

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

METODOLOGIAS DE CÁLCULO DE LA RESERVA DE SINIESTROS
OCURRIDOS NO AVISADOS (IBNR)

AUTOR:
DIDIER VILLANUEVA BASTO
CÓDIGO: 1220020212

ASESOR:
LUIS ANTONIO CHACÓN PENAGOS
MASTER EN CIENCIAS ACTUARIALES Y FINANCIERAS

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
ESPECIALISTA EN MATEMÁTICA APLICADA

BOGOTÁ D.C
ENERO DE 2015

TABLA DE CONTENIDO

RESUMÉN	V
INTRODUCCIÓN	VI
OBJETIVOS	VII
Objetivo general.....	VII
Objetivos específicos.....	VII
JUSTIFICACIÓN.....	VIII
1. MARCO TEORICO.....	10
1.1. DEFINICIONES.....	10
1.1.1. RECLAMACIÓN.....	10
1.1.2. SINIESTRO	10
1.1.3. TRIÁNGULO DE SINIESTROS	12
1.1.4. PRIMA	12
1.1.5. GASTOS DE AJUSTE.....	13
1.1.6. RESERVA TÉCNICA	13
1.2. MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE LAS RESERVAS DE SINIESTROS OCURRIDOS Y NO REPORTADOS.....	15
1.2.1. DESCRIPCIÓN DE CÁLCULO ACTUAL DE LA RESERVA DE SINIESTROS OCURRIDOS Y NO AVISADOS.....	15
1.2.2. METODOLOGÍA DE CÁLCULO DE LA RESERVA DE SINIESTROS OCURRIDOS NO AVISADOS.....	16

1.2.3. METODOLOGÍA DE CÁLCULO DE LA RESERVA DE SINIESTROS OCURRIDOS NO AVISADOS PARA LOS RAMOS DE SEGURO DE RIESGOS LABORALES Y PREVISIONAL DE INVALIDEZ Y SOBREVIVENCIA.	18
1.2.4. MÉTODOS MECÁNICOS O DETERMINÍSTICOS.....	18
1.2.5 MÉTODOS ESTOCÁSTICOS.....	20
1.3. ESTRUCTURA DE LA INFORMACION PARA LA DETERMINACION DEL IBNR.....	22
1.3.1. TIPOS DE ANÁLISIS	23
2. DETERMINACION DEL IBNR.....	24
2.1 PROCESAMIENTO DE LOS DATOS	24
2.1.1 VALIDACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS.....	24
2.1.2 PROCESAMIENTO DE LOS DATOS SINIESTROS.....	25
2.1.3 BASES DE DATOS SINIESTROS.....	28
2.1.4 SINIESTRO MEDIO.....	28
3. APLICACIÓN DE LAS METODOLOGÍAS.....	30
3.1 METODOLOGÍAS.....	31
3.1.1 MÉTODO DE DESARROLLO	31
3.1.2 METODOLOGÍAS BASADAS EN LA FRECUENCIA Y SEVERIDAD.....	37
3.1.3 BORNHUETTER – FERGUSON	50
3.1.4 CAPE COD	58

3.1.5 MÉTODO DE REMUESTEO (Bootstrapping).....	63
CONCLUSIONES	82
BIBLIOGRAFÍA	83

RESUMÉN

Para la estimación de la reserva de siniestros ocurridos y no avisados, el Ministerio de hacienda y crédito público (MHCP) en [1], ha determinado directrices consignadas en el Decreto No. 2973 expedido el 20 de diciembre de 2013, este decreto, exige utilizar metodologías que tengan en cuenta el comportamiento de los siniestros o métodos validados técnicamente con suficiente desarrollo tanto teórico como práctico para esta estimación, sobre la base de siniestros incurridos o pagados, netos de recobro y salvamentos, expresados en pesos corrientes a la fecha de cálculo.

Por lo anterior el presente trabajo tiene como propósito realizar una síntesis teórica de algunas metodologías determinísticas y estocásticas desarrolladas a partir de triángulos de siniestralidad para determinar el IBNR.

INTRODUCCIÓN

Uno de los aspectos básicos de la regulación y supervisión de las operaciones de seguros se basa en lograr que las instituciones cumplan con las obligaciones que han contraído con los asegurados. El cumplimiento de tales obligaciones consiste fundamentalmente en hacer frente a las reclamaciones futuras que hagan los asegurados, para lo cual las aseguradoras deben contar con los recursos financieros suficientes. El principal recurso con que cuenta una aseguradora para tales efectos son las reservas técnicas, por lo que es fundamental establecer criterios generales para la constitución de tales reservas en las instituciones de seguros.

¿Cómo se mide el número y tamaño de las reclamaciones desconocidas? y ¿Cómo podemos saber si las reservas sobre las reclamaciones conocidas son suficientes?, estos dos interrogantes son de especial relevancia para las aseguradoras y de alguna forma resumen lo que son los IBNR “siniestros incurridos pero no reportados”, tal concepto y otros que subyacen de este serán definidos en más detalle en el desarrollo de este trabajo.

Las aseguradoras utilizan varios métodos para la determinación de las provisiones técnicas. Los métodos más comunes son el Chain Ladder, Bornhuetter-Ferguson, bootstrapping, los cuales estiman la última pérdida esperada y derivado de ella la reserva de IBNR. Contar con estos métodos que ayudan a que los errores de previsión sean prevenibles justifica la importancia de aplicar de manera eficaz tales técnicas para luego entender el impacto de las reservas de IBNR en los resultados financieros de las compañías de seguros.

OBJETIVOS

Objetivo general

- ✓ Elaborar un documento académico del cálculo de la reserva de siniestros ocurridos y no avisados utilizando metodologías determinísticas y estocásticas.

Objetivos específicos

- ✓ Consultar el Decreto de reservas del Ministerio de Hacienda y crédito Público (MHCP) y revisar las generalidades del cálculo de la reserva de siniestros ocurridos y no avisados.
- ✓ Registrar los parámetros generales que se deben tener en cuenta para preparar de forma adecuada la estructura de la información para el cálculo de la reserva.
- ✓ Elaborar un ejemplo de aplicación de cada una de las metodologías para el cálculo de la reserva de siniestros ocurridos y no avisados.

JUSTIFICACIÓN

En los últimos dos años el Ministerio de Hacienda y crédito Público (MHCP) en [1] realizo un trabajo que modifiko al decreto 2555 de 2010 que aparece en [2], en relación con el régimen de la reservas técnicas de las entidades aseguradoras con el fin de que estas cuenten con reservas técnicas acordes con el nivel y la naturaleza de los riesgos asumidos así como adecuados niveles patrimoniales que salvaguarden su solvencia y garanticen los intereses de tomadores y aseguradores.

Las reservas técnicas tienen gran importancia dentro de la actividad aseguradora, ya que permiten a las compañías evaluar su capacidad para afrontar sus obligaciones actuales o eventuales originadas en sus contratos de seguros, es así como su correcta contabilización permitirá mejores dividendos, estas reservas, con excepción de la reserva de riesgos catastróficos, se contabilizarán en el pasivo de la entidad por su valor bruto, es decir, sin descontar la parte a cargo del reasegurador. Las entidades aseguradoras deberán cuantificar y contabilizar en el activo las contingencias a cargo del reasegurador derivadas de los contratos suscritos de reaseguro 'proporcional, en caso de todas las reservas técnicas, y de reaseguro no proporcional, este último sólo aplicado a la reserva de siniestros avisados y ocurridos no avisados.

Este activo debe estar sujeto a deterioro, según los criterios que defina la Superintendencia Financiera de Colombia en [3]. En todo caso, un activo por reaseguro tendrá deterioro, si como consecuencia de cualquier hecho ocurrido, circunstancia o situación adversa surgida después de su reconocimiento inicial, la entidad aseguradora evidencie que ha aumentado la probabilidad de incumplimiento de las obligaciones derivadas de los contratos de reaseguro suscritos.

Para el reconocimiento en el activo de las contingencias a cargo del reasegurador, derivadas de contratos no proporcionales en el caso de la reserva de siniestros ocurridos no avisados, deberá calcularse con base en metodologías que tengan en cuenta el comportamiento de los siniestros o métodos validados técnicamente con suficiente desarrollo tanto teórico como práctico para esta estimación, sobre la base de siniestros ocurridos no avisados pagados por el reasegurador.

La estimación adecuada de reservas de siniestros incurridos pero no avisados IBNR, son tareas que a menudo deben realizar las aseguradoras en su análisis financiero. Cada compañía de seguros busca una estimación de reservas lo más correcta posible, con el fin de prevenir las obligaciones a tener en cuenta con los IBNR ya que estos pasivos si no son tomados en cuenta para la constitución de las reservas, es probable que la compañía haga uso de otro tipo de reservas para pagarlos y tal vez enfrente problemas de solvencia; la densidad de una población y el aumento inesperado de siniestros hace que los métodos mitiguen los costos y así cobren gran relevancia su utilización.

Por lo anterior el presente trabajo pretende ser un documento de consulta para la industria aseguradora y personas interesadas en el tema ya que contiene una síntesis teórica y práctica de algunas metodologías para el cálculo de la reserva de los siniestros ocurridos y no avisados.

1. MARCO TEORICO

El presente trabajo de grado, enmarcado en el área de las Finanzas, toma énfasis en lo que concierne al cálculo de la reserva de siniestros incurridos pero no reportados en una aseguradora. Este capítulo tiene el propósito de sintetizar los conceptos teóricos financieros que son utilizados para justificar la existencia de las metodologías diseñadas para el cálculo de tales provisiones, definir conceptos como reserva técnica, IBNR, etc., necesarios para ubicar al lector en la temáticas que validan este documento citados en [1].

1.1. DEFINICIONES

1.1.1. RECLAMACIÓN

Cuando un asegurado informa de un posible siniestro a la aseguradora

1.1.2. SINIESTRO

Monto pagado al asegurado o reclamante a nombre del asegurado para reponer (indemnizar) parcial o totalmente el daño). Dentro de estos siniestros se reconocen cuatro tipos:

1.1.2.1 Siniestros Pagados

Monto pagado por cada siniestro individual

1.1.2.2 Siniestros Ocurridos

El monto pagado por cada siniestro individual más su reserva respectiva

1.1.2.3 IBNR

Son siniestros de los que la aseguradora ignora totalmente su ocurrencia, esto es debido a algún atraso en el aviso del mismo.

1.1.2.4 IBNER

Reserva de siniestros avisados pero insuficientemente reservados. Se trata de siniestros que la compañía sabe que ocurrieron, pero generan incertidumbre en hacer la mejor estimación en el monto de cada uno de los pagos, el tiempo entre cada uno de los pagos y el número total de pagos que se deben realizar, lo que implica un ejercicio estocástico para el cálculo de la provisión. El estudio de esta reserva tiene gran importancia en el ramo de riesgos laborales.

1.1.2.5 Siniestros últimos

Estimación del monto último a pagar por parte de la aseguradora por periodo.

1.1.2.6 Número de Siniestros Ocurridos

Registro que se da al siniestro al reportarse a la empresa, por lo general se crea una reserva de siniestros avisados.

1.1.2.7 Número de Siniestros Pagados

Registro que se da al siniestro al realizar un pago (parcial o total) al asegurado.

1.1.2.8 Siniestralidad Inicial Esperada (IELR)

Supuesto de la siniestralidad inicial para un periodo dado.

1.1.2.9 Colas de siniestros

Periodo de desarrollo hasta que se termina de reportar o pagar el siniestro.

1.1.2.10 Frecuencia

El número de siniestros por unidad expuesta.

1.1.2.11 Severidad

Por lo general es la siniestralidad última entre el número último estimado.

1.1.2.1.2 Expuestos

Por lo general es el número total de asegurados expuestos al riesgo en un periodo de tiempo determinado.

1.1.3. TRIÁNGULO DE SINIESTROS

Distribución bidimensional de la información histórica de siniestralidad. Normalmente, las dos dimensiones son el año de ocurrencia (eje vertical) y el año de pago (eje horizontal). A medida que los siniestros son más recientes se reduce la información, y de ahí que la matriz resultante tenga forma triangular o de escalera. Mediante los triángulos de siniestros se analiza el desarrollo de la siniestralidad a lo largo del tiempo, sirviendo de base para determinados métodos de cálculo de la provisión técnica de prestaciones.

1.1.4. PRIMA

Aportación económica que ha de satisfacer el contratante o asegurado a la entidad aseguradora en concepto de contraprestación por la cobertura de riesgo que este le ofrece. Desde un punto de vista jurídico, es el elemento real más importante del contrato de seguro, porque su naturaleza, constitución y finalidad lo hacen ser esencial y típico de dicho contrato.

1.1.4.1 Primas devengadas

Se entiende por primas devengadas, emitidas o no, las correspondientes a contratos perfeccionados o prorrogados en el ejercicio, en relación con las cuales el derecho del asegurador al cobro de las mismas surge durante el mencionado periodo.

Son las primas emitidas netas de anulaciones y extornos por operaciones de seguro directo y reaseguro aceptado corregidas por la variación de la provisión para primas pendientes de cobro. La que corresponde proporcionalmente a un periodo de riesgo ya ocurrido.

1.1.5. GASTOS DE AJUSTE

Las compañías de seguros también incurren en ciertos gastos en el pago de reclamaciones en una póliza de seguro. Por ejemplo, tienen que pagar los sueldos de los ajustadores de seguros y los investigadores de seguros. Hay también gastos administrativos relacionados con el pago de reclamaciones. Estos tipos de costos directos que incurre la compañía de seguros relacionados con el pago de reclamaciones de seguros son gastos de ajuste.

1.1.5.1 Gastos de ajuste asignado al siniestro (ALAE).

Gastos asociados directos a un siniestro como gastos de abogados, investigación, grúas, entre otros.

1.1.5.2 Gastos de ajuste no asignado al siniestro (ULAE).

Gastos no asociados a un siniestro como nómina del área de siniestros, electricidad.

1.1.6. RESERVA TÉCNICA

Son los recursos que destina una compañía de seguros para respaldar las obligaciones que ha contraído con sus asegurados. El régimen de reservas técnicas es el conjunto de normas

prudenciales establecida por el regulador con el propósito de fijar las directrices que deben seguir las aseguradoras para estimar adecuadamente dichas obligaciones.

La correcta determinación de las reservas técnicas a cargo de las entidades aseguradoras es un mecanismo apropiado para facilitar el debido cumplimiento de las obligaciones que las mismas asumen para los efectos propios del presente trabajo, las reservas técnicas tendrán las siguientes acepciones:

1.1.6.1 Reserva de Siniestros.

Monto reservado para cada siniestro establecido por el área de siniestros. El monto se modifica en el tiempo conforme se tenga más información o se pague el siniestro

1.1.6.2 Reserva para Siniestros Pendientes.

Es aquella que se constituye para atender el pago de los siniestros ocurridos una vez avisados o para garantizar la cobertura de los no avisados, a la fecha de cálculo. La reserva de siniestros pendientes está compuesta por la reserva de siniestros avisados y la reserva de siniestros ocurridos no avisados.

1.1.6.3 Reserva de siniestros avisados.

Corresponde al monto de recursos que debe destinar la entidad aseguradora para atender los pagos de los siniestros ocurridos una vez estos hayan sido avisados, así como los gastos asociados a éstos, a la fecha de cálculo de esta reserva.

