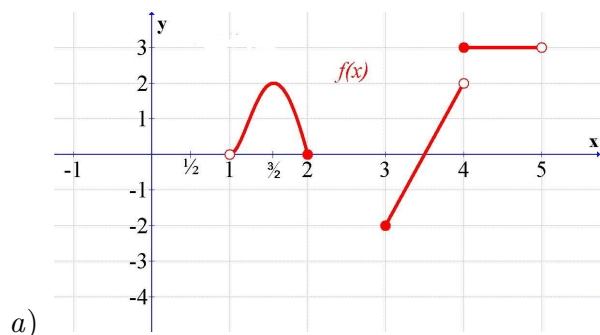
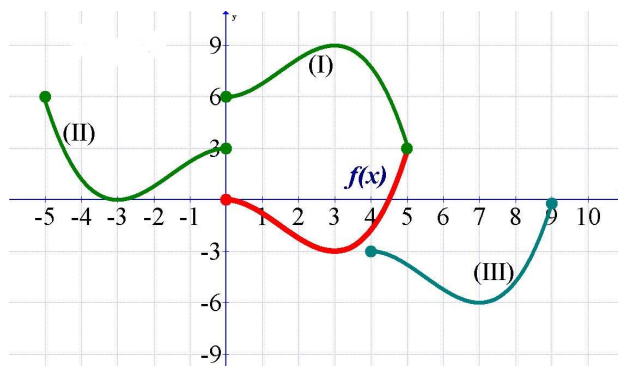


Figura 5.12:



2) Con base en la siguiente figura:



Complete:

- a) La gráfica de la función $3 - f(-x)$ es ()
- b) La gráfica de la función $-3 - f(x - 4)$ es ()
- c) La gráfica de la función $6 - f(x)$ es ()

3) En cada caso, trace la gráfica de f y mediante transformaciones trace la gráfica de h .

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 3$

b) $f(x) = x^2$, $h(x) = 4 - (x - 3)^2$

5.3. Generalidades de funciones

En las dos últimas secciones, se ha revisado el concepto de función y algunas técnicas para la construcción de su gráfica. Ahora, se estudian nuevos elementos geométricos que permiten una descripción detallada de la misma; estos elementos son útiles en el análisis de modelos particulares, tales como modelo lineal y cuadrático.

Parte 1: Elementos geométricos

Dada una función f se define:

- **Dominio** de f : al conjunto de posibles valores de la variable independiente x en dicha función.
- **Recorrido** de f : al conjunto de valores que toma la variable dependiente y .
- **Ceros** de f : a los valores del dominio que tienen imagen 0, es decir, a los x que satisfacen la ecuación $f(x) = 0$, o equivalentemente $y = 0$. Geométricamente, los ceros corresponden a los puntos en donde la gráfica de la función se interseca con el eje x .
- **Ordenada al origen**: como la imagen de cero, es decir, $f(0)$. Geométricamente la ordenada al origen (o y -intercepto) corresponde a la intersección de la gráfica con el eje y .

Ejercicio 1. Corrobore cada una de las siguientes afirmaciones con relación a la figura 5.13.

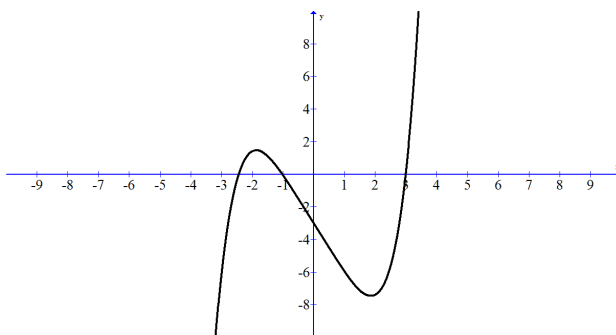


Figura 5.13: Elementos de una función

- Dominio de f : corresponde a \mathbb{R} , el conjunto de los números reales.
- Rango de f : es \mathbb{R} . (¿por qué?)
- Ceros de f : $x = -2.5$, $x = -1$ y $x = 3$.
- Ordenada al origen: $y = -3$.