1.1.6.4 Reserva de siniestros ocurridos no avisados:

Representa una estimación del monto de recursos que debe destinar la entidad aseguradora para atender los futuros pagos de siniestros que ya han ocurrido, a la fecha de

cálculo de esta reserva, pero que todavía no han sido avisados a la entidad aseguradora o para los cuales no se cuenta con suficiente información.

1.2. MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE LAS RESERVAS DE SINIESTROS OCURRIDOS Y NO REPORTADOS.

Las empresas aseguradoras y las compañías reaseguradoras en Colombia deben obligatoriamente constituir y contabilizar permanentemente sus reservas técnicas de acuerdo a la metodología y reglas establecidas en [1], a continuación se hará la descripción del cálculo de la reserva basándonos en este documento.

1.2.1. DESCRIPCIÓN DE CÁLCULO ACTUAL DE LA RESERVA DE SINIESTROS OCURRIDOS Y NO AVISADOS

Actualmente el cálculo de la reserva toma el valor promedio de la parte retenida de los pagos efectuado en los últimos tres (3) años por concepto de siniestros no avisados de vigencias anteriores, expresados en términos reales, es decir eliminando el efecto que sobre ellos tiene la inflación, quedando expresados en términos de un período base, calculados de acuerdo con el índice de precios el consumidor del último año del período considerado. Esta porción de la reserva debe ser constituida a más tardar el 31 de marzo de cada año.

Para efectos de la aplicación del cálculo de la reserva de los IBNR tendrán preeminencia las siguientes definiciones, citadas en el apartado 1.1 definiciones de este trabajo de grado:

- ✓ Reserva de Siniestros Pendientes.
- ✓ La reserva de siniestros avisados.
- ✓ La reserva de siniestros ocurridos no avisados.

1.2.1.1. Excepciones en la constitución del IBNR

En el ámbito de aplicación de la reserva de siniestros ocurridos no avisados. Se exceptúan de la constitución de esta reserva los siguientes ramos:

- Vida individual, amparos adicionales para los cuales la prima haya sido calculada en forma nivelada o se les calcule reserva matemática, y fondos de ahorro.
- Pensiones Ley 100 de 1993.
- Pensiones con conmutación pensional.
- Pensiones voluntarias
- Seguros educativos.
- Rentas voluntarias.

No obstante, la Superintendencia Financiera podrá determinar la obligación o no de constituir esta reserva para cualquier ramo de seguros.

1.2.2. METODOLOGÍA DE CÁLCULO DE LA RESERVA DE SINIESTROS OCURRIDOS NO AVISADOS.

La metodología para el cálculo de las reservas técnicas deberá involucrar los siguientes aspectos contenidos en [1]:

Artículo 2.31.4.4.7. Esta reserva se calculará por ramo, en forma Mensual y comprende la estimación conjunta de los siniestros ocurridos no avisados y avisados pero insuficientemente reservados.

Para la estimación de esta reserva, se deberán utilizar metodologías que tengan en cuenta el comportamiento de los siniestros o métodos validados técnicamente con suficiente desarrollo tanto teórico como práctico para esta estimación, sobre la base de siniestros

incurridos o pagados, netos de recobro y salvamentos, expresados en pesos corrientes a la fecha de cálculo.

La entidad aseguradora deberá escoger si el cálculo de esta reserva para cada ramo se hará, sobre la base de siniestros incurridos o pagados. Solo se podrá modificar la base de siniestros previa justificación y no objeción de la Superintendencia Financiera de Colombia.

Para el cálculo de esta reserva, la entidad aseguradora deberá contar como mínimo, con cinco (5) años de información siniestral propia y con diez (10) años para los ramos de seguro de riesgos laborales, previsionales de invalidez y sobrevivencia y los amparos de responsabilidad civil y cumplimiento.

No obstante, si la aseguradora cuenta con información igual o superior a cinco (5) años para las coberturas de responsabilidad civil y cumplimiento o tres (3) para el resto de los ramos, podrá utilizarla mientras alcanza el número de años previsto en el inciso anterior. En ausencia de esta información, se podrán utilizar las estadísticas del reasegurador para mercados cuyas características siniéstrales sea comparable.

Parágrafo 2. La entidad aseguradora podrá separar para un ramo la siniestralidad en función de uno o varios amparos o coberturas o agrupar más de un ramo con características siniéstrales similares, siempre que no exista objeción por parte de la Superintendencia Financiera de Colombia.

En cualquier caso, la cobertura de responsabilidad civil y el ramo de SOAT no podrán ser agrupados con otras coberturas o ramos.

Cuando se revoque la autorización otorgada para operar un ramo o se suspenda el ofrecimiento de todos los productos que se explotan en uno determinado, la entidad

aseguradora está obligada a continuar con el cálculo de esta reserva hasta que haya transcurrido el término de prescripción previsto en la ley para ejercer las acciones derivadas de todos los contratos de seguro celebrados durante el período de operación del ramo. ' .

1.2.3. METODOLOGÍA DE CÁLCULO DE LA RESERVA DE SINIESTROS OCURRIDOS NO AVISADOS PARA LOS RAMOS DE SEGURO DE RIESGOS LABORALES Y PREVISIONAL DE INVALIDEZ Y SOBREVIVENCIA.

Las entidades aseguradoras efectuarán el cálculo de esta reserva teniendo en cuenta la metodología descrita anteriormente y con sujeción a las siguientes reglas de [1]:

- ✓ En el ramo de seguro previsional de invalidez y sobrevivencia, esta reserva se debe constituir para cada póliza emitida, desagregada por tipo de cobertura. .
- ✓ En el ramo de seguro de riesgos laborales esta reserva se debe calcular y constituir en forma desagregada, es decir, por tipo de prestación o cobertura. .
- ✓ En el ramo de seguro previsional de invalidez y sobrevivencia, la entidad aseguradora está obligada a continuar con el cálculo y constitución de esta reserva hasta 10 años después de que se termine la relación contractual de la póliza.

1.2.4. MÉTODOS MECÁNICOS O DETERMINÍSTICOS

Los métodos mecánicos o determinísticos se basan en el supuesto de que se mantiene constante la proporción de siniestros que se reportan de un período de desarrollo a otro, independiente del período de origen del siniestro; no utilizan explícitamente supuestos probabilísticos para la obtención de la reserva, es decir que no presentan un patrón de variabilidad, suponen una mecánica exacta del proceso. Su aplicación es sencilla, pero por

su naturaleza no es posible obtener límites de confianza para la estimación de la reserva. Sin embargo son bastante utilizados por las compañías de seguros.

A continuación se describen algunos de estos métodos teniendo en cuenta lo citado por Esteva E. en [4], [5] y Albarran y Alonso en [6]:

1.2.4.1 Métodos de desarrollo de siniestros

Se caracterizan por estimar el valor último y el IBNR se obtiene como la diferencia entre el valor último y los montos.

1.2.4.2 Métodos basados en la frecuencia y severidad

Para evaluar el riesgo estos métodos generalmente toman en cuenta dos variables:

- **La frecuencia** o probabilidad de suceso de un evento de riesgo, que consiste en el porcentaje de ocasiones en la que se detecta la presencia de eventos causales de riesgo.
- **La severidad**, o importancia del impacto de los eventos de riesgo sobre los resultados o el patrimonio de la empresa.

1.2.4.2.1. Loss Ratio con ajuste de primas. Este método calcula y estima las pérdidas finales mediante la aplicación de una tasa de pérdida estimada de la prima devengada final para cada año de suscripción. La tasa de pérdida estimada se basa en la información de precios y datos de la industria y es independiente de la experiencia actual reclamación hasta la fecha. Este método es apropiado para las clases de negocio en el que el actual pagado o informaron una pérdida todavía no es lo suficientemente madura para anular nuestras expectativas iniciales de los índices de siniestralidad finales.

1.2.4.2.2. Loss development (Chain Ladder). Este método utiliza datos de pérdidas reales una los perfiles históricos de desarrollo en los más antiguos años de accidentes de proyectar más recientes años y menos desarrollados a su posición final. Este método es apropiado cuando hay un patrón relativamente estable de aparición de pérdidas y un número relativamente grande de las reivindicaciones reportadas.

1.2.4.2.3. Bornhuetter-Ferguson: Este método denominado así en honor a sus creadores, se centra en la parte no pagada de los daños definitivos previstos. Este método emplea el patrón de liquidación de siniestros del método Chain ladder, pero sigue un planteamiento diferente a la hora de calcular los daños definitivos. Según el método BF, los siniestros definitivos correspondientes a cada año de ocurrencia constituyen un índice de siniestralidad inicial que varía según el año de ocurrencia y el cual se multiplica por las primas suscritas para ese año según se indica en [7]. El índice de siniestralidad inicial puede calcularse a partir de los siniestros definitivos evaluados explícitamente por los suscriptores o definirse como la tasa media de siniestralidad, ajustada a las insuficiencias o excesos de primas.

1.2.4.2.4. Cape Cod. Este método, que lleva el nombre del lugar donde se celebró la conferencia en la que se desarrolló, es una variante del método de Bornhuetter-Ferguson. El índice de siniestralidad inicial se obtiene de los datos considerando los siniestros liquidados como una proporción de las primas “consumidas”.

1.2.5 MÉTODOS ESTOCÁSTICOS.

A diferencia de los métodos mecánicos o determinísticos en donde no se considera un patrón de variabilidad en el proceso, los métodos estocásticos describen de manera aproximada al proceso, presentándose un patrón de variabilidad. Estos métodos proporcionan un tipo de estimación en la que se obtiene la distribución estadística de la

reserva y pueden generarse límites de confianza en estadística clásica e intervalos de credibilidad en estadística Bayesiana.

1.2.5.1 Bootstrapping

Los métodos estocásticos, como el de bootstrapping, generan una distribución estadística de los daños definitivos y las reservas para siniestros.

La teoría del Bootstrap proviene de la estadística general y fue desarrollada alrededor de 1980 por Bradley Efron. Puede ofrecer soluciones numéricas a una amplia gama de problemas estadísticos. Para emplear la técnica del Bootstrap se siguen los siguientes pasos citados por Kisbye en [8] :

- Calcular los parámetros siguiendo un método de constitución de reservas (por ejemplo, para la estimación de punto) y anotar tanto los resultados como los parámetros).
- Utilizar los parámetros para calcular los valores “previstos” o sea para generar un triángulo que encajaría exactamente con los parámetros calculados en el primer paso;
- Sustraer los valores previstos calculados en el paso 2 de los valores reales para obtener una serie de “residuales”.
- Obtener una nueva serie de valores pseudo-reales tomando cada uno de los valores previstos y añadiéndolo a uno de los “residuales”, escogido al azar;
- Aplicar el método de constitución de reservas escogido a estos valores pseudo-reales y anotar la estimación de reservas resultantes.
- Utilizando una computadora, repetir los pasos 4 y 5 unas 1.000 veces o más.
- Clasificar los valores registrados bajo cada repetición del paso 5 y tomar nota de los puntos de interés.

1.3. ESTRUCTURA DE INFORMACION PARA LA DETERMINACION DEL IBNR

Para la estimación de la reserva, se deberán utilizar metodologías que tengan en cuenta el desarrollo comportamiento de los siniestros o métodos validados técnicamente con suficiente desarrollo tanto teórico como práctico para esta estimación, sobre la base de siniestros incurridos o pagados, netos de recobro y salvamentos, expresados en pesos corrientes a la fecha de cálculo, implica que la recolección de la información y el uso adecuado de esta sea fundamental para una correcta estimación de las reservas.

Los sistemas o las fuentes mediante las cuales se genera la información deben ser confiables y tener medidas de seguridad en el manejo de la información, problemas como el usar bases incompletas, con errores, mal organizadas generan errores en la estimación de las reservas y por tanto en la toma de decisiones erróneas.

Definir la estructura de la base con la que se va a estar trabajando, utilizando los campos necesarios, con la longitud adecuada. Campos innecesarios generan procesos más lentos, consumen más memoria y aumentan el riesgo de cometer errores.

Para la elaboración de la base de datos en particular para el cálculo del IBNR se deben tener en cuenta según [3] y [1] los períodos de referencia y para el cálculo de esta reserva, la entidad aseguradora deberá contar como mínimo, con cinco (5) años de información siniestral propia y con diez (10) años para los ramos de seguro de riesgos laborales, previsionales de invalidez y sobrevivencia y los amparos de responsabilidad civil y cumplimiento.

No obstante, si la aseguradora cuenta con información igual o superior a cinco (5) años para las coberturas de responsabilidad civil y cumplimiento o tres (3) para el resto de los ramos, podrá utilizarla mientras alcanza el número de años previsto en el inciso anterior.

En ausencia de esta información, se podrán utilizar las estadísticas del reasegurador para mercados cuyas características siniéstrales sea comparable.

1.3.1. TIPOS DE ANÁLISIS

1.3.3.1 Basados de acuerdo al año de suscripción

En los cuales los siniestros se atribuyen al año en el cual se han suscrito las pólizas como las de transporte, construcción y montaje.

1.3.3.2 Basados de acuerdo al periodo de ocurrencia

En estos los siniestros se atribuyen al periodo al periodo (año, semestre, trimestre, mensual) en el cual han ocurrido los siniestros.

2. DETERMINACION DEL IBNR

A efecto de la utilización de la metodología general para el cálculo de la Reserva de Siniestros Pendientes de Liquidación y la Reserva de Siniestros Ocurridos y no Reportados (IBNR) bajo métodos estadísticos, las empresas deberán seguir el siguiente procedimiento:

La empresa deberá agrupar la información histórica siniestral en períodos de ocurrencia y desarrollo.

2.1 PROCESAMIENTO DE LOS DATOS

2.1.1 VALIDACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Se sugiere la siguiente secuencia según Esteva E. en [9], para la revisión de la información:

- Validar la información histórica del triángulo contra los triángulos utilizados en la valuación previa. No debe haber diferencias, si las hay debe haber una explicación del cambio.
- Validar que los triángulos de siniestros ocurridos siempre sean mayores a los siniestros pagados en todos los periodos de desarrollo.
- Realizar la reconciliación de la reserva caso a caso y de los pagos a partir de los triángulos incrementales contra la contabilidad.
- En caso de tener triángulos netos, validar que el monto bruto acumulado sea siempre mayor al neto.
- En caso de tener los triángulos con casos se debe validar que sea congruente los resultados al relacionarlos con sus respectivos triángulos de montos.

2.1.2 PROCESAMIENTO DE LOS DATOS SINIESTROS

La construcción de los triángulos será bruto de reaseguro. La empresa deberá reunir la información histórica siniestral se sugiere en [10] y [11].

Para el correcto cálculo de los IBNR se deben construir los llamados triángulos de siniestros, los cuales tienen la siguiente estructura:

2.1.2.1 Triángulo de siniestros de pagos incrementales

Esta tabla deberá contener, para cada período de ocurrencia, el valor de los siniestros pagados en determinado período de desarrollo.

Tabla 1. Triángulo de siniestros incrementales

		Periodo de desarrollo						
		1	2	...	$n - i + 1$...	$n - 1$	n
Periodo de ocurrencia	1	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$...	$P_{1,n-i+1}$...	$P_{1,n-1}$	$P_{1,n}$
	2	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$...	$P_{2,n-i+1}$...	$P_{2,n-1}$	
		
	i	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$...	$P_{i,n-i+1}$			
				
	$n - 1$	$P_{n-1,1}$	$P_{n-1,2}$					
	n	$P_{n,1}$						

Donde $P_{i,j}$ = Monto pagado en el período j , ocurrido en el período i

2.1.2.2 Triángulo de siniestros pagados acumulados e incurridos

La empresa deberá construir un triángulo de siniestros pagados acumulados. Este triángulo, deberá contener, para cada período de ocurrencia, el valor acumulado de los siniestros pagados en cada uno de los sucesivos períodos de desarrollo.

Con este fin, se construirá el triángulo de siniestros acumulados pagados.

Tabla 2. Triángulo de pagos acumulados

		Periodo de desarrollo						
		1	2	...	$n - i + 1$...	$n - 1$	n
Periodo de ocurrencia	1	$PA_{1,1}$	$PA_{1,2}$...	$PA_{1,n-i+1}$...	$PA_{1,n-1}$	$PA_{1,n}$
	2	$PA_{2,1}$	$P_{2,2}$...	$PA_{2,n-i+1}$...	$PA_{2,n-1}$	
		
	i	$PA_{i,1}$	$PA_{i,2}$...	$PA_{i,n-i+1}$			
				
	$n - 1$	$PA_{n-1,1}$	$PA_{n-1,2}$					
	n	$PA_{n,1}$						

Donde $PA_{i,j} = \sum_{t=1}^j P_{i,t}$

2.1.2.3 Triángulo de siniestros reportados (reservados)

Esta tabla deberá contener, para cada período de ocurrencia, el valor de los siniestros avisados en cada uno de los períodos de desarrollo

Tabla 3. Triángulo de reservas

		Periodo de desarrollo						
		1	2	...	$n - i + 1$...	$n - 1$	n
Periodo de ocurrencia	1	$R_{1,1}$	$R_{1,2}$...	$R_{1,n-i+1}$...	$R_{1,n-1}$	$R_{1,n}$
	2	$R_{2,1}$	$R_{2,2}$...	$R_{2,n-i+1}$...	$R_{2,n-1}$	
		
	i	$R_{i,1}$	$R_{i,2}$...	$R_{i,n-i+1}$			
				
	$n - 1$	$R_{n-1,1}$	$R_{n-1,2}$					
	n	$R_{n,1}$						

Donde $R_{i,j}$ = Monto total de los siniestros que se habían constituidos al final del período j , ocurrido en el período i

2.1.2.4 Triángulo de Siniestros incurridos

Tabla 4. Triángulo de siniestros incurridos

		Periodo de desarrollo						
		1	2	...	$n - i + 1$...	$n - 1$	n
Periodo de ocurrencia	1	$l_{1,1}$	$l_{1,2}$...	$l_{1,n-i+1}$...	$l_{1,n-1}$	$l_{1,n}$
	2	$l_{2,1}$	$l_{2,2}$...	$l_{2,n-i+1}$...	$l_{2,n-1}$	
		
	i	$l_{i,1}$	$l_{i,2}$...	$l_{i,n-i+1}$			
				
	$n - 1$	$l_{n-1,1}$	$l_{n-1,2}$					
	n	$l_{n,1}$						

$$l_{i,j} = \sum_{t=1}^j (PA_{i,t} + R_{i,t})$$

2.1.2.5 Triángulo de número de casos

Para contar el número de casos de siniestros, hay que agrupar la información tomando en cuenta:

- Número de la póliza Número de siniestro
- Línea de negocio
- Cobertura
- Tipo de movimiento
- Fecha de ocurrencia o fecha de suscripción

Una vez agrupada la información de la base de datos, se procede a contar. Por ejemplo para el concepto de estimación inicial nos fijamos en dicha columna y contamos todos aquellos casos donde el monto sea distinto de cero

2.1.3 BASES DE DATOS SINIESTROS

2.1.3.1 Triángulo de número de casos incremental

Tabla 5. Triángulo de número de casos incremental

		Periodo de desarrollo						
		1	2	...	$n - i + 1$...	$n - 1$	n
Periodo de ocurrencia	1	$N_{1,1}$	$N_{1,2}$...	$N_{1,n-i+1}$...	$N_{1,n-1}$	$N_{1,n}$
	2	$N_{2,1}$	$N_{2,2}$...	$N_{2,n-i+1}$...	$N_{2,n-1}$	
		
	i	$N_{i,1}$	$N_{i,2}$...	$N_{i,n-i+1}$			
				
	$n - 1$	$N_{n-1,1}$	$N_{n-1,2}$					
	n	$N_{n,1}$						

2.1.3.2 Triángulo de número de casos acumulado

Tabla 6. Triángulo de número de casos acumulado

		Periodo de desarrollo				
		1	2	...	$n - 1$	n
Periodo de ocurrencia	1	$NC_{1,1} = N_{1,1}$	$NC_{1,2} = NC_{1,1} + N_{1,2}$...	$NC_{1,n-1} = NC_{1,n-2} + N_{1,n-1}$	$NC_{1,n} = NC_{1,n-1} + N_{1,n}$
	2	$NC_{2,1} = N_{2,1}$	$NC_{2,2} = NC_{2,1} + N_{2,2}$...	$NC_{2,n-1} = NC_{2,n-2} + N_{2,n-1}$	
		
	$n - 1$	$NC_{n-1,1} = N_{n-1,1}$	$NC_{n-1,2} = NC_{n-1,1} + N_{n-1,2}$			
	n	$NC_{n,1} = N_{n,1}$				

2.1.4 SINIESTRO MEDIO

Para obtener el siniestro medio se pueden tomar los triángulos acumulados del monto de siniestros y el del número de casos acumulados y hacer la división.

Tabla 7. Siniestros Medios

		Periodo de desarrollo						
		1	2	...	$n - i + 1$...	$n - 1$	n
Periodo de ocurrencia	1	$SM_{1,1} = \frac{B_{1,1}}{NC_{1,1}}$	$SM_{1,2} = \frac{B_{1,2}}{NC_{1,2}}$...	$SM_{1,n-i+1} = \frac{B_{1,n-i+1}}{NC_{1,n-i+1}}$...	$SM_{1,n-1} = \frac{B_{1,n-1}}{NC_{1,n-1}}$	$SM_{1,n} = \frac{B_{1,n}}{NC_{1,n}}$
	2	$SM_{2,1} = \frac{B_{2,1}}{NC_{2,1}}$	$SM_{2,2} = \frac{B_{2,2}}{NC_{2,2}}$...	$SM_{2,n-i+1} = \frac{B_{2,n-i+1}}{NC_{2,n-i+1}}$...	$SM_{2,n-1} = \frac{B_{2,n-1}}{NC_{2,n-1}}$	
		
	i	$SM_{i,1} = \frac{B_{i,1}}{NC_{i,1}}$	$SM_{i,2} = \frac{B_{i,2}}{NC_{i,2}}$...	$SM_{i,n-i+1} = \frac{B_{i,n-i+1}}{NC_{i,n-i+1}}$			
				
	$n - 1$	$SM_{n-1,1} = \frac{B_{n-1,1}}{NC_{n-1,1}}$	$SM_{n-1,2} = \frac{B_{n-1,2}}{NC_{n-1,2}}$					
	n	$SM_{n-1,1} = \frac{B_{n-1,1}}{NC_{n-1,1}}$						

3. APLICACIÓN DE LAS METODOLOGÍAS

Para la aplicación de las distintas metodologías que permiten determinar siniestros ocurridos y no reportados se deben tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

- ✓ Se calculara la reserva de siniestros ocurridos pero no reportados a la fecha de valuación bajo una metodología de “Best estimate”.
- ✓ El o los métodos que se elijan para obtener el “Best Estimate” deben ser objetivos y confiables.
- ✓ Los siniestros ocurridos pero no reportados deben estar constituidos por:
 - Siniestros ocurridos pero aún no reportados (IBNYR)
 - Siniestros ocurridos pero no suficientemente reportados (IBNER)
- ✓ La tarificación calculada en base a reservas inexactas pueden resultar excesivas o insuficientes
- ✓ La correcta determinación de las utilidades depende en gran parte de la correcta estimación de las reservas
- ✓ La subvaloración de reservas a lo largo de varios períodos puede causar insolvencia.
- ✓ En general, se estima el valor último y el IBNR se obtiene como la diferencia entre este valor y los montos reportados
- ✓ El o los métodos que se elijan para obtener el “Best Estimate” deben ser objetivos y confiables.
- ✓ Algunos factores que impactan en la selección de la metodología son:
 - Cambios en los procesos de reservas pueden distorsionar proyecciones basadas en ocurridos.
 - Cambios en los patrones de pagos pueden distorsionar proyecciones basadas en pagados

- Factores que influyen en la selección del método apropiado
- Cambio en la velocidad de desarrollo
- Cambios en las frecuencias
- Cambios en los costos promedios
- Cambios en la maduración de los siniestros.

3.1 METODOLOGÍAS

3.1.1 MÉTODO DE DESARROLLO

3.1.1.1 Supuestos

- ✓ Este método asume implícitamente que la suficiencia relativa de las reservas de la empresa a lo largo del tiempo ha sido consistente y que no ha habido cambios importantes en el ritmo al que se han ido reportando los siniestros.
- ✓ El desarrollo de los siniestros en el futuro será consistente con el desarrollo pasado

3.1.1.2 Técnica

- ✓ Los datos se organizan en un triángulo de siniestros.
- ✓ Se seleccionan factores representativos del comportamiento típico.
- ✓ La selección de factores de cola basado en tendencias mostradas en la información y en consideraciones de patrones externos. Para realizar una primera selección de factores (FDI). Se puede tener como punto de partida el promedio ponderado de todos los periodos a analizar
- ✓ Determinar el Factor de Cola, en caso de aplicar
- ✓ Determinar el Factor de Cola, en caso de aplicar.
- ✓ Calcular los factores de desarrollo acumulados (FDA) como el producto sucesivo de los FDI, incluyendo el factor de cola.

- ✓ Calcular el monto último total como el producto de la última diagonal y los FDA de cada período de desarrollo.
- ✓ Se realiza la proyección basada en la última evaluación

3.1.1.3 Ventaja

- ✓ Refleja los datos más actuales

3.1.1.4 Desventajas

- ✓ Distorsiones en los resultados si la última evaluación es atípica.
- ✓ Distorsiones en los resultados si los patrones de desarrollo históricos no son estables.

3.1.1.5 Cálculo de la reserva IBNR

Supongamos que disponemos de la siguiente tabla histórica y tenemos organizada la información de la siguiente forma:

		Meses de desarrollo - Última evaluación a diciembre de 2012								
		12	24	36	48	60	72	84	96	108
Año de Ocurrencia	2004	502,5	674,9	751,3	791,2	809,7	817,9	821,3	823	823
	2005	527,6	684,6	768	804,6	820,5	828,6	833,5	835,1	
	2006	553,9	741	823,5	866,7	885,7	894,2	898,2		
	2007	581,7	745,6	845,2	890,2	909,7	918,8			
	2008	668,9	801,5	841	864,5	883,5				
	2009	702,3	842,1	885,7	907,8					
	2010	737,5	882	926,1						
	2011	774,3	925,7							
	2012	875,3								

Flecha Horizontal: Monto ocurrido en cada año de ocurrencia evaluado cada 12 meses
Flecha Vertical: Monto incurrido para cada año de accidente evaluado a una edad determinada (por ejemplo 36 meses)
Flecha Diagonal: Monto incurrido en cada año de ocurrencia evaluados a una fecha específica (por ejemplo, Diciembre de 2012)

Luego se construye el triángulo de intervalos en meses de desarrollo, aplicando el método link ratio, el cual se basa en las tasas de variación de la siniestralidad en un ejercicio de ocurrencia entre un ejercicio de desarrollo y el siguiente. La link ratio es uno más la anterior proporción y se expresa como:

$$B_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

Así por ejemplo

$$B_{1,1} = \frac{C_{1,2}}{C_{1,1}} = \frac{674,9}{502,5} = 1,343$$

		Periodo de desarrollo (meses)								
		12 a 24	24 a 36	36 a 48	48 a 60	60 a 72	72 a 84	84 a 96	96 a 108	108 a Ult
Año de Ocurrencia	2004	1,343	1,113	1,053	1,023	1,010	1,004	1,002	1,000	
	2005	1,298	1,122	1,048	1,020	1,010	1,006	1,002		
	2006	1,338	1,111	1,052	1,022	1,010	1,004			
	2007	1,282	1,134	1,053	1,022	1,010				
	2008	1,198	1,049	1,028	1,022					
	2009	1,199	1,052	1,025						
	2010	1,196	1,050							
	2011	1,196								
	2012									

A continuación se calculan los promedios ponderados utilizando la formula general para un periodo t específico:

$$PP_t = \frac{\sum_{t=1}^j B_{n-t-j,t+1}}{\sum_{t=1}^j B_{n-t-t,t}}$$

Así por ejemplo, el promedio ponderado para el periodo dos en los últimos tres años sería:

$$PP_3 = \frac{907,8 + 864,5 + 890,2}{885,7 + 841 + 845,2} = 1,035$$

Y el promedio en todos los años para el mismo periodo

$$PP_3 = \frac{907,8 + 864,5 + 890,2 + 866,7 + 804,6 + 791,2}{885,7 + 841 + 845,2 + 823,5 + 768 + 751,3} = 1,043$$

Promedios									Factor de cola
Últimos 3 años	1,197	1,050	1,035	1,022	1,010	1,005	1,002	1,000	
Todos los años	1,247	1,090	1,043	1,022	1,010	1,005	1,002	1,000	
Industria	1,220	1,060	1,039	1,021	1,010	1,004	1,002	1,001	1,010

Se calculan también los FDA es decir los factores de desarrollo acumulados:

FDA	1,469	1,178	1,083	1,0390	1,0168	1,007	1,002	1,000	1,000
-----	-------	-------	-------	--------	--------	-------	-------	-------	-------

Así el FDA para el periodo tres es:

$$FDA_3 = (1,043)(1,022)(1,010)(1,005)(1,002)(1,000) = 1,083$$

A continuación se calcula el monto último total como el producto de la última diagonal y los FDA:

										Total
Ultima Diagonal	875,3	925,7	926,1	907,8	883,5	918,8	898,2	835,1	823,1	7994

										Total
Monto último total	1286,2	1090,5	1003,4	943,2	898,4	925,1	900	835,1	823,1	8704

A continuación se realiza la proyección basada en la última evaluación

<u>AÑO</u>	<u>Diferencia ultima diagonal y monto ultimo</u>	<u>Reserva IBNR</u>
2005	835,1 – 835,1	0
2006	900 – 898,2	1,8
2007	925 ,1 – 918,8	6,4
2008	898,4 – 883,5	14,9
2009	943,2 – 907,8	35,4
2010	1003,4 – 926,1	77,3
2011	1090,5 – 925,7	164,8
2012	1286,2 – 875,3	410,9
Reserva Total IBNR		$\Sigma = 711,4$

Para calcular el promedio simple quitando el máximo y el mínimo se utiliza la siguiente fórmula:

$$PS_{(m,n),i} = \frac{[D_{n-1,i} + D_{n-1,i} + \dots + D_{n-m,i}] - \text{Max}(D_{n-1,i}, \dots, D_{n-m,i}) - \text{Min}(D_{n-1,i}, \dots, D_{n-m,i})}{m}$$

Nota: No se deben utilizar promedios ponderados para triángulos de severidades o ratios.