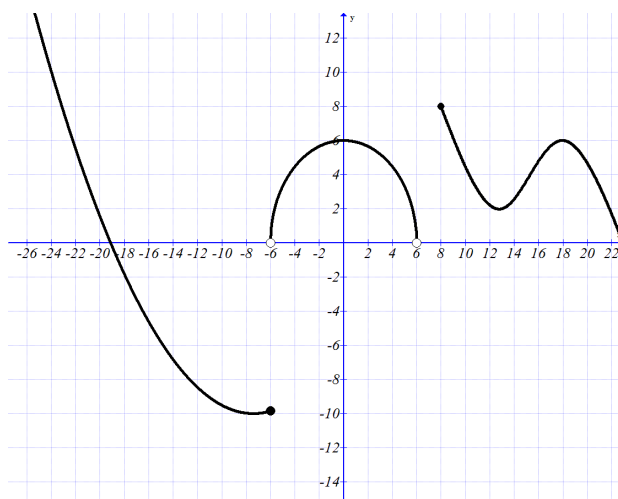


Figura 5.14: Ejercicio 2

Ejercicio 2. En la figura 5.14, se ilustra la gráfica de una función g , a partir de ella, determine su dominio, recorrido, ceros y corte con el eje y .

Ejercicio 3. Con base en la figura 5.14, halle el dominio, recorrido, ceros y corte con el eje y de la función $-g(x+2) - 1$

Parte 2: Hacia un trabajo analítico

Ahora, para determinar el dominio, rango, ceros y corte con el eje y de funciones descritas en forma *algebraica*, es necesario analizar la expresión que define a cada función.

Dominio: como se indicó anteriormente, el dominio de una función está compuesto por los valores de la variable independiente para los cuales existe imagen. En caso de contar con la expresión algebraica, el dominio está determinado por las restricciones que se imponen sobre la variable independiente x para que la expresión esté bien definida. En lo que sigue, se presentan diferentes situaciones.

En los siguientes tres ejemplos note que x puede tomar cualquier valor real. Esto se debe al hecho de no encontrar restricciones para los valores que se pueden asignar a la variable independiente:

- $f(x) = -5 + 3x$
- $f(x) = x^5 - \frac{9x-1}{2}$
- $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{5}$

y por tanto el dominio de estas funciones corresponde al conjunto de los números reales \mathbb{R} .

Ejercicio 4. Escriba un ejemplo de una función cuyo dominio sea \mathbb{R} . En el caso de funciones como $f(x) = \frac{3}{4-x}$, $g(x) = \frac{5-x}{x^2-4}$, es decir, funciones racionales, el dominio corresponde a los valores de x , tales que el denominador es *distinto* de cero. ****

Ejemplos:

- i) Para hallar el dominio de la función $f(x) = \frac{3}{4-x}$, se considera la restricción $4-x \neq 0$, es decir, $x \neq 4$. Por lo tanto, el dominio de f corresponde al conjunto de todos los números reales excepto el 4, que se simboliza, $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$, o, $\mathbb{R} - \{4\}$.

**** Recuerde que en una fracción $\frac{a}{b}$ el denominador no toma el valor cero.

- ii) En el caso de la función $g(x) = \frac{5-x}{x^2-4}$, se tiene que $x^2 - 4 \neq 0$, con lo cual $x \neq 2$ y $x \neq -2$, por lo tanto, el dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2, -2\}$ o de manera equivalente $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$.

Ejercicio 5. Determine el dominio de la función $h(x) = \frac{3}{x-2} + \frac{5x-1}{x^3-1}$

Para hallar el dominio de una función como $t(x) = \sqrt{4-5x}$, donde existe una expresión radical de índice par, se considera la restricción $4-5x \geq 0$ para la expresión subradical, luego de resolver la inecuación se puede afirmar que el dominio de t es $(-\infty, \frac{4}{5}]$.

Ejercicio 6. Halle el dominio de las siguientes funciones:

i) $g(x) = \sqrt{\frac{-3+2x}{3}}$

ii) $h(x) = \sqrt{3x^2 - 7x - 6} + \frac{x}{2}$

Ejercicio 7. Analice por qué el dominio de la función $f(x) = \frac{3+x}{x^2-1} + \sqrt{2-x}$ es $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$

Ceros: recuerde que para calcular los ceros de una función f se resuelve la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplos:

- i) Para hallar los ceros de la función $f(x) = \frac{5-3x}{2}$, se resuelve la ecuación $\frac{5-3x}{2} = 0$ cuya solución es $x = \frac{5}{3}$. Por lo tanto el punto de corte es $(\frac{5}{3}; 0)$, es decir, f tiene un cero en $\frac{5}{3}$.