3.1.1.6 Reporte

En distintos ámbitos las empresas privadas o públicas requieren presentar información relevante de algún estudio específico de manera simple y resumida, para ello, generan algunos documentos llamados reportes. A continuación se presenta un ejemplo de reporte que hace referencia al método de desarrollo antes ejemplificado.

Tabla 8. Reporte Método de desarrollo

Estimación de los Siniestros Últimos
Utilizando el método de desarrollo para siniestros pagados

Periodo de Ocurrencia	Siniestros Pagados	Patrón de Desarrollo Acumulado	Siniestros Últimos	Prima Devengada	Siniestralidad Última	Reserva IBNR
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
2004	823	1,000	823	946	0,870	0
2005	835	1,000	835	960	0,870	0
2006	898	1,002	900	1.033	0,871	1,8
2007	918	1,007	925	1.057	0,876	6,4
2008	883	1,016	898	1.016	0,884	14,8
2009	907	1,039	943	1.044	0,903	35,4
2010	926	1,083	1003	1.065	0,942	76,9
2011	925	1,178	1090	1.065	1,024	164,8
2012	875	1,469	1285	1.007	1,277	410,5
Total	7904	9,795	8704,8	9,193	8,5172	711,4

Notas:

- (1), (4) Provisos por la compañía.
- (2) Patrón de desarrollo seleccionado para los siniestros pagados.
- (3) = (1) x (2).
- (5) = (3) / (4).

3.1.2 METODOLOGÍAS BASADAS EN LA FRECUENCIA Y SEVERIDAD

3.1.2.1 Supuestos

- ✓ Siniestros totales se pueden desglosar en componentes de frecuencia y costo medio

3.1.2.2 Técnica

- ✓ Cantidad de casos
 - Análisis de casos totales (ocurridos, cerrados o cerrados con pago)
 - Análisis de la razón entre casos y expuestos
 - Selección de frecuencia por periodo
 - Casos = frecuencia x expuestos
- ✓ Costo promedio
 - Desarrollo de los costos promedios proyectados por periodo
 - Análisis y selección del costo medio proyectado por periodo
- ✓ Siniestros totales = casos totales × costo promedio estimado

3.1.2.3 Ventajas

- ✓ Estable
- ✓ Estudio de las componentes de frecuencia y costo promedio

3.1.2.4 Desventajas

- ✓ Menos sensible a cambios en las evaluaciones más recientes
- ✓ Menos útil para periodos antiguos

3.1.2.5 Cálculo de la reserva IBNR

Para determinar la reserva del IBNR se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Calcular el triángulo de cantidad de siniestros ocurridos
2. Calcular promedios
3. Seleccionar factores de desarrollo
4. Determinar el Factor de Cola, en caso de aplicar
5. Calcular los FDA como el producto sucesivo de los FDI, incluyendo el factor de cola.
6. Calcular cantidad última de siniestros ocurridos como el producto de la ultima diagonal y los FDA de cada período de desarrollo

Tabla 9. Triángulo de cantidad de siniestros ocurridos

		Periodo de desarrollo						
		1	2	...	$n - i + 1$...	$n - 1$	n
Periodo de ocurrencia	1	$Cl_{1,1}$	$Cl_{1,2}$...	$Cl_{1,n-i+1}$...	$Cl_{1,n-1}$	$Cl_{1,n}$
	2	$Cl_{2,1}$	$Cl_{2,2}$...	$Cl_{2,n-i+1}$...	$Cl_{2,n-1}$	
		
	i	$Cl_{i,1}$	$Cl_{i,2}$...	$Cl_{i,n-i+1}$			
				
	$n - 1$	$Cl_{n-1,1}$	$Cl_{n-1,2}$					
n	$Cl_{n,1}$							

Donde:

$$Cl_{n-1,1} = \underbrace{Cl_{n-1,1}}_{\text{Casos abiertos}} - \underbrace{CC S/P_{n-1,1}}_{\text{Casos cerrados sin pago}}$$

Cantidad de siniestros pagados

Para determinar la cantidad de siniestros pagados se debe construir el triángulo de cantidad de siniestros cerrados con pago

Tabla 10. Triángulo de cantidad de siniestros pagados

		Periodo de desarrollo						
		1	2	...	$n - i + 1$...	$n - 1$	n
Periodo de ocurrencia	1	$CP_{1,1}$	$CP_{1,2}$...	$CP_{1,n-i+1}$...	$CP_{1,n-1}$	$CP_{1,n}$
	2	$CP_{2,1}$	$CP_{2,2}$...	$CP_{2,n-i+1}$...	$CP_{2,n-1}$	
		
	i	$CP_{i,1}$	$CP_{i,2}$...	$CP_{i,n-i+1}$...		
		
	$n - 1$	$CP_{n-1,1}$	$CP_{n-1,2}$					
	n	$CP_{n,1}$						

Tabla 11. Proyección de siniestros últimos

Periodo de ocurrencia	Cantidad de siniestros ocurridos	Cantidad de siniestros pagados	Cantidad ultima de siniestros		Cantidad ultima de siniestros CSU	Expuestos	Frecuencia F
			Ocurridos CIU	Ocurridos CPU			
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	$Cl_{1,n}$	$CP_{1,n}$	$Cl_{1,n} \times FDA_n$	$CP_{1,n} \times FDA_n$	Selección	E_1	E_1/CSU_1
2	$Cl_{2,n}$	$CP_{2,n}$	$Cl_{2,n} \times FDA_{n-1}$	$CP_{2,n} \times FDA_{n-1}$		E_2	E_2/CSU_2
...
i	$Cl_{i,n}$	$CP_{i,n}$	$Cl_{i,n} \times FDA_{n-i+1}$	$CP_{i,n} \times FDA_{n-i+1}$		E_i	E_i/CSU_i
...			
$n - 1$	$Cl_{n-1,n}$	$CP_{n-1,n}$	$Cl_{n-1,n} \times FDA_2$	$CP_{n-1,n} \times FDA_2$		E_{n-1}	E_{n-1}/CSU_{n-1}
n	$Cl_{n,n}$	$CP_{n,n}$	$Cl_{n,n} \times FDA_1$	$CP_{n,n} \times FDA_1$		E_n	E_n/CSU_n

Al hacer la proyeccion se debe revisar:

- ✓ La existencia de tendencias en la frecuencia.
- ✓ Si existen desviaciones entre los métodos de proyección, identificar causas.
- ✓ Analizar razonabilidad de los resultados en cuanto a la frecuencia.

Promedios

Para determinar la cantidad de siniestros pagados se debe construir el triángulo de ocurrencia promedio (IP)

Tabla 12. Triángulo de ocurrencia promedio (IP)

		Periodo de desarrollo						
		1	2	...	$n - i + 1$...	$n - 1$	n
Periodo de ocurrencia	1	$IP_{1,1}$	$IP_{1,2}$...	$IP_{1,n-i+1}$...	$IP_{1,n-1}$	$IP_{1,n}$
	2	$IP_{2,1}$	$IP_{2,2}$...	$IP_{2,n-i+1}$...	$IP_{2,n-1}$	
		
	i	$IP_{i,1}$	$IP_{i,2}$...	$IP_{i,n-i+1}$			
				
	$n - 1$	$IP_{n-1,1}$	$IP_{n-1,2}$					
	n	$IP_{n,1}$						

Donde:

$$IP_{i,j} = \frac{I_{i,j}}{CI_{i,j}}$$

Triángulo de pago promedio (pp)

Por ultimo se construye el triángulo de pago promedio (pp)

Donde:

$$PP_{i,j} = \frac{PA_{i,j}}{CP_{i,j}}$$

Para luego repetir los pasos 1 a 6 citados en el inciso 3.1.2.5

Tabla 13. Monto promedio último

Periodo de ocurrencia	Monto Promedio Ocurrido	Monto Promedio Pagado	Monto Promedio Último		Monto Promedio Último MPU	Cantidad Última de Siniestros CSU	Siniestros Últimos Frecuencia/Severidad
			Ocurridos IPU	Ocurridos PPU			
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	IP_1	PP_1	$IP_{1,n} \times FDA_n$	$PP_{1,n} \times FDA_n$	<i>Selección</i>	$CSU_{1,n}$	$MPU_1 \times CSU_1$
2	IP_2	PP_2	$IP_{2,n} \times FDA_{n-1}$	$PP_{2,n} \times FDA_{n-1}$		$CSU_{2,n}$	$MPU_2 \times CSU_2$
...
i	IP_i	PP_i	$IP_{i,n} \times FDA_{n-i+1}$	$PP_{i,n} \times FDA_{n-i+1}$		$CSU_{i,n}$	$MPU_i \times CSU_i$
...
$n - 1$	IP_{n-1}	PP_{n-1}	$IP_{n-1,n} \times FDA_2$	$PP_{n-1,n} \times FDA_2$		$CSU_{n-1,n}$	$MPU_{n-1} \times CSU_{n-1}$
n	IP_n	PP_n	$IP_{n,n} \times FDA_1$	$PP_{n,n} \times FDA_1$		$CSU_{n,n}$	$MPU_n \times CSU_n$

Para el desarrollo de esta metodología se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones:

La Existencia de tendencias en la frecuencia: Lo normal es que los siniestros tengan una frecuencia y una intensidad relativamente uniformes, se manifiesten con periodicidad constante en un determinado lapso de tiempo y afecten por igual a un determinado número de personas u objetos asegurados, sin embargo pueden surgir situaciones catastróficas esencialmente anormales o transcurrir períodos de tiempo con beneficio innegable para quienes ejercen el seguro; sólo sobre estas bases puede hacerse un estudio apropiado según las necesidades particulares que evidencie la aseguradora.

Si existen desviaciones entre los métodos de proyección, se deben identificar las causas que dan lugar a estas fluctuaciones, las cuales pueden darse por:

- ✓ La no existencia de gran número de siniestros (baja frecuencia de siniestralidad).
- ✓ Heterogeneidad (imposibilidad de agrupación en clases homogéneas).
- ✓ La irregularidad en cuanto al acontecimiento de los siniestros de forma que sea predecible su comportamiento futuro en términos estadísticos.
- ✓ Que se trate de siniestros de baja cuantía estimada (en general, los grandes siniestros requieren una valoración individualizada que tenga en cuenta todos los datos contenidos en el expediente).
- ✓ La información estadística no sea suficiente, es decir, se obtenga de muestras demasiado pequeñas.

EJEMPLO

Supongamos que se dispone de la siguiente información histórica:

Siniestros Pagados (SP)

1m	2m	3m	4m	5m	6m
177.904.357	177.985.340	178.114.956	178.238.267	178.264.683	178.281.917
186.135.633	186.422.269	186.508.079	186.720.006	186.741.262	
174.440.629	174.768.597	174.776.913	175.043.998		
210.576.122	210.919.895	211.116.910			
183.395.822	183.606.449				
186.942.872					

Número de Siniestros Pagados (CP)

1m	2m	3m	4m	5m	6m
12.276	12.284	12.285	12.297	12.300	12.304
12.630	12.633	12.643	12.653	12.656	
12.097	12.122	12.128	12.139		
12.052	120.66	12.080			
11.952	11.961				
11.449					

Siniestros Ocurridos (SO)

1m	2m	3m	4m	5m	6m
179.571.072	179.612.498	179.667.725	179.694.583	179.794.437	179.802.323
187.125.360	187.258.466	187.296.559	187.609.860	187.603.351	
175.351.863	175.388.210	175.413.042	175.597.932		
211.888.315	212.231.985	212.363.275			
184.062.092	184.115.838				
187.692.863					

Número de Siniestros Ocurridos (CL)

1m	2m	3m	4m	5m	6m
12.409	12.415	12.411	12.413	12.414	12.416
12.704	12.704	12.701	12.704	12.705	
12.180	12.180	12.181	12.186		
12.157	12.162	12.162			
12.009	12.013				
11.511					

	<u>Prima Devengada</u>	<u>Expuestos</u>
	191.740.393	69137
	191.614.008	71.494
	200.633.547	67.650
	201.704.894	68.654
	192.332.986	68.663
	188.661.988	64.363
Total	1.166.687.816	409.961

Se construyen los triángulo de intervalos en meses de desarrollo, aplicando el método link ratio, descrito en el método anterior.

Intervalos en meses de desarrollo (SP)						Intervalos en meses de desarrollo (SO)					
1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
1,000	1,001	1,001	1,000	1,000		1,000	1,000	1,000	1,001	1,000	
1,002	1,000	1,001	1,000			1,001	1,000	1,002	1,000		
1,002	1,000	1,002				1,000	1,000	1,001			
1,002	1,001					1,002	1,001				
1,001						1,000					

Intervalos de desarrollo en meses (CP)						Intervalos de desarrollo en meses (CL)					
1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
1,001	1,000	1,001	1,000	1,000		1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	
1,000	1,001	1,001	1,000			1,000	1,000	1,000	1,000		
1,002	1,000	1,001				1,000	1,000	1,000			
1,001	1,001					1,000	1,000				
1,001						1,000					

Se calculan los promedios ponderados para todos los meses en nuestro caso 6, los cuales a su vez serán los factores de desarrollo

	Promedio ponderado de los últimos 6 meses y FDA					
SP	1,0013	1,0005	1,0011	1,0011	1,0001	1,000
CP	1,0010	1,0006	1,0009	1,0002	1,0003	1,000
SO	1,0006	1,0003	1,0009	1,0002	1,00004	1,000
CL	1,0002	0,9999	1,0003	1,0001	1,0002	1,000

Se calculan también los factores de desarrollo acumulados:

Factores de desarrollo acumulado (FDA)						
SP	1,0032	1,0019	1,0013	1,0002	1,00009	1,000
CP	1,0030	1,0020	1,0015	1,0006	1,00033	1,000
SO	1,0022	1,0015	1,00126	1,0002	1,00004	1,000
CL	1,0006	1,0004	1,0005	1,00051	1,00024	1,0001

Ultima Diagonal (SP)	FDA	Ultima Diagonal (SO)	FDA
178.281.917	1,0000	179.802.323	1,000
186.741.262	1,0001	187.603.351	1,00004
175.043.998	1,0002	175.597.932	1,0003
211.116.910	1,0013	212.363.275	1,0012
183.606.449	1,0019	184.115.838	1,0016
186.942.872	1,0032	187.692.863	1,0022

Ultima Diagonal (CP)	FDA	Ultima Diagonal (CL)	FDA
12.304	1,000	12.416	1,000
12.656	1,0003	12.705	1,00016
12.139	1,0006	12.186	1,00024
12.080	1,0015	12.162	1,00051
11.961	1,0021	12.013	1,00039
11.449	1,0031	11.511	1,00063

Triángulo de pago promedio (pp)

Se construye realizando la razón entre los Siniestros Pagados sobre el Número de siniestros pagados

Así por ejemplo

$$PP_{1,1} = \frac{PA_{1,1}}{CP_{1,1}} = \frac{177.904.357}{12.276} = 14.492$$

Repitiendo este cálculo para todas las posiciones, se obtiene el siguiente triángulo:

1m	2m	3m	4m	5m	6m
14.492	14.489	14.499	14.494	14.493	14.490
14.738	14.757	14.752	14.757	14.755	
14.420	14.417	14.411	14.420		
17.472	17.481	17.477			
15.344	15.350				
16.328					

Intervalos de desarrollo en meses (pp)

1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6	6 - 7
1,000	1,001	1,000	1,000	1,000	
1,001	1,000	1,000	1,000		
1,000	1,000	1,001			
1,000	1,000				
1,000					

Promedio ponderado de los últimos 6 meses y factores de desarrollo				
1,00037	0,99990	1,00023	0,99989	0,99977

Factores de desarrollo acumulado (FDA)					
1,0002	0,9998	0,9999	0,9997	0,9998	1,0000

Triángulo de ocurrencia promedio (op)

Se construye realizando la razón entre los Siniestros ocurridos sobre sobre el Número de siniestros ocurridos

Así por ejemplo

$$IP_{1,1} = \frac{I_{1,1}}{CI_{1,1}} = \frac{179.571.072}{12.447} = 14.471$$

Haciendo lo mismo para todas las posiciones, se obtiene el siguiente triángulo:

1m	2m	3m	4m	5m	6m
14.471	14.467	14.476	14.476	14.483	14.482
14.730	14.740	14.747	14.768	14.766	
14.397	14.400	14.401	14.410		
17.429	17.450	17.461			
15.327	15.326				
16.306					

Intervalos de desarrollo en meses (op)

1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6	6 - 7
0,9997	1,0006	1,0000	1,0005	0,9999	
1,0007	1,0004	1,0014	0,9999		
1,0002	1,0001	1,0006			
1,0012	1,0006				
1,0000					

Promedio ponderado de los últimos 6 meses y factores de desarrollo					
1,0004	1,0004	1,0007	1,0002	0,9999	1,0000

Factores de desarrollo acumulado (FDA)					
1,0016	1,0012	1,0008	1,0001	0,9999	1,0000

Ultima Diagonal	FDA
14.481	1,0000
14.766	0,9999
14.409	1,0001
17.461	1,0008
15.326	1,0012
16.305	1,0016

Cantidad Última de Siniestros Pagados (CPU)

Se calcula realizando el producto de la última diagonal del triángulo de número siniestros pagados por su respectivo factor de desarrollo acumulado.

$$CPU_4 = (12.080)(1,0015) = 12.098$$

Ultima Diagonal (NSP)	FDA	CPU
12.304	1,000	12.304
12.656	1,0003	12.660
12.139	1,0006	12.146
12.080	1,0015	12.098
11.961	1,0021	11.986
11.449	1,0031	11.484

Cantidad Última de Siniestros Ocurridos CIU

Se calcula realizando el producto de la última diagonal del triángulo de siniestros ocurridos por su respectivo factor de desarrollo acumulado

$$CIU_3 = (12.186)(1,00024) = 12.189$$

Ultima Diagonal (CL)	FDA	CIU
12.416	1,000	12.416
12.705	1,00016	12.707
12.186	1,00024	12.189
12.162	1,00051	12.168
12.013	1,00039	12.017
11.511	1,00063	11.518

Frecuencia

Se calcula realizando el cociente entre CIU y los siniestros expuestos E.
Así por ejemplo

$$fr_1 = \frac{E_1}{CIU_1} = \frac{12416}{69137} = 0,180$$

<u>Expuestos</u>	<u>CIU</u>	<u>Frecuencia fr</u>
69.137	12.416	0,180
71.494	12.707	0,178
67.650	12.189	0,180
68.654	12.168	0,177
68.663	12.017	0,175
64.363	11.518	0,179

Monto Promedio Último Ocurrido

Se calculan realizando el producto de la última diagonal del triángulo de pago promedio (pp) por su respectivo factor de desarrollo acumulado

Ultima Diagonal (pp)	FDA	PPU	Ultima Diagonal (op)	FDA	IPU
14.489	1,0000	14.490	14.481	1,0000	14.482
14.755	0,9998	14.752	14.766	0,9999	14.764
14.419	0,9997	14.415	14.409	1,0001	14.411
17.476	0,9999	17.475	17.461	1,0008	17.474
15.350	0,9998	15.347	15.326	1,0012	15.345
16.328	1,0002	16.331	16.305	1,0016	16.332

Monto Promedio Último Seleccionado (MPU)

Se puede calcular realizando la media entre los siniestros ocurridos y pagados

$$MPU_n = \frac{PPU_n + IPU_n}{2}$$

Así por ejemplo

$$MPU_1 = \frac{(14.490 + 14.482)}{2} = 14.486$$

Ocurridos	Pagados	Monto Promedio Seleccionado
14.482	14.490	14.486
14.764	14.752	14.758
14.411	14.415	14.413
17.474	17.475	17.475
15.345	15.347	15.346
16.332	16.331	16.331

Luego se calculan los siniestros últimos como el producto de la cantidad de siniestros últimos CIU y el monto promedio último seleccionado MPU (frecuencia por severidad) obteniéndose los siguientes resultados:

Monto promedio ultimo seleccionado MPU	Cantidad ultima de siniestros CIU	Siniestros Últimos Frecuencia × Severidad
14.486	12.416	179.853.546
14.758	12.707	187.531.607
14.413	12.189	175.677.745
17.475	12.168	212.633.129
15.346	12.018	184.423.140
16.331	11.518	188.107.600

Por último se calcula la reserva IBNR, realizando la diferencia entre los siniestros últimos y los siniestros pagados de la última diagonal

<u>Siniestros últimos</u>	<u>Ultima Diagonal (SP)</u>	<u>IBNR</u>
179853546	178281917	1571629
187531607	186741262	790345
175677745	175043998	633747
212633129	211116910	1516219
184423140	183606449	816691
188107600	186942872	1164728
	Total	6493359

3.1.2.6 Reporte

Ejemplo de reporte del método basado en frecuencia y severidad.

Estimación de los Frecuencia Última
Utilizando la metodología Frecuencia / Severidad

<u>Periodo de Ocurrencia</u>	<u>Número de Casos</u>		<u>Patrón de Desarrollo Acumulado</u>		<u>Cantidad Última de Siniestros</u>		<u>Cantidad Última de Siniestros Seleccionada</u>	<u>Expuestos</u>	<u>Frecuencia</u>
	<u>Ocurridos</u>	<u>Pagados</u>	<u>Ocurridos</u>	<u>Pagados</u>	<u>Ocurridos</u>	<u>Pagados</u>			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Jan 2010	1.2416	12.304	1,000	1,000	12.416	12.304	12.416	69.137	0,180
Feb 2010	12.705	12.656	1,000	1,000	12.707	12.660	12.707	71.494	0,178
Mar 2010	12.186	12.139	1,000	1,001	12.189	12.146	12.189	67.650	0,180
Apr 2010	12.162	12.080	1,001	1,001	12.168	12.098	12.168	68.654	0,177
May 2010	12.013	11.961	1,000	1,002	12.018	11.986	12.018	68.663	0,175
Jun 2010	11.511	11.449	1,001	1,003	11.518	11.484	11.518	64.363	0,179

Notas:

(1), (2), (8) Provistos por la compañía.

Patrones de desarrollo

(3),(4) seleccionados.

(5) = (1) x (3).

(6) = (2) x (4).

(7) Selección.

(9) = (7) / (8)

Tabla 14. Reporte metodología frecuencia y severidad

Estimación de los Siniestros Últimos
Utilizando la metodología Frecuencia / Severidad

Periodo de Ocurrencia	Monto Promedio		Patrón de Desarrollo Acumulado		Monto Promedio Último		Monto Promedio último	Cantidad última de siniestros	Siniestros últimos
	Ocurridos	Pagados	Ocurridos	Pagados	Ocurridos	Pagados	Seleccionado	Seleccionada	Frecuencia x Severidad
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Jan 2010	14.482	14.490	1,000	1,000	14.482	14.490	14.486	12.416	179.853.546
Feb 2010	14.766	14.755	1,000	1,000	14.764	14.752	14.758	12.707	187.531.607
Mar 2010	14.410	14.420	1,000	1,000	14.411	14.415	14.413	12.189	175.677.745
Apr 2010	17.461	17.477	1,001	1,000	17.474	17.475	17.475	12.168	212.633.129
May 2010	15.326	15.350	1,001	1,000	15.345	15.347	15.346	12.018	184.423.140
Jun 2010	16.306	16.328	1,002	1,000	16.332	16.331	16.331	11.518	188.107.600

Notas:

- (1), (2) Provistos por la compañía.
 (2),(3) Patrones de desarrollo seleccionados.
 (5) = (1) x (3).
 (6) = (2) x (4).
 (7) Selección.
 Del resultado obtenido en el análisis de
 (8) frecuencia.
 (9) = (8) x (7).

3.1.3 BORNHUETTER – FERGUSON

3.1.3.1 Supuestos

- ✓ Reservas no están relacionadas con los siniestros pagados/reportados; solamente dependen del patrón de pago/reporte y siniestros esperados.

3.1.3.2 Técnica

- ✓ Híbrido de los métodos de desarrollo y siniestralidad esperada.
 - Se comienza realizando una estimación a-priori de la siniestralidad esperada o Initial Expected Loss Ratio (IELR)
- ✓ A medida que el periodo subyacente va madurando, los siniestros ocurridos reemplazan la siniestralidad esperada.
- ✓ Siniestros totales estimados = Montos pagados + montos esperados por pagar
Montos reportados + montos esperados por reportar

3.1.3.3 Ventajas

- ✓ Mayor estabilidad que los métodos de desarrollo.
- ✓ Refleja en cierta medida los datos más actualizados.
- ✓ Permite suavizar los resultados.
 - El método de desarrollo tiende a subestimar cuando el ocurrido es bajo y a sobreestimar si es alto
- ✓ Permite incorporar los cambios en la estructura de las tarifas.
- ✓ Permite estimar el IBNR cuando la información es escasa.
- ✓ Permite incorporar los cambios en la estructura de las tarifas.

3.1.3.4 Desventajas

- ✓ Requiere la estimación de la siniestralidad esperada inicial.
- ✓ Requiere la estimación de porcentajes de desarrollo de siniestros.
- ✓ Más complejo y menos intuitivo que los métodos anteriores.

3.1.3.5 Cálculo de la reserva IBNR Ejemplo

3.1.3.5.1 B/F General

- Supongamos que disponemos de la siguiente tabla histórica

		Periodo de Desarrollo					
		0	1	2	3	4	5
Periodo de ocurrencia	0	1996	2459	2616	2774	3006	3121
	1	2762	3051	3507	3780	4187	
	2	2898	3061	3493	3776		
	3	2930	3245	3462			
	4	2474	2869				
	5	2684					

Además de los datos recogidos en el triángulo de siniestralidad se conoce el nivel de primas durante estos ejercicios, los cuales se recogen en la siguiente tabla:

0	1	2	3	4	5
3905	5640	5416	5069	4657	5352

Otro dato que se conoce es que la ratio de siniestralidad S y de primas P es del 85%. A partir de los valores de P y de la ratio, se estima los valores de S como el producto de $0,85 \times P$ es decir:

0	1	2	3	4	5
3719	4794	4604	4309	3958	4549

Para determinar la reserva de los IBNR se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

- Primero se debe estimar la proporción de cambio de un ejercicio a otro. Para ello se realiza una media ponderada de las link ratios, en donde cada valor se pondera con la siniestralidad que le precede. Es decir unos $R_{i,j}$ definidos como:

$$R_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

Entonces para el ejercicio j de desarrollo, la tasa de modificación de la liquidación de siniestros viene dada por la siguiente expresión:

$$R_j = \frac{\sum_{t=j}^{l-j-1} C_{t,j} R_{t,j}}{\sum_{t=j}^{l-j-1} C_{t,j}}$$

En donde, sustituyendo $R_{t,j}$ por su valor obtenemos una expresión alternativa para calcular las proporciones buscadas:

$$R_j = \frac{\sum_{t=j}^{l-j-1} C_{t,j} R_{t,j}}{\sum_{t=j}^{l-j-1} C_{t,j}} = \frac{\sum_{t=j}^{l-j-1} C_{t,j} \frac{C_{t,j+1}}{C_{t,j}}}{\sum_{t=j}^{l-j-1} C_{t,j}} = \frac{\sum_{t=j}^{l-j-1} C_{t,j+1}}{\sum_{t=j}^{l-j-1} C_{t,j}}$$

A modo de ilustración en el ejemplo que estamos siguiendo, R_0 se calcula como sigue:

$$R_0 = \frac{\sum_{t=0}^5 C_{t,1}}{\sum_{t=0}^5 C_{t,0}} = \frac{2459 + 3051 + 3061 + 3245 + 2869}{1996 + 2762 + 2898 + 2930 + 2474} = \frac{14685}{13060} = 1,124$$

Procediendo igual para el resto de los R_j , se obtienen los siguientes valores:

	0	1	2	3	4
R_j	1,124	1,107	1,074	1,097	1,038

- Luego a partir de los R_j se calculan los factores de proyección definidos por Sanchez J. en [12] siguiendo la siguiente expresión:

$$f_k = \prod_{j=k}^j R_j$$

Asi por ejemplo

$$f_0 = (1,124)(1,107)(1,074)(1,097)(1,038) = 1,523$$

$$f_1 = (1,107)(1,074)(1,097)(1,038) = 1,355$$

Realizando el mismo procedimiento para el resto de los f_k , se obtienen los siguientes valores:

	0	1	2	3	4
f_k	1,523	1,355	1,224	1,139	1,038

- Entonces se divide la siniestralidad en dos grandes bloques:
 - Por un lado la ya aflorada, la cual se recoge en la ultima diagonal del triangulo de siniestros, es decir los $C_{i,l-1}$.
 - Por otro lado la pendiente a aflorar, de la cual se tiene información previa que permite conocer su volumen.

La expresion general para la estimacion de las cifras futuras puede enunciarse como:

$$\hat{C}_{i,j+k} = C_{i,j} + (\beta_{j+k} - \beta_j)\hat{C}_{i,\infty}$$

Siendo

$$\beta_j = \prod_{k=1}^{j-1} f_k^{-1}$$

En donde f_k^{-1} son los factores de paso de un ejercicio a otro, en concreto, el correspondiente al ejercicio k .