- ii) En tanto que para la función $f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1}$, la ecuación a resolver es $x^2 + 3x - 2 = 0$ donde sus soluciones son $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ y $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$, luego los puntos de corte son $(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, 0)$ y $(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, 0)$

Ejercicio 8. Determine los ceros de las siguientes funciones:

i) $f(x) = -x^2 + 5x + 6$

ii) $f(x) = \frac{3-x}{x^2-1}$

iii) $f(x) = \sqrt{\frac{4-5x-x^2}{3}} - 5$

Corte con el eje y : según lo visto, el y -intercepto corresponde a la imagen de cero.

Ejemplos:

- i) $f(x) = \frac{5-3x}{2}$, en este caso el corte con el eje y corresponde a $f(0) = \frac{5-3(0)}{2} = \frac{5}{2}$.

- ii) Si $f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1}$, el corte con el eje y es $f(0) = \frac{0}{0-1} + \frac{2}{0+1} = 2$

Ejercicio 9. Determine el corte con el eje y de las siguientes funciones:

i) $f(x) = -x^2 + 5x + 6$

ii) $f(x) = \frac{3-x}{x^2-1}$

iii) $f(x) = \sqrt{\frac{4-5x-x^2}{3}}$

iv) $g(x) = \sqrt{\frac{4-5x-x^2}{3}} + x + 1$

v) $g(x) = \frac{1}{x}$

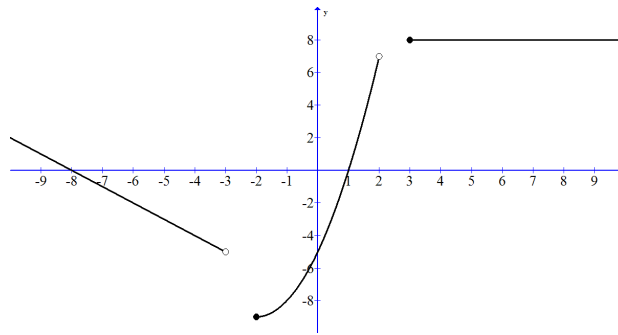


Figura 5.15: Ejercicio 1

5.3.1. Ejercicios

1. Determine el dominio, rango, ceros y corte con el eje y de la función f , cuya gráfica se presenta en la figura 5.15.
2. Repita el ejercicio anterior para $-f(x+1) - 2$.
3. En las siguientes funciones, de las cuales se conoce su expresión algebraica, determine: dominio, ceros y corte con el eje y :

$$a) f(x) = \frac{3x - 5}{2}$$

$$b) f(x) = \frac{3 - x}{x - 2} + \frac{1}{x}$$

$$c) f(x) = \sqrt[4]{4 - 2x - 3x^2}$$

$$d) g(x) = \frac{\sqrt{1 - x}}{x - 1}$$

$$e) g(x) = \sqrt[3]{3 - \frac{1}{x}}$$

5.4. Función lineal

La construcción de modelos es una de las herramientas en la vida cotidiana que permiten describir y analizar el comportamiento de distintos fenómenos. En esta sección se revisa un modelo fundamental como es el *modelo lineal*, además de algunas aplicaciones.

Parte 1: Introducción al modelo lineal

La empresa *WT* vende artículos deportivos y uno de sus productos más vendidos son balones profesionales de fútbol. El precio de venta de cada balón es 75 dólares, con esa información, complete la tabla que registra los ingresos por la venta de diferentes cantidades de balones.

Balones vendidos	1	2	3	4			13
Ingreso (dólares)	75				825	900	

Cuadro 5.1: Registro de ingresos por venta de balones

Al denotar con x la cantidad de balones vendidos y con y el valor de su venta, la relación entre los ingresos y la cantidad de balones vendidos se puede representar como $y(x) =$

A partir de la tabla anterior responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué representa $y(5)$ y a qué es igual?
- ¿Qué significa la expresión $y(x) = 975$?