Los valores resultantes, para cada año de desarrollo son los siguientes:

	0	1	2	3	4
β_k	0,6564	0,7381	0,8169	0,8776	0,9632

Así por ejemplo

$$f_0 = (1,124)(1,107)(1,074)(1,097)(1,038) = 1,523$$

$$\beta_0 = \frac{1}{1,523} = 0,6564$$

A partir de aquí se puede rellenar la parte inferior derecha del triángulo, utilizando la expresión general para la estimación de las cifras futuras $\hat{C}_{i,j+k} = C_{i,j} + (\beta_{j+k} - \beta_j)\hat{C}_{i,\infty}$ siendo los resultados los siguientes:

		Periodo de Desarrollo					
		0	1	2	3	4	5
Periodo de ocurrencia	0	1996	2459	2616	2774	3006	3121
	1	2762	3051	3507	3780	4187	4364
	2	2898	3061	3493	3776	4170	4340
	3	2930	3245	3462	3723	4092	4251
	4	2474	2869	3181	3421	3760	3906
	5	2684	3056	3414	3690	4079	4247

Por ejemplo

$$\hat{C}_{3,4} = \underbrace{3723}_{C_{i,j}} + \underbrace{(0,9632 - 0,8776)}_{\beta_{j+k} - \beta_j} \underbrace{4309}_{\hat{C}_{i,\infty}} = 4092$$

De modo que teniendo en cuenta la siniestralidad aflorada, el nivel de reservas a dotar *IBNR* es la diferencia entre la provisión total estimada P_E y la suma de los valores de la última diagonal $C_{i,l-1}$.

$$P_E = 4364 + 4340 + 4251 + 3906 + 4247 = 21107$$

$$\sum C_{i,l-1} = 4187 + 3776 + 3462 + 2869 + 2684 = 16978$$

$$IBNR = 21107 - 16978 = 4129$$

3.1.3.5.2 B/F con Link Ratio

Aplicando el método link ratio, el cual se basa en las tasas de variación de la siniestralidad en un ejercicio de ocurrencia entre un ejercicio de desarrollo y el siguiente. La link ratio es uno más la anterior proporción y se expresa como:

$$R_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

Así los $R_{i,j}$ para el ejemplo son:

		Periodo de Desarrollo					
		0	1	2	3	4	5
Periodo de ocurrencia	0	1,2320	1,0638	1,0604	1,0836	1,0383	1,0638
	1	1,1046	1,1495	1,0778	1,1077		
	2	1,0562	1,1411	1,0810			
	3	1,1075	1,0669				
	4	1,1597					
	5	*****					

Asi por ejemplo

$$R_{0,0} = \frac{2459}{1996} = 1,2320 \quad R_{1,2} = \frac{3780}{3507} = 1,0778$$

✓ Se calculan las Link ratios medias \bar{R}_j y los factores de cambio f_k resultantes asi:

$\bar{R}_0 = \frac{1,230 + 1,1046 + 1,0562 + 1,1075 + 1,1597}{5} = 1,1320$	$f_0 = \bar{R}_0 * \bar{R}_1 * \bar{R}_2 * \bar{R}_3 * \bar{R}_4 * \bar{R}_5 = 1,625$
$\bar{R}_1 = \frac{1,0638 + 1,1495 + 1,1411 + 1,0669}{4} = 1,1053$	$f_1 = \bar{R}_1 * \bar{R}_2 * \bar{R}_3 * \bar{R}_4 * \bar{R}_5 = 1,435$
$\bar{R}_2 = \frac{1,0604 + 1,0778 + 1,0810}{3} = 1,0731$	$f_2 = \bar{R}_2 * \bar{R}_3 * \bar{R}_4 * \bar{R}_5 = 1,299$
$\bar{R}_3 = \frac{1,0836 + 1,1077}{2} = 1,0957$	$f_3 = \bar{R}_3 * \bar{R}_4 * \bar{R}_5 = 1,210$
$\bar{R}_4 = \frac{1,0383}{1} = 1,0383$	$f_4 = \bar{R}_4 * \bar{R}_5 = 1,104$
$\bar{R}_5 = 1,0638$	$f_5 = \bar{R}_5 = 1,064$

- ✓ El inverso de los factores de proyección representan la siniestralidad media aflorada en el momento de hacer el cálculo. Por tanto, 1 menos el inverso será la siniestralidad que falta por manifestarse. Los resultados en este caso son los siguientes:

	0	1	2	3	4	5
$\frac{1}{f_k}$	0,615	0,697	0,770	0,826	0,905	0,940
$1 - \frac{1}{f_k}$	0,385	0,303	0,230	0,174	0,095	0,060

- ✓ Dado el valor de la ratio entre siniestralidad y primas y el nivel de estas últimas, la siniestralidad estimada se obtiene sin más que multiplicar la ratio citada por las primas. En nuestro caso, se logran los siguientes valores:

	0	1	2	3	4	5
\hat{C}_∞	3319	4794	4604	4309	3958	4549

- ✓ Teniendo en cuenta los porcentajes de paso de un ejercicio a otro, se puede rellenar la parte inferior derecha del triángulo de siniestros. Los resultados son los siguientes:

		Periodo de Desarrollo						
		0	1	2	3	4	5	\hat{C}_∞
Periodo de ocurrencia	0	1996	2459	2616	2774	3006	3121	3319
	1	2762	3051	3507	3780	4187	4506	4794
	2	2898	3061	3493	3776	4168	4328	4604
	3	2930	3245	3462	3560	3901	4050	4309
	4	2474	2869	3048	3271	3584	3721	3958
	5	2684	3169	3503	3759	4119	4276	4549

Así por ejemplo:

$$\hat{C}_{1,5} = \frac{4794}{C_\infty} - \left(\frac{4794}{C_\infty} * \frac{0.060}{1 - \frac{1}{f_k}} \right) = 4506$$

$$\hat{C}_{3,4} = \frac{4309}{C_\infty} - \left(\frac{4309}{C_\infty} * \frac{0.095}{1 - \frac{1}{f_k}} \right) = 3901$$

Por tanto el nivel de reservas a dotar *IBNR* es la diferencia entre la sumatoria \hat{C}_∞ , y la provision total P_t , por tanto igual a la diferencia entre ese importe y lo ya dotado.

$$\sum \hat{C}_\infty = 3319 + 4794 + 4604 + 4309 + 3958 + 4549 = 25533$$

$$P_t = (3319 - 3121) + (4794 - 4187) + (4604 - 3776) + (4309 - 3462) + (3958 - 2869) + (4549 - 2684)$$

$$P_t = 5434$$

3.1.4 CAPE COD

3.1.4.1 Supuestos

- ✓ Reservas no están directamente relacionadas con los siniestros pagados/reportados

3.1.4.2 Técnica

- ✓ Híbrido de los métodos de desarrollo y siniestralidad esperada, similar al Bornhuetter – Ferguson
 - Se comienza realizando un ajuste a las primas devengadas.
 - Se pueden aplicar tendencias a los siniestros y llevarlos a niveles base.
 - Posteriormente se realiza una estimación a-priori de la siniestralidad
 - El Loss Ratio a usar es el promedio ponderado de las tasas de siniestralidad últimas con la tendencia y desarrolladas.

✓ Siniestros últimos =	Montos ocurridos + % por desarrollar × Siniestralidad Esperada
	Montos pagados + % por desarrollar × Siniestralidad Esperada

3.1.4.3 Ventajas

- ✓ Años de ocurrencia con mayor exposición tienen un peso relativo mayor que aquellos con menor exposición.
- ✓ Refleja en cierta medida los datos más recientes.
- ✓ Permite suavizar los resultados y la fluctuación de los datos más recientes se controla
- ✓ Permite incorporar los cambios en la estructura de las tarifas

3.1.4.4 Desventajas

- ✓ Requiere la estimación de la siniestralidad esperada inicial
- ✓ Requiere la estimación de porcentajes de desarrollo de siniestros
- ✓ Más complejo y menos intuitivo que los métodos anteriores
- ✓ Requiere de más información y de mejor calidad que el BF

3.1.4.5 Cálculo de la reserva IBNR Ejemplo

Para determinar la reserva de los IBNR se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

En este método se supone lo siguiente:

- a) Independencia entre los importes $C_{i,j}$ de años de accidentes diferentes.
- b) Existe un conjunto de parametros $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_l > 0$, $k > 0$ y un patron de desarrollo de siniestros $\beta_j \forall j= 0, \dots, J$, tales que:

$$E(C_{i,j}) = k\Pi_i\beta_j \quad \forall i= 0 \dots l$$

Π_i puede interpretarse como el nivel de primas del año i –ésimo, mientras que k puede verse como un ratio de siniestralidad media. Para llevar a cabo su cálculo es necesario

obtener previamente los k_i correspondientes a cada año, para lo cual el cálculo a realizar es el siguiente:

$$\hat{k}_i = \frac{\hat{C}_{i,l}}{\Pi_i} \left(\frac{\hat{C}_{i,l-i}}{\prod_{j=l-i}^{j-1} f_j^{-1}} \right) \frac{1}{\Pi_i} = \frac{\hat{C}_{i,l-i}}{\beta_{i,l-i} \Pi_i} \quad \forall i = 0, \dots, l$$

Un estimador menos dependiente de los atípicos se obtendría como:

$$\hat{C}_{i,l-i} = \hat{k} \beta_{i,l-i} \Pi_i$$

Con lo que el estimador CC queda como sigue:

$$\hat{C}_{i,l-i}^{CC} = \prod_{j=l-i}^{j-1} f_j \hat{C}_{i,l-i} + (C_{i,l-i} - \hat{C}_{i,l-i}) \quad \forall i = 1, \dots, l$$

Partiendo del nivel de primas de cada año, de los datos utilizados en el método anterior y de los factores de proyección, se realiza la estimación Chain Ladder de la siguiente forma:

Nivel de primas					
0	1	2	3	4	5
3905	5640	5416	5069	4657	5352

		Periodo de Desarrollo					
		0	1	2	3	4	5
Periodo de ocurrencia	0	1996	2459	2616	2774	3006	3121
	1	2762	3051	3507	3780	4187	4347
	2	2898	3061	3493	3776	4144	4303
	3	2930	3245	3462	3719	4082	4238
	4	2474	2869	3175	3411	3744	3887
	5	2684	3018	3340	3588	3938	4089

	0	1	2	3	4	
R_j	1,124	1,107	1,074	1,097	1,038	
f_j	1,523	1,355	1,224	1,139	1,038	
B_j	0,6564	0,7381	0,8169	0,8776	0,9632	1,000

Con estos factores se calculan los $\hat{C}_{i,j}$ resaltados en color amarillo en la tabla de datos.

Asi por ejemplo

$$\hat{C}_{1,5} = C_{1,4} * R_4 = (4187)(1,038) = 4347$$

$$\hat{C}_{5,1} = C_{5,0} * R_0 = (2684)(1,124) = 3048$$

$$\hat{C}_{5,2} = C_{5,1} * R_1 = (3018)(1,107) = 3340$$

Siendo la

$$\sum \hat{C}_{i,j} = 4347 + 4303 + 4238 + 3887 + 4089 = 20864$$

La provision total sera la sumatoria entre la diferencia entre ese importe y lo ya dotado, obteniendose asi:

$$P_{total} = (4347 - 4187) + (4303 - 3776) + (4238 - 3462) + (3887 - 2869) + (4089 - 2684) = 3886$$

✓ Luego se calculan los ratios de siniestralidad como el cociente entre la estimación

$\hat{C}_{i,l-i}^{CL}$ y las primas de cada año. Los datos son los recogidos en la siguiente tabla:

Año	0	1	2	3	4	5
k_i	$\frac{3121}{3905} = 79,92\%$	$\frac{4347}{5640} = 77,08$	$\frac{4303}{5416} = 79,44\%$	$\frac{4238}{5069} = 83,60\%$	$\frac{3887}{4657} = 83,47\%$	$\frac{4089}{5652} = 76,40\%$

Con estos resultados se procede a calcular la ratio media $\overline{R_M} \approx 80\%$. Con este resultado se procede a estimar el valor de la ultima diagonal aplicando la expresion $\hat{C}_{i,l-i} = \hat{k}\beta_{i,l-i}\Pi_i$. Los resultados que se obtienen, junto con las diferencias respecto a los datos, son los recogidos en la siguiente tabla:

Año	$\hat{C}_{i,l-i}$	$\hat{C}_{i,l-i} - C_{i,l-i}$
0	3123	2
1	4345	158
2	3802	26
3	3312	-150
4	2749	-120
5	2810	126

Por ejemplo

$$\hat{C}_{1,5} = \underbrace{(5640)}_{Prima} \underbrace{(0.9632)}_{B_j} \underbrace{(0.8)}_{\overline{R_M}} = 4345$$

$$\hat{C}_{2,5} = \underbrace{(5416)}_{Prima} \underbrace{(0.8776)}_{B_j} \underbrace{(0.8)}_{\overline{R_M}} = 3802$$

$$\hat{C}_{1,5} - C_{1,4} = \underbrace{4345}_{\hat{C}_{i,l-i}} - \underbrace{4187}_{C_{i,l-i}} = 158$$

$$\hat{C}_{2,5} - C_{1,4} = \underbrace{3802}_{\hat{C}_{i,l-i}} - \underbrace{3776}_{C_{i,l-i}} = 26$$

A partir de estas cifras, ya se puede proceder a rellenar la parte inferior derecha del triángulo sin mas que utilizar la expresión:

$$\hat{C}_{i,l-i}^{CC} = \prod_{j=l-i}^{j-1} f_j \hat{C}_{i,l-i} + (C_{i,l-i} - \hat{C}_{i,l-i}) \quad \forall i = 1, \dots, l$$

Asi por ejemplo

$$\hat{C}_{1,5}^{CC} = \underbrace{(1,038)}_{f_j} \underbrace{(4345)}_{\hat{C}_{i,l-i}} + \left(\underbrace{4187}_{C_{i,l-i}} - \underbrace{4345}_{\hat{C}_{i,l-i}} \right) = 4353$$

$$\hat{C}_{2,5}^{CC} = \underbrace{(1,139)}_{f_j} \underbrace{(3802)}_{\hat{C}_{i,l-i}} + \left(\underbrace{3776}_{C_{i,l-i}} - \underbrace{3802}_{\hat{C}_{i,l-i}} \right) = 4307$$

		Periodo de Desarrollo					
		0	1	2	3	4	5
Periodo de ocurrencia	0	1996	2459	2616	2774	3006	3121
	1	2762	3051	3507	3780	4187	4353
	2	2898	3061	3493	3776	4147	4307
	3	2930	3245	3462	3708	4055	4205
	4	2474	2869	3163	3389	3708	3845
	5	2684	3034	3372	3631	3998	4156

Siendo la

$$\sum \hat{C}_{i,j} = 4353 + 4307 + 4205 + 3845 + 4156 = 20866$$

Así la provision total sera:

$$P_t = (4353 - 4187) + (4307 - 3776) + (4205 - 3462) + (3845 - 2869) + (4156 - 2684) = 3888$$

3.1.5 MÉTODO DE REMUESTEO (Bootstrapping)

Esta técnica fue desarrollada para llevar a cabo ciertas inferencias. En esencia, se trata de sustituir el tradicional sistema de cálculo de ciertas estadísticas mediante la aplicación de complejas expresiones analíticas por un mecanismo basado en la aplicación de un algoritmo numérico de simulación. La simulación consiste en repetir un proceso de generación de muestras en un número suficientemente elevado de veces, para poder realizar inferencias. Obviamente este método requiere el uso del ordenador. En definitiva, mediante la repetición y generación de muestras de datos se trata de estudiar la precisión asociada a determinados estadísticos que se quieren utilizar, por ejemplo, la media o la mediana.

Tomando en cuenta lo expuesto en el apartado 1.2.5., se puede resumir la técnica de Bootstrap como:

- ✓ Una técnica de carácter estocástico que fue introducida por B. Efron, en 1982 la cual consiste en aproximar la precisión de un estimador a partir de una muestra de datos u observaciones.
- ✓ La precisión se mide como la inversa de la varianza de un estimador.
- ✓ Es útil cuando la precisión de estimadores de la varianza, coeficiente de asimetría, curtosis, etc., suele ser algebraicamente complicada, o bien no se conoce la distribución de los datos.

- ✓ El método Bootstrap permite obtener una buena aproximación de los principales estimadores y otras estimaciones a partir de la muestra, aún sin conocer la distribución de donde provienen los datos.

A la hora de aplicar este mecanismo cabe distinguir entre el bootstrap paramétrico del que no lo es. La diferencia fundamental entre ambos es el conocimiento o no de la función de distribución responsable de la generación de los valores que se desea analizar. Si se conoce, entonces estaríamos ante el caso paramétrico, en el caso contrario sería el no paramétrico, situación en la que las probabilidades de ocurrencia vendrían dadas por la función empírica de distribución.

3.1.5.1 Bootstrap no paramétrico

Sea \hat{F} una distribución empírica tal que, a cada valor observado le otorga una probabilidad igual a $1/n$. Una muestra bootstrap se define como aquella que es aleatoria, de tamaño n y extraída de la muestra inicial x . Es decir:

$$\underbrace{\hat{F} \rightarrow (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*)}_{\text{muestra bootstrap}}$$

que no es más que una muestra con reemplazamiento obtenida a partir de la inicial $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Es decir, puede ser de la siguiente forma:

$$x_1^* = x_4, \quad x_2^* = x_2, \quad x_3^* = x_2, \quad \dots, \quad x_n^* = x_5$$

Por tanto, cualquier dato de la muestra original puede aparecer ninguna, una o varias veces repetido. Con esta muestra x^* se calcula una réplica de $\hat{\theta}$:

$$\hat{\theta} = e(x^*)$$

La puesta en marcha de la generación de muestras mediante bootstrap en un ordenador es muy fácil. Un algoritmo selecciona de forma aleatoria números enteros i_1, i_2, \dots, i_n cada uno de los cuales es un valor entre 1 y n con probabilidad $1/n$. El bootstrap consiste en hacer lo siguiente:

- se seleccionan B muestras independientes $x^{*1}, x^{*2}, \dots, x^{*B}$, cada una de las cuales tiene n datos obtenidos con reemplazamiento a partir de la muestra inicial x .
- se calcula $\hat{\theta}$ B veces

$$\hat{\theta}^*(b) = e(x^{*b}) \quad / \quad b = 1, 2, \dots, B$$

- con estos B valores de $\hat{\theta}^*(b)$ se estima el error típico $\delta_F(\hat{\theta})$ como la desviación típica muestral de los B elementos:

$$\hat{\delta}_B = \sqrt{\frac{\sum_{b=1}^B [\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(\circ)]^2}{B - 1}}$$

Siendo:

$$\hat{\theta}^*(\circ) = \sum_{b=1}^B \frac{\hat{\theta}^*(b)}{B}$$

3.1.5.2 Bootstrap paramétrico

Como se ha indicado anteriormente, la diferencia básica con el caso no paramétrico, estriba en que en esta situación se parte de una determinada función de distribución. A efectos prácticos, en vez de obtener las muestras con reemplazamiento a partir de los datos iniciales, las muestras generadas de tamaño n se obtienen a partir de la estimación paramétrica de F , \hat{F} . Una vez obtenidas las muestras siguiendo este patrón, se procede igual que en el caso no paramétrico, es decir, se calculan las B réplicas del estadístico a

estudiar, $\hat{\theta} = e(x^{*b})$ y a partir de ellas, se calcula aquéllo que nos interese, por ejemplo, la desviación típica.

Para el propósito de este trabajo de grado se desarrollara un ejemplo de esta técnica con el objeto de hallar la reserva IBNR como se hizo en los anteriores apartados, se hará utilizando el enfoque dado por England y Verrall (1999), en él, proponen la utilización de esta metodología como mecanismo para solventar el problema que supone el cálculo del error de predicción mediante una compleja expresión analítica, sustituyéndolo por una técnica numérica, la cual permite llegar a un resultado muy semejante.

A la hora de llevar a la práctica su modelo, y por motivos de simplicidad en la exposición, England y Verrall en [13] lo hacen teniendo en cuenta que la utilización de la distribución sobredispersa de Poisson, lleva a que el resultado de la estimación del nivel de reservas es el mismo que en el caso de aplicar el Chain Ladder tradicional.

Por ello, lo que hacen es que, en lugar de aplicar estrictamente el bootstrap sobre los residuos de un modelo lineal generalizado (GLM), lo hacen sobre los obtenidos utilizando directamente el Chain Ladder, siguiendo la secuencia de pasos que se indican en el epígrafe siguiente.

La realización del bootstrap en este esquema supone seguir el siguiente esquema según se resume en [14] y [6]:

3.1.5.2.1 England y Verrall

Paso 1: Obtención de los factores de desarrollo del Chain Ladder tradicional.

$$f_j = \frac{\sum_{i=0}^{N-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{N-j-1} C_{i,j}}$$

		Periodo de Desarrollo					
		0	1	2	3	4	5
Periodo de ocurrencia	0	1996	2459	2616	2774	3006	3121
	1	2762	3051	3507	3780	4187	4347
	2	2898	3061	3493	3776	4144	4303
	3	2930	3245	3462	3719	4082	4238
	4	2474	2869	3175	3411	3744	3887
	5	2684	3018	3340	3588	3938	4089

Año	0	1	2	3	4
Factor	1,124	1,107	1,074	1,097	1,038

Paso 2: Obtención de las cifras acumuladas estimadas

Partiendo de la última diagonal, se obtienen los datos de años anteriores de forma recurrente sin más que dividir la cifra del año t entre el factor de desarrollo del año $t - 1$ pues, como se ha indicado en el paso anterior, las cantidades liquidadas en t son f_{t-1} veces las liquidadas el año anterior. Por ejemplo, la cantidad estimada en la posición (4,0) , (3,1) y (3,0) se obtiene como:

- Primero se estima la cantidad de la posición (4,0) a partir de (4,1) dato conocido de la siguiente forma:

$$\hat{C}_{(4,0)} \cdot f_0 = C_{(4,1)} \Rightarrow \hat{C}_{(4,0)} = \frac{C_{(4,1)}}{f_0} = \frac{2869}{1,124} = 2552$$

- Para hallar la cantidad de la posición (3,1), se hace a partir del dato (3,2)

$$\hat{C}_{(3,1)} \cdot f_1 = C_{(3,2)} \Rightarrow \hat{C}_{(3,1)} = \frac{C_{(3,2)}}{f_1} = \frac{3462}{1,107} = 3128$$

- a continuación se estima la posición (3,0) a partir de la estimación de (3,1) como:

$$\hat{C}_{(3,0)} = \frac{\hat{C}_{(3,1)}}{f_0} = \frac{3128}{1,124} = 2782$$

Haciendo lo mismo para todas las posiciones, se obtiene el siguiente triángulo:

	0	1	2	3	4	5
0	2049	2304	2550	2739	3006	3121
1	2854	3209	3551	3815	4187	
2	2824	3176	3515	3776		
3	2782	3128	3462			
4	2552	2869				
5	2684					

Paso 3: Cálculo de los incrementos anuales a partir de los valores estimados en el paso 2.

La variación en las cantidades estimadas se calcula por filas, por lo que:

$$\hat{X}_{i,j} = \begin{cases} \hat{C}_{i,j} & \text{si } j = 0 \\ \hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1} & \text{si } 0 < j \text{ y } j = N - i - 1 \end{cases}$$

Por ejemplo, para $i = 3$, se tiene que:

$$\hat{X}_{i,j} = \begin{cases} \hat{C}_{3,0} & \text{si } j = 0 \\ \hat{C}_{3,1} - \hat{C}_{3,0} & \text{si } j = 1 \\ \hat{C}_{3,2} - \hat{C}_{3,1} & \text{si } j = 2 \end{cases}$$

$$\hat{X}_{3,j} = \begin{cases} 2782 & \text{si } j = 0 \\ (3128 - 2782) & \text{si } j = 1 \\ (3462 - 3128) & \text{si } j = 2 \end{cases}$$

Repitiendo este cálculo para todas las posiciones, se obtiene el siguiente triángulo:

	0	1	2	3	4	5
0	2049	255	246	189	267	115
1	2854	355	343	264	372	
2	2824	351	339	261		
3	2782	346	334			
4	2552	317				
5	2684					

Pasó 4: Cálculo de los residuos adimensionales de Pearson

Para ello se emplea la expresión:

$$\hat{r}_{i,j} = \frac{C_{i,j} - m_{i,j}}{\sqrt{m_{i,j}}}$$

Por ejemplo, para la posición (3,0), $\hat{r}_{i,j}$ será igual a:

$$\hat{r}_{3,0} = \frac{2930 - 2782}{\sqrt{2782}} = 2,81$$

Repitiendo este proceso para todas las posiciones, se obtiene el siguiente triángulo:

	0	1	2	3	4	5
0	1,16	13,03	-5,68	-2,28	-2,14	0,00
1	-1,71	-3,51	6,12	0,57	1,82	
2	1,39	-10,05	5,04	1,36		
3	2,81	-1,67	-6,41			
4	-1,53	4,35				
5	0,00					

Con estos residuos se procede al cálculo del factor de escala o varianza de los residuos:

$$\phi = \frac{\sum_{i=0}^N \hat{r}_i^2}{N - p}$$

	0	1	2	3	4	5	\hat{r}_i^2
0	1,35	169,78	32,26	5,20	4,58	0,00	213,17
1	2,92	12,32	37,45	0,32	3,31		56,34
2	1,93	101,00	25,40	1,85			130,19
3	7,90	2,79	41,09				51,77
4	2,34	18,92					21,26
5	0,00						0,00

$$\sum_{i=0}^N \hat{r}_i^2 = 472,73$$

$$\phi = \frac{472,73}{21 - 11} = 47,27$$

siendo N el total de observaciones y p el número de parámetros estimados en el modelo.

Paso 5: Realización del remuestreo de residuos.

Ésta es la fase en la que se lleva a cabo el bootstrap. La condición para realizarlo es que todos los residuos implicados tengan la misma probabilidad de ser elegidos. Un posible triángulo puede ser el siguiente:

	0	1	2	3	4	5
0	-4,76	-2,65	5,31	5,31	3,05	-3,37
1	4,81	-2,41	-5,68	-4,76	-2,00	
2	5,07	-4,19	0,57	3,05		
3	0,00	2,01	5,07			
4	0,00	-4,80				
5	2,81					

Paso 6: Regeneración de los incrementos a partir de la muestra obtenida en el paso anterior. Para ello, se deshace la expresión de los residuos de Pearson, es decir:

$$\hat{C}_{i,j} = \hat{r}_{i,j}\sqrt{m_{i,j}} + m_{i,j}$$

Por ejemplo, para la posición (2,0) se hará:

$$\hat{C}_{2,0} = \hat{r}_{2,0}\sqrt{m_{2,0}} + m_{2,0} = 5,07\sqrt{2824} + 2824 = 3093$$

Haciendo idéntica operación para todas las posiciones se obtiene el siguiente triángulo:

	0	1	2	3	4	5
0	1833	213	329	262	317	79
1	3110	310	238	186	333	
2	3093	273	350	310		
3	2782	384	427			
4	2552	232				
5	2829					

Paso 7: Regeneración de los datos acumulados

Se obtiene sin más que sumar los incrementos obtenidos en el paso anterior, con lo que el triángulo queda como:

	0	1	2	3	4	5
0	1833	2046	2375	2637	2954	3033
1	3110	3420	3658	3844	4177	
2	3093	3366	3716	4026		
3	2782	3166	3593			
4	2552	2784				
5	2829					

Así por ejemplo

Por ejemplo, para la posición (0,1) sera igual a $1833 + 213 = 2046$

Paso 8: Obtención de los factores de desarrollo de la muestra regenerada

A partir de los datos acumulados obtenidos en el paso 7 y aplicando la expresión que permitía la expresión que permitía la obtención de tales factores, resultan los siguientes valores:

F_p	1,106	1,112	1,078	1,100	1,027

Paso 9: Cálculo de las reservas a partir de la muestra regenerada. Primero se llena la parte inferior del triángulo así por ejemplo:

$$P_{1,5} = 4177 * 1,027 = 4289$$

$$P_{3,3} = 3593 * 1,078 = 3872$$

	0	1	2	3	4	5
0						3033
1					4177	4289
2				4026	4430	4548
3			3593	3872	4261	4375
4		2784	3096	3337	3671	3769
5	2829	3128	3478	3749	4125	4235

Las reservas individuales se hallan, realizando las diferencias entre los montos de un año con los del año anterior así por ejemplo:

$$R_{1,5} = 4289 - 4177 = 112$$

$$R_{4,3} = 3337 - 3096 = 241$$

	0	1	2	3	4	5	\widehat{R}_i
0							0
1						112	112
2					404	118	522
3				279	388	114	782
4			312	241	335	98	985
5		299	350	270	376	110	1406
							$\sum \widehat{R}_i = 3807$

Las reservas para cada periodo se hallan sumando las reservas individuales de cada periodo:

$$\begin{aligned}\widehat{R}_1 &= 112 \\ \widehat{R}_2 &= 404 + 118 = 522 \\ \widehat{R}_3 &= 279 + 388 + 114 = 782\end{aligned}$$

La reserva total será la suma de los \widehat{R}_i , para el ejemplo es 3807.

Este proceso de nueve pasos se repite un número elevado de veces. Recogiendo el resultado de la reserva total de cada iteración.

La estimación ha de completarse con la estimación del error de predicción asociado. Para ello se emplea la expresión:

$$EP_{bs} = \sqrt{\phi_p R + \frac{n}{n-p} [SE_{bs}(R)]^2}$$

siendo R el valor de la reserva que se desea calibrar, ϕ el factor de escala y $SE_{bs}(R)$ la desviación típica de las reservas obtenidas por bootstrap. El primer elemento de la raíz es la varianza asociada al proceso mientras que el segundo es la asociada al proceso de estimación.

3.1.5.2.2 England

El enfoque anterior se basa únicamente en la consideración de los dos primeros momentos de la distribución. Este trabajo es más ambicioso pues pretende generar la distribución de la reserva estimada utilizando no sólo ambos estadísticos sino la distribución entera. Para ello sugiere un proceso en dos etapas:

- En la primera se utiliza el remuestreo para calcular los errores de estimación. Además, a diferencia del trabajo anterior, es en esta fase en la que se realiza el escalamiento de los residuos de Pearson.
- En la segunda se utilizan técnicas de simulación para conseguir estimar el error del proceso implicado. Es decir, si se supone que los incrementos siguen una distribución del tipo Poisson sobredispersa, entonces se replican tales incrementos generando valores aleatorios que sigan esa distribución.

Todo el proceso es bastante parecido al anterior, de hecho, los cuatro primeros pasos son comunes. A partir de aquí es donde comienzan las diferencias. De hecho, el remuestreo no se realiza con los residuos de Pearson, sino con los ajustados, los cuales tienen como expresión:

$$r'_P = \sqrt{\frac{N}{N-p}} r_P$$

Por ello, al calcular el error de predicción no será necesario ajustar la varianza de la estimación obtenida en el bootstrap, por lo que la expresión a utilizar será:

$$EP'_{bs} = \sqrt{\phi'_P R + [SE_{bs}(R)]^2}$$

en donde ϕ'_p hace referencia al factor de escala obtenido con los residuos ajustados.

Para hacer más fácil la comparación con el esquema anterior se realizará el remuestreo de forma que el residuo obtenido en el paso 5 del modelo anterior se multiplicará por $\sqrt{\frac{N}{N-p}}$.