Al ser $y(x) = 75x$ una función, determine:

- ¿Cuál es su dominio?
- ¿Cuál es su corte con el eje y ?
- ¿Cuáles son los ceros de esta función?

En la figura 5.16 se ilustra la gráfica de $y(x) = 75x$.

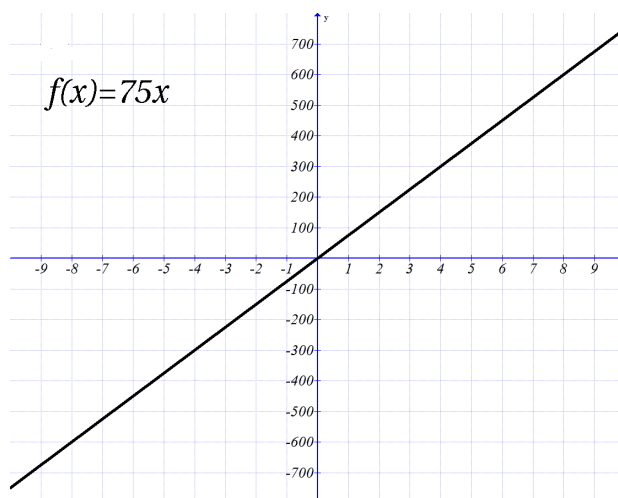


Figura 5.16: Gráfica de $y = 75x$

¿A qué tipo de gráfica corresponde?

Ejercicio 1. Roberto desea ir al parque de diversiones. Él sabe que para ingresar a este parque debe cancelar 7 dólares y por cada actividad que realice debe pagar 2 dólares, adicionales. Con base en esta información:

- Determine los gastos totales de ir al parque y realizar tres actividades.
- Si denota con x la cantidad de actividades que realiza Roberto y con y los gastos totales de ir al parque, entonces la función que relaciona las variables x y y es:
- Determine el dominio, ceros y corte con el eje y de la función obtenida en el ítem anterior.
- Trace la gráfica de la función, ubique los ceros y corte con el eje y . Analice estos resultados en el contexto de la situación.

Parte 2: Analizando el modelo lineal

A continuación se revisan algunos elementos que definen el modelo lineal y lo diferencian de otros. Para esto, se estudia inicialmente la función $y = 75x$ cuya gráfica se presentó anteriormente.

En esta función, al seleccionar dos puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) ; por ejemplo $(1, 75)$ y $(3, 225)$, hallar:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Se obtiene $m = 75$. Ahora, si se seleccionan los puntos $(5, 375)$ y $(7, 525)$ pertenecientes a la función $y = 75x$, el valor de $m = 75$ se mantiene.

Ejercicio 2. Seleccionar dos puntos, diferentes a los anteriores, de la función $y = 75x$ y hallar m

Luego, sin importar qué puntos se seleccionen de la función $y = 75x$ el valor de m permanece constante y es igual a 75.

El valor constante m se denomina **pendiente** y representa la proporción en que varían las imágenes de una función lineal en relación con la variación de la variable independiente.

Ejercicio 3.

- Determine la pendiente de la función lineal $f(x) = 3x - 2$
- Determine la pendiente de la función lineal h si sabe que los puntos $(1, 5)$ y $(-2, 3)$ pertenecen a esta función.
- Si conoce que la pendiente de la función lineal t es -2 y el punto $(1, 3)$ pertenece a la función, determine el valor de z para que el punto $(3, z)$ pertenezca a la función t .

Ejercicio 4. En el ejercicio 1, se obtuvo que $y = 2x + 7$ donde y representa los gastos totales y x el número de actividades que realiza Roberto dentro del parque.

- Determine la pendiente del modelo lineal.
- Determine el corte con el eje y de esta función.

En resumen,

Una función f se denomina *lineal* si es de la forma $f(x) = mx + b$. Su gráfica es una línea recta cuyo corte con el eje y se alcanza en b y m es su pendiente.

Parte 3: Construyendo un modelo lineal

Si se conoce que por la venta de tres artículos de un producto la ganancia es de 120 dólares y por la venta de siete artículos es de 150 dólares, determine la función que modela esta situación si las variables se relacionan linealmente.

Para construir la función lineal se hallan: la pendiente y el corte con el eje y .