Por ello, en el ejemplo que se va a desarrollar se arrancará de ese punto.

Usando los mismos datos que antes, el proceso arranca a partir del cálculo de los residuos ajustados.

Paso 4: Obtención de los residuos ajustados de Pearson.

$$\sqrt{\frac{N}{N-p}} = \sqrt{\frac{21}{21-11}} = \sqrt{\frac{21}{10}} = 1,45$$

Por ejemplo, para la posición **(2, 0)** se tendrá:

$$P_{2,0} = (1,45)(-5,68) = -8,24$$

	0	1	2	3	4	5
0	-1,68	18,89	-8,24	-3,31	-3,10	0,00
1	-2,48	-5,09	8,87	0,83	2,64	
2	2,02	-14,57	7,31	1,97		
3	4,07	-2,42	-9,29			
4	-2,22	6,31				
5	0,00					

Paso 5: Remuestreo a partir de los residuos anteriores. Un posible triángulo puede ser el siguiente, que es el del paso 5 del modelo anterior multiplicado por 1,45:

	0	1	2	3	4	5
0	-6,90	-3,84	7,70	7,70	4,42	-4,89
1	6,97	-3,49	-8,24	-6,90	-2,90	
2	7,35	-6,08	0,83	4,42		
3	0,00	2,91	7,35			
4	0,00	-6,96				
5	4,07					

Paso 6: datos estimados a partir de los residuos obtenidos en el paso 5 y en el paso 3. Es decir, cada posición se obtiene como:

$$\hat{C}_{i,j} = \hat{r}'_i \sqrt{m_{i,j}} + m_{i,j}$$

con lo que se obtiene el siguiente triángulo:

	0	1	2	3	4	5
0	1737	208	339	271	322	75
1	3227	305	226	178	329	
2	3215	264	351	316		
3	2782	388	437			
4	2552	222				
5	2895					

Paso 7: Datos acumulados. Como en el caso anterior, este triángulo se obtiene sin más que acumular incrementos acumulados en cada año de ocurrencia. Los resultados son los recogidos a continuación:

	0	1	2	3	4	5
0	1737	1945	2284	2555	2877	2952
1	3227	3532	3758	3936	4265	
2	3215	3479	3830	4146		
3	2782	3170	3607			
4	2552	2774				
5	2895					

Paso 8: Obtención de los factores de desarrollo de la muestra regenerada. Son los recogidos en la siguiente tabla:

F_p	1,103	1,112	1,077	1,100	1,026
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Paso 9: proyección de las cifras históricas a partir de los anteriores factores.

Se obtienen los siguientes resultados:

	0	1	2	3	4	5
0						
1						4376
2					4562	4681
3				3887	4276	4388
4			3084	3322	3656	3751
5		3192	3548	3823	4207	4316

Pasó 10: Obtención de los incrementos estimados a partir de los acumulados anteriores sin más que restar respecto del dato del año inmediatamente anterior de desarrollo, con lo que los resultados son:

	0	1	2	3	4	5
0						
1						111
2					416	119
3				280	390	111
4			310	239	333	95
5		297	356	275	383	110

Paso 11: Simulación de los pagos correspondientes a cada año. Para ello, se simulará un proceso de Poisson sobredisperso, de la forma:

$$E(C_{i,j}) = m_{i,j}$$

$$var(C_{i,j}) = \phi m_{i,j}$$

En esta fase se generan datos que sigan esta distribución en cada una de las celdas que componen el triángulo inferior derecho. Una forma, que además es la sugerida por England en su trabajo, consiste en generar un proceso de Poisson de parámetro λ igual a $m_{i,j}/\phi$ y multiplicar el resultado por el factor de escala, ϕ .

A continuación se presenta un ejemplo

3.1.5.3 Cálculo de la reserva IBNR utilizando el Bootstrapping

Paso 1: Obtención de los factores de desarrollo del Chain Ladder tradicional

Tabla 15. Triángulo Método Chain Ladder

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Nominal
0	245	775	1217	1584	1996	2459	2616	2774	3006	3121	0
1	246	852	1522	2395	2800	3051	3507	3900	4187	4347	4172
2	196	891	1556	2310	2898	3061	3493	3776	4070	4225	3446
3	210	978	1548	2683	2950	3245	3462	3762	4055	4210	2699
4	300	783	1493	2069	2474	2869	3175	3451	3719	3861	1961
5	268	919	1530	2132	2684	3005	3326	3614	3895	4044	1513
6	298	888	1698	2487	2983	3340	3696	4017	4329	4495	1172
7	243	980	2010	2980	3574	4001	4429	4813	5187	5385	790
8	255	940	1673	2480	2975	3330	3685	4005	4317	4482	439
9	233	825	1468	2176	2611	2923	3235	3515	3789	3934	145

FD	3,5409	1,7795	1,4824	1,1996	1,1195	1,1068	1,0867	1,0778	1,0383	1,0000	16336
----	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	-------

Para el valor nominal realizamos la diferencia entre la sumatoria de la diagonal del año de ocurrencia con la diagonal del año anterior, hasta la entrada del año de ocurrencia, así por ejemplo, para el año de ocurrencia 3 y 7, el valor nominal será respectivamente:

$$VN_3 = 3515 + 4317 + 5385 - (3235 + 4005 + 5187) = 790$$

$$VN_5 = 2923 + 3685 + 4813 + 4329 + 4044 - (2611 + 3330 + 4017 + 3895) = 1513$$

Paso 2: Obtención de los pagos acumulados estimados

Tabla 16. Triángulo de pagos acumulados

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	185	655	1165	1727	2071	2319	2567	2789	3006	3121
1	257	912	1623	2405	2885	3230	3575	3885	4187	
2	250	886	1577	2338	2804	3139	3475	3776		
3	249	883	1571	2329	2794	3128	3462			
4	229	810	1441	2136	2563	2869				
5	240	848	1509	2237	2684					
6	266	943	1678	2487						
7	319	1130	2010							
8	265	940								
9	233									

Partiendo de la última diagonal, se obtienen los datos de años anteriores de forma recurrente sin más que dividir la cifra del año t entre el factor de desarrollo del año $t - 1$.

$$\hat{C}_{(0,8)} = \frac{3121}{1,0383} = 3006 \quad \hat{C}_{(0,7)} = \frac{3006}{1,0778} = 2789$$

Paso 3: Cálculo de los incrementos anuales a partir de los valores estimados en el paso 2.

Tabla 17. Triángulo de incrementos anuales

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	185	470	510	562	345	247	248	223	217	115
1	257	654	711	783	480	345	345	310	302	
2	250	636	691	761	467	335	335	301		
3	249	634	688	758	465	334	334			
4	229	581	631	695	426	306				
5	240	609	661	728	447					
6	266	677	735	809						
7	319	811	880							
8	265	675								
9	233									

Así por ejemplo

$$\hat{X}_{6,2} = 1678 - 943 = 735$$

Pasó 4: Cálculo de los residuos adimensionales de Pearson

Tabla 18. Triángulo de residuos adimensionales de Pearson

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	4,42	2,78	-3,02	-8,22	3,63	13,70	-5,76	-4,33	1,03	0,00
1	-0,72	-1,89	-1,53	3,23	-3,42	-5,04	5,98	4,71	-0,87	
2	-3,43	2,34	-0,98	-0,24	5,62	-9,40	5,28	-1,06		
3	-2,49	5,34	-4,51	13,69	-9,18	-2,12	-6,41			
4	4,71	-4,07	3,13	-4,52	-1,04	5,08				
5	1,84	1,72	-1,95	-4,67	4,99					
6	1,95	-3,33	2,77	-0,71						
7	-4,25	-2,58	5,04							
8	-0,64	0,40								
9	0,00									

Por ejemplo

$$\hat{r}_{3,0} = \frac{210 - 249}{\sqrt{249}} = -2,49$$

Pasó 5: Realización del remuestreo de residuos.

Fase en la que se lleva a cabo el bootstrap. Para ello se requiere utilizar software para la iteración del remuestreo de residuos en este caso se utilizó el programa Excel del paquete Office de Windows, dando lugar al siguiente triángulo.

Tabla 19. Triángulo de remuestreo de residuos

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-5,04	-4,07	0,00	-4,52	-6,41	-4,52	5,04	-0,64	-3,43	3,63
1	0,00	5,08	-0,87	-4,07	-4,25	-2,58	2,77	-6,41	-4,67	
2	5,28	5,62	-1,95	0,00	-0,24	-4,25	4,42	-9,18		
3	1,03	-0,64	-1,89	5,34	-3,43	-4,51	1,03			
4	0,00	-4,07	-4,33	-4,51	5,08	-4,67				
5	2,78	-0,24	3,13	-0,72	1,84					
6	-4,25	5,04	13,70	3,63						
7	2,34	5,98	2,34							
8	-5,76	-0,98								
9	-4,52									

Pasó 6: Regeneración de los incrementos a partir de la muestra obtenida

Por ejemplo, para la posición (2,0) se hará:

$$\hat{C}_{2,0} = \hat{r}_{2,0}\sqrt{m_{2,0}} + m_{2,0} = -4,52\sqrt{562} + 562 = 455$$

Haciendo idéntica operación para todas las posiciones se obtiene el siguiente triángulo:

Tabla 20. Triángulo de regeneración de incrementos

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	116	381	510	455	226	176	327	213	166	154
1	257	784	688	669	387	297	396	197	221	
2	334	778	640	761	461	257	416	142		
3	266	617	639	905	391	251	353			
4	229	483	523	576	531	224				
5	283	603	742	709	485					
6	197	808	1106	913						
7	361	981	950							
8	172	649								
9	164									

Pasó 7: Regeneración de los datos acumulados

Tabla 21. Triángulo de regeneración de datos acumulados

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	116	498	1008	1463	1688	1865	2192	2405	2571	2725
1	257	1042	1729	2398	2785	3082	3478	3675	3896	
2	334	1112	1751	2512	2973	3230	3647	3789		
3	266	883	1522	2427	2818	3069	3422			
4	229	712	1234	1811	2342	2566				
5	283	885	1627	2336	2821					
6	197	1004	2111	3023						
7	361	1342	2292							
8	172	821								
9	164									

Por ejemplo, para la posición (0,3) sera igual a $1008 + 455 = 1463$

Pasó 8: Obtención de los factores de desarrollo de la muestra regenerada

A partir de los datos acumulados obtenidos en el paso 7 y aplicando la expresión que permitía la obtención de tales factores, resultan los siguientes valores:

FD	3,7482	1,7753	1,4541	1,1917	1,0957	1,1327	1,0593	1,0637	1,0599	1,000
----	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	-------

Paso 9: Cálculo de las reservas a partir de la muestra regenerada.

Tabla 22. Triángulo para la obtención de reservas (Bootstrapping)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										4129
2									4030	4271
3								3625	3856	4086
4							2907	3079	3275	3471
5						3091	3501	3709	3945	4181
6					3603	3948	4471	4737	5038	5340
7				3332	3971	4351	4928	5220	5553	5885
8			1457	2118	2524	2766	3133	3319	3530	3741
9		615	1091	1587	1891	2071	2346	2486	2644	2802

Se llena la parte inferior del triángulo así por ejemplo para las posiciones:

$$P_{7,4} = 3332 * \underbrace{1,1917}_{FD} = 3971$$

$$P_{7,7} = 4898 * \underbrace{1,0593}_{FD} = 5220$$

El reparto de las cifras a dotar por ejercicios se obtiene simplemente al sumar una diagonal y restarle la inmediatamente anterior. Las cifras resultantes, en valor nominal se recogen en la siguiente tabla:

Año	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nominal	0	3995	3175	2439	1821	1376	1096	683	370	158

Así para el año 6 el valor nominal sería

$$VN_6 = 2346 + 3319 + 5553 + 5340 - (2071 + 3133 + 5220 + 5038) = 1096$$

Y la reserva

$$IBNR = 0 + 3995 + 3175 + 2439 + 1821 + 1376 + 1095 + 683 + 370 + 158 = 15112$$

CONCLUSIONES

- Los métodos de estimación de IBNR son herramientas que permiten realizar una estimación más confiable del costo final de los siniestros.
- Los diferentes métodos cuentan con premisas básicas que deben cumplirse para poder ser aplicados.
- Es recomendable aplicar más de un método, comparar resultados, combinarlos en caso de ser necesario y obtener así una estimación de los siniestros totales que resulte adecuada y confiable.
- La recopilación de métodos y las comparaciones que pueda hacer el lector, pretenden ser útiles para que se evalúe la calidad de cada método de estimación para las reservas de I.B.N.R.
- El presente trabajo de grado, aportará a que se aborde el manejo de riesgos en las compañías de seguros, tanto del sector asegurador colombiano, como de otros países, de habla hispana (o en cualquier lugar en donde pueda aplicarse a problemas específicos este tipo de modelos) de manera óptima y didáctica, aunque la decisión final de cual método se va a utilizar depende de cada investigador o responsable de la obtención de estas reservas en donde sean requeridas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ministerio de Hacienda y Credito Público, *Decreto 2973 - Régimen de las reservas técnicas de las entidades aseguradoras*. Bogotá, Colombia, 2013, pp. 1–17.
- [2] Ministerio de Hacienda y Credito Público, *Decreto 2555 - Régimen de las reservas técnicas de las entidades aseguradoras*. Bogotá, Colombia, 2010, pp. 1–17.
- [3] M. C. Cuevas, “El Régimen de Reservas Técnicas en Colombia,” *Fasecolda*, pp. 494 – 575, 2011.
- [4] E. Esteva, “Aspectos Técnicos y Legales en las Metodologías de IBNR y No Bien Valuados,” 2009.
- [5] E. Esteva, “Seminario de Notas Técnicas y Reservas.” Mexico D.F., 2006.
- [6] I. Albarran Lozano and P. Alonso González, *Métodos estocásticos de estimación de las provisiones técnicas en el marco de la solvencia II*. Madrid: Fundación Mapre, 2010, p. 213.
- [7] Intermediate Track II, “Bornhuetter - Ferguson Method,” no. September. CLRS, Minneapolis, pp. 1 – 16, 2000.
- [8] P. Kisbye, “Bootstrap Técnica de bootstrap,” 2010.
- [9] E. Esteva, “Modelaje de Siniestros,” 2013.
- [10] J. Ibarra and A. Cid, “Una estimación óptima de los ratios de enlace para el cálculo de la provisión de siniestros pendientes,” in *XIII jornadas de ASEPUMA*, 2005, pp. 1–11.
- [11] F. González, “Método global de cálculo de la provisión de siniestros pendientes, a partir de la información histórica de que se dispone, completa e incompleta,” *Diplom. en CC Estadísticas*, pp. 87–109, 2001.

- [12] J. de A. Sánchez, “Cálculo de las provisiones para siniestros pendientes de declaración con regresión borrosa.,” *Cuadernos del CIMBAGE N°8*, vol. 8. Reus, España, pp. 1–36, 2006.
- [13] P. D. England and R. J. Verrall, “Stochastic claims reserving in general insurance,” no. January, pp. 54 –59, 2002.
- [14] M. Kikuchi and K. Guillén, “Método bootstrap de factores estratificados,” *Rev. Mex. Investig. Actuar. Apl.*, vol. 5, pp. 37 – 50, 2010.