Sea x la cantidad de artículos vendidos y y la ganancia, entonces la frase “si se venden tres artículos la ganancia es de 120 dólares” se representa mediante el punto $(3, 120)$; asimismo el punto $(7, 150)$ indica que por la venta de siete artículos la ganancia es 150 dólares.

Con los dos puntos anteriores se calcula la pendiente:

$$m = \frac{150 - 120}{7 - 3} = \frac{15}{2}$$

Por lo tanto, la función lineal entre la ganancia y los artículos vendidos tiene la siguiente forma $y = \frac{15}{2}x + b$. Falta calcular b para tener la descripción completa del modelo.

Se utiliza el hecho “ $y(3) = 120$ ” dado que $(3, 120)$ pertenece a la función. De otro lado,

$$\begin{aligned}y(3) &= \frac{15}{2}(3) + b \\120 &= \frac{45}{2} + b \\120 - \frac{45}{2} &= b \\ \frac{195}{2} &= b\end{aligned}$$

Es decir, el modelo lineal es $y = \frac{15}{2}x + \frac{195}{2}$

Ejercicio 5. Determine b utilizando que $y(7) = 150$ y concluya que $y = \frac{15}{2}x + \frac{195}{2}$.

Ejercicio 6. Construya una función lineal que:

- Tenga pendiente $\frac{3}{5}$ y corte el eje y en $-\frac{1}{2}$.
- Contenga los puntos $(1, 7)$ y $(-2, 3)$.
- Contenga el punto $(-5, 3)$ y como pendiente, -3 .

Ejercicio 7. Determine el punto de intersección entre las funciones lineales $y = 3x + 2$ y $y = -5x + 3$.
[Sugerencia: Plantee un sistema de ecuaciones]

5.4.1. Ejercicios

1. En un supermercado se vende la libra de harina a 700 pesos. Construya un modelo lineal que relacione los ingresos con la cantidad de libras de harina vendidas.
2. Alicia compra un plan de datos para su teléfono móvil. En este plan, si ella consume 100 MB o menos en el mes, el costo es de 28.000 pesos, pero por cada MB adicional tendrá que pagar una tarifa de 12 pesos.
 - a) Determine cuánto paga Alicia si consume 98 MB y cuánto si ahora son 103 MB.
 - b) Construya un modelo lineal para el caso en que Alicia consuma 100 MB o más.
3. Halle la pendiente y corte con el eje y de la función lineal que contiene los puntos $(-3, 5)$ y $(7, 3)$.
4. Construya la función lineal que contiene al punto $(2, 7)$ y su pendiente es $-\frac{3}{4}$.
5. Calcule el valor de x , tal que el punto $(x, 3)$ pertenezca a la función $y = \frac{4}{2}x - \frac{1}{2}$.

5.5. Función cuadrática

Al continuar con el trabajo de la sección anterior, se presenta ahora el modelo cuadrático, se analizan sus características y se estudian algunas aplicaciones.

Parte 1: Una situación particular

Un jardinero tiene 380 cm de alambre para cercar un jardín de flores que tiene forma rectangular. ¿Cuál es la función que relaciona el área del rectángulo a construir, con uno de sus lados? Para responder a esta pregunta, inicialmente se consideran algunas de las posibles construcciones de un rectángulo con los 380 cm; esto se registra en la tabla 5.2.

Ejercicio 8. Complete la siguiente tabla con base en la información anterior:

Largo	10	20	30	40			170
Ancho	180				140	10	20
Área	1800						3400

Cuadro 5.2: Área del rectángulo

¿Cuántas configuraciones del jardín cumplen con la restricción de la cantidad de alambre?

A la luz del concepto de función, se identificará la relación entre el área del jardín y la longitud de un lado del rectángulo, en particular, si se denota con x el largo.

- Dado que sólo se dispone de 380 cm, ¿con qué expresión se puede representar el ancho del jardín?
- Por lo tanto, el área del rectángulo corresponde a:

Luego, la función que relaciona el área del rectángulo, con uno de sus lados es:

$$A(x) = 190x - x^2$$

Ejercicio 9. Con base en la información anterior:

- ¿Qué representa $A(25)$ y a qué es igual?
- ¿Qué significado tiene la expresión $A(x) = 5425$?
- ¿Cuál es el dominio de A ?
- ¿Cuál es el intercepto de A con el eje y ?
- ¿Cuáles son los ceros de la función?

Parte 2: Función cuadrática

Una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se denomina función cuadrática.

Ejemplos de una función cuadrática, son:

■ $h(x) = x^2$

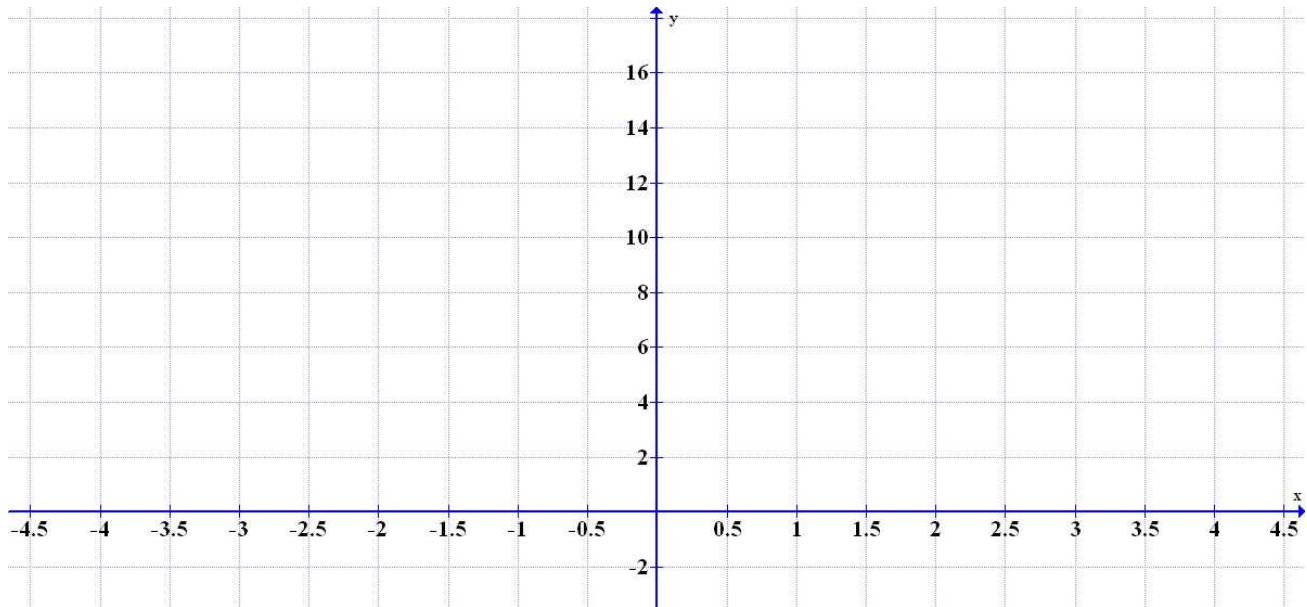
■ $t(x) = \frac{3-4x^2}{7}$

■ $g(x) = 3x^2 + 2x - 5$

Ejercicio 10. Escriba un ejemplo de una función cuadrática:

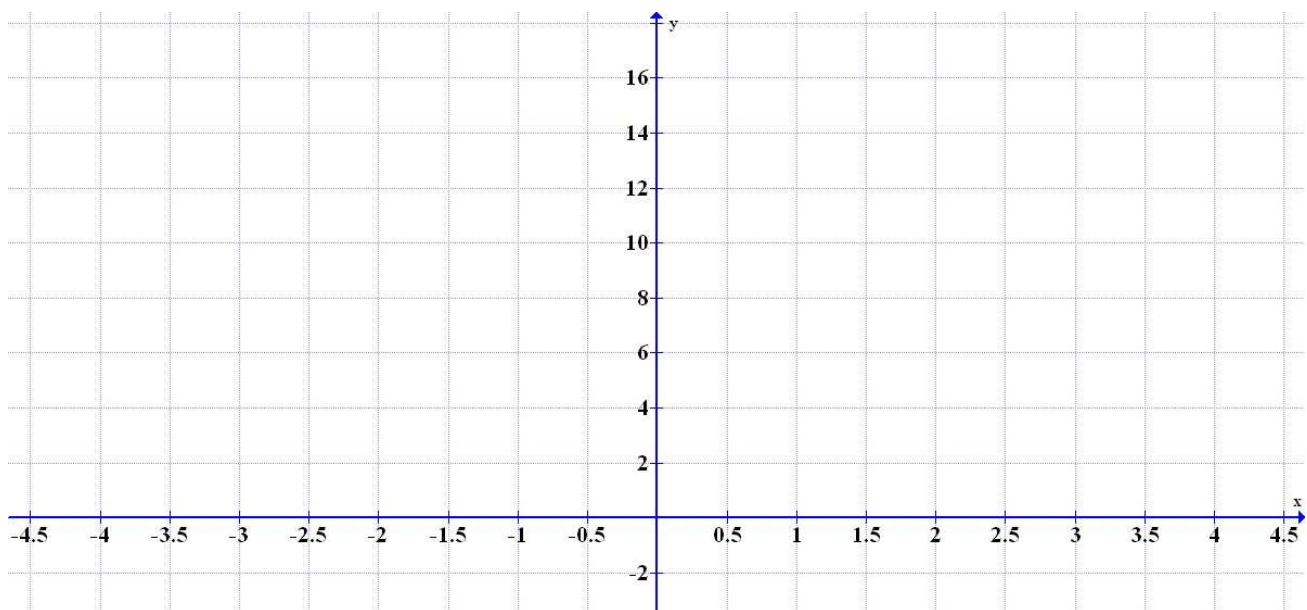
Una de las primeras características de la función cuadrática es la forma de su gráfica. En el siguiente ejercicio se explora esta situación:

Ejercicio 11. Trace la gráfica de la función $y = x^2$



Este tipo de curva, se denomina **parábola** y a partir de ella es posible construir la gráfica de cualquier función cuadrática.

Ejercicio 12. Trace la gráfica de la función, $y = 3x^2 - 24x + 50 = 3(x - 4)^2 + 2$ *

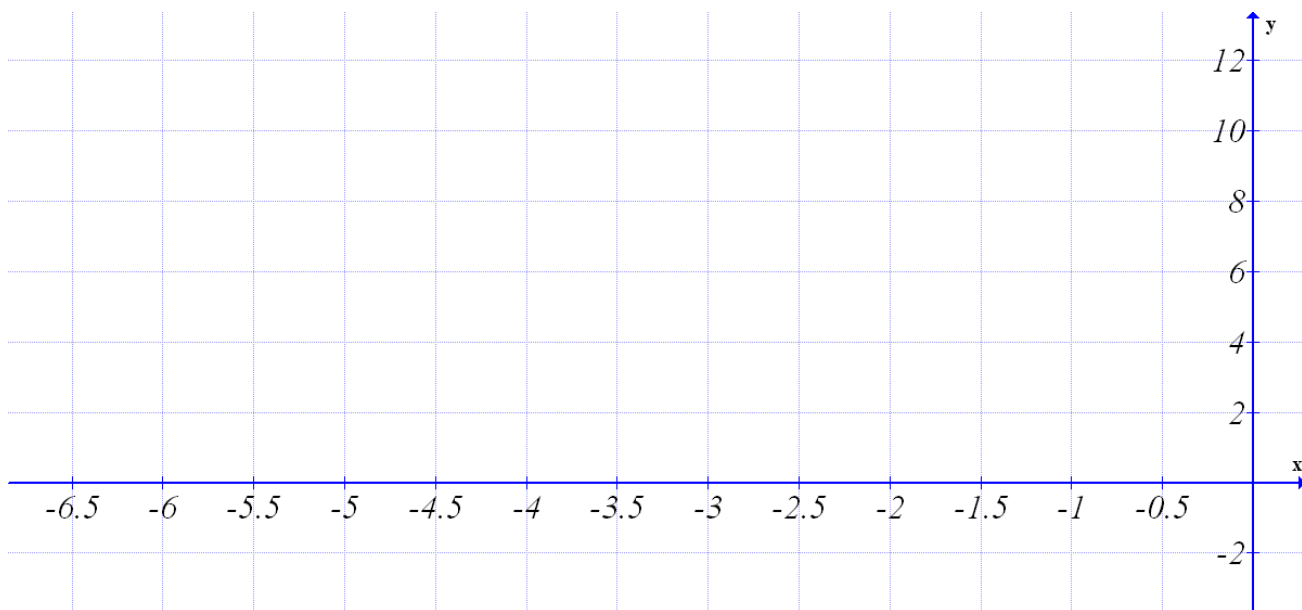


*Para determinar que $3x^2 - 24x + 50 = 3(x - 4)^2 + 2$, se completan cuadrados y se construye un trinomio cuadrado perfecto.

Ejercicio 13. En la gráfica anterior, ubique el punto $(4; 2)$ y trace la recta vertical que contiene a este punto.

Como lo debe notar, el punto $(4; 2)$ es el lugar geométrico donde la parábola $y = 3x^2 - 24x + 50$ alcanza su mínimo y se ubica el eje de simetría. Al punto $(4; 2)$ se conoce como *vértice de la parábola*.

Ejercicio 14. Trace la gráfica de la función $y = -3x^2 - 24x - 40 = -3(x + 4)^2 + 8$, ubique su vértice y el eje de simetría:



En el vértice de esta parábola se encuentra el punto máximo.

En resumen,

La gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se denomina parábola. Además existe un punto $(h; k) \in f$, denominado vértice. Si $a > 0$ entonces k corresponde al valor mínimo de la función, si $a < 0$, k es el valor máximo de la función.

La pregunta que sigue es, ¿cómo calcular el vértice de una función cuadrática f ?

Dada una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, el vértice (h, k) corresponde a:

- $h = -\frac{b}{2a}$
- $k = f(h)$

Ejemplo: Para la función $g(t) = -5t^2 - 20t + 3$ calcular su vértice y clasificarlo como máximo ó mínimo. Al emplear la fórmula anterior,

- $h = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-20)}{2(-5)} = -\frac{(-20)}{(-10)} = -2$
- $k = g(-2) = -5(-2)^2 - 20(-2) + 3 = -5(4) + 40 + 3 = -20 + 43 = 23$

Luego el vértice de g es $(-2; 23)$ y dado que $a = -5$, entonces 23 es el máximo de la función g .

Ejercicio 15. En los siguientes ejercicios, calcule el vértice y clasifíquelo como máximo o mínimo:

i) $h(x) = 3x^2 - 5x + 2$

ii) $t(x) = -2x^2 - 1$

iii) $w(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x$

iv) $f(t) = \frac{-4t^2 - 6}{7}$

Ejercicio 16. Para la función $h(x) = 3x^2 - 5x - 3$, determine:

i) Los ceros.

ii) Corte con el eje y

iii) Vértice

iv) La gráfica.

5.5.1. Ejercicios

1. Para cada función, halle: vértice, ceros e intercepto con el eje y . Finalmente, trace la gráfica:

a) $g(x) = -5x^2 - x + 6$

d) $g(x) = \frac{-7}{5}x$

b) $f(x) = x^2 - 9x$

e) $t(x) = 5t^2 + \frac{2}{3}t - 3$

c) $h(x) = -x^2 + \frac{16}{5}$

f) $f(x) = \frac{-3x^2 - 5x + 2}{7}$

2. Determine el punto máximo o mínimo de la función cuadrática $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x + 6$.

3. Si se lanza una bola directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola?

4. Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender x unidades de cierto artículo está dado por la función $R(x) = 80x - 0,4x^2$, donde $R(x)$ está en dólares. ¿Cuál es el ingreso máximo y cuántas unidades se tienen que fabricar para obtenerlo?

5. Encuentre dos números reales positivos tales que su suma sea 100 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

6. Un rancho quiere construir un corral rectangular con un área de 100 m^2 . Determine las dimensiones del corral que requieren la cantidad mínima de cerca. [Sugerencia: Encuentre una función que relacione el perímetro de un rectángulo con uno de sus lados]

Bibliografía

- [1] D. Franklin Wright, Bill D. New. Intermediate ALGEBRA, Fourth Edition. Hawkes Publishing. Charleston, South Carolina. 2000
- [2] L. Leithold. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Editorial Harla.
- [3] A. Paenza, *Matemática ... ¿Estás ahí?*, Siglo Veintiuno Editores.
- [4] J. Stewart, L. Redlin, *Precálculo/ Precalculus: Matemáticas para el Cálculo*, Tercera edición, Cengage - Thomson Editores, 2007